BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2017

Vendredi 16 juin 2017

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOTECHNOLOGIES

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 4

Calculatrice autorisée conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le candidat doit traiter les quatre exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

<u>Les pages 8/9 et 9/9 sont à rendre avec la copie.</u>

Exercice 1 (6 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE A

Une société souhaite exploiter un nouveau détecteur qui permet de mesurer la désintégration de noyaux radioactifs. Pour tester ce détecteur, la société l'utilise pour déterminer le nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon radioactif à des instants donnés. Voici les résultats des relevés réalisés au cours des heures qui ont suivi le début du test :

Nombre t_i d'heures écoulées depuis le début du test	0	2	4	6	8	10
Nombre de noyaux N_i détectés dans l'échantillon (en milliards)	500	440	395	362	316	279

1) a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (on arrondira les valeurs à 10^{-3}) :

t_i	0	2	4	6	8	10
$y_i = \ln N_i$						

b) Représenter le nuage de points de coordonnées (t_i, y_i) sur l'annexe 1, à rendre avec la copie.

c) Un ajustement affine est-il envisageable ? Pourquoi ?

d) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite D d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = at + b$, où les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-3}.

e) Tracer alors la droite D sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

2) a) On choisit la droite D comme modèle d'ajustement du nuage de points $M_i(t_i, y_i)$.

À l'aide de la question 1) d), montrer alors que, pour tout réel t positif ou nul, le nombre de noyaux, en milliards, détectés dans l'échantillon au bout de t heures écoulées depuis le début du test, est de la forme : $A\mathrm{e}^{Bt}$ où A (arrondi à l'unité) et B (arrondi au millième) sont deux réels à préciser.

b) La loi de désintégration assure que la fonction f, qui à tout réel t positif ou nul, associe le nombre de noyaux, en milliards, présents dans l'échantillon au bout de t heures, est définie par $f(t) = 500\mathrm{e}^{-0,06t}$.

Le test réalisé doit-il conduire la société à exploiter le nouveau détecteur ? Pourquoi ?

PARTIE B

On étudie à présent la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = 500\,\mathrm{e}^{-0,06t}$.

1) On admet que : $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,06t} = 0$.

   Déterminer et interpréter graphiquement la limite de f en $+\infty$.

2) Calculer $f'(t)$ où f' est la fonction dérivée de f.

3) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

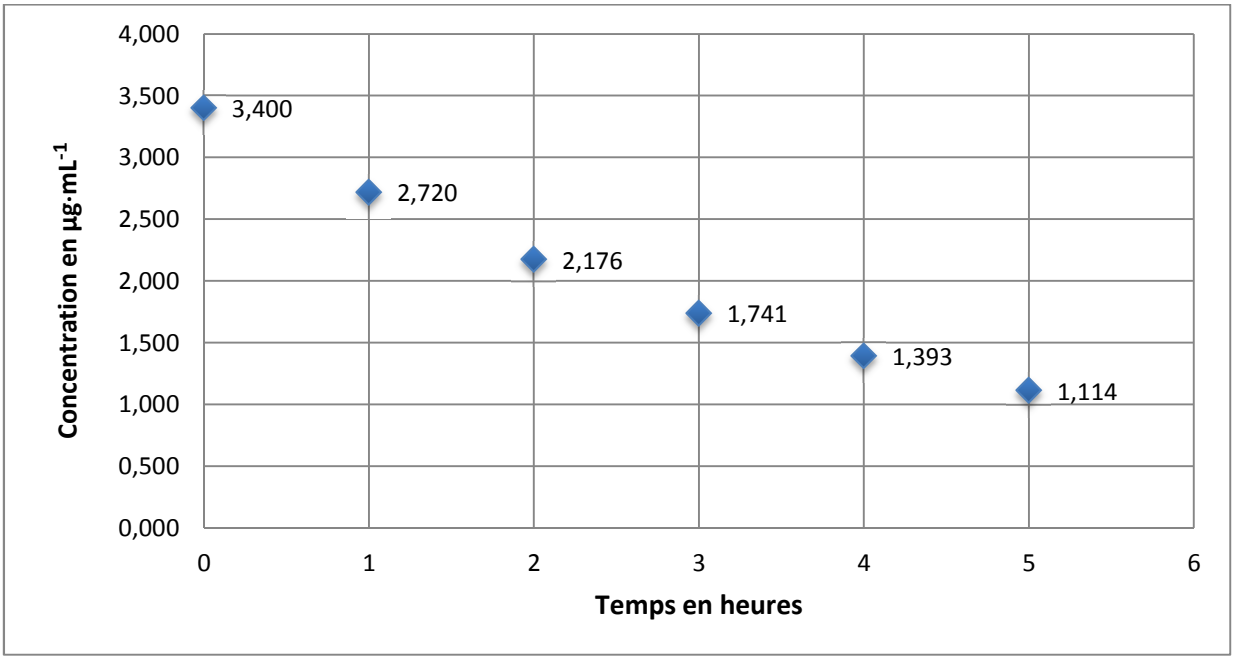
4) On rappelle que $f(t)$ est le nombre de noyaux, en milliards, présents dans l'échantillon radioactif t heures après le début du test.
   a) Calculer le nombre de noyaux présents dans l'échantillon 24 heures après le début du test. On arrondira à l'unité.
   b) Au bout de combien d'heures la moitié des noyaux présents dans l'échantillon au début du test aura-t-elle disparu ? On justifiera la réponse par un calcul et on arrondira à l'heure.

Exercice 2 (6 points)

On s'intéresse à une modélisation de la concentration d'un médicament, injecté dans le sang d'un patient, en fonction du temps.

À 7 heures du matin, on injecte le médicament au patient. Toutes les heures, on relève la concentration de médicament dans le sang, exprimée en $\mu g \cdot mL^{-1}$. À l'injection, cette concentration est égale à 3,4 $\mu g \cdot mL^{-1}$.

Le nuage de points ci-dessous donne la concentration de ce médicament dans le sang en fonction du temps écoulé depuis l'injection.



Partie A

Dans cette partie, on modélise la concentration de ce médicament par une fonction définie sur l'intervalle [0,5].

Parmi les trois modélisations proposées, une seule est correcte. Laquelle ? Justifier.

a) $f : x \mapsto 0{,}6x + 3{,}4$

b) $g : x \mapsto 3{,}4\mathrm{e}^{-0{,}223x}$

c) $h : x \mapsto \dfrac{9}{3+x}$

Partie B

Dans cette partie, on choisit de modéliser la concentration du médicament par une suite, en prenant, pour valeurs des trois premiers termes de la suite, les valeurs données par le graphique placé avant la partie A.

1) Pour tout entier naturel *n*, on note C_n la concentration, exprimée en $\mu g \cdot mL^{-1}$, au bout de *n* heures, de ce médicament dans le sang. Une partie de ce médicament est éliminée toutes les heures.
   a) Par lecture du graphique, donner les valeurs de C_0, C_1 et C_2.
   b) Que peut-on alors conjecturer sur la nature de la suite (C_n) ? Pourquoi ?

On admet qu'à chaque heure, la concentration du médicament restante baisse de 20 %.

2) a) Pour tout entier naturel *n*, exprimer C_n en fonction de *n*.
   b) Déterminer alors la limite de la suite (C_n) lorsque *n* tend vers l'infini. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

3) Soit l'algorithme suivant :

```
Variables :
    n entier naturel
    C réel
Initialisation :
    Affecter à n la valeur 0
    Affecter à C la valeur 3,4
Traitement :
    Tant que C est supérieur à 1
        Affecter à n la valeur n+1
        Affecter à C la valeur 0,8×C
    Fin tant que
Sortie :
    Afficher n
```

Quelle valeur affiche l'algorithme ? Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

4) Pour des raisons d'efficacité, le patient reçoit immédiatement une nouvelle injection de médicament dès que, lors d'un relevé à une heure donnée, la concentration ***c*** du médicament dans le sang est inférieure ou égale à 1 $\mu g \cdot mL^{-1}$. À la nouvelle injection, la concentration du médicament dans le sang est alors égale à $\boldsymbol{c}$ + 3,4 $\mu g \cdot mL^{-1}$.

   a) À quelle heure le patient devra-t-il recevoir une deuxième injection ?
   b) Quelle est la concentration du médicament à cette deuxième injection ? On arrondira le résultat à 0,1 $\mu g \cdot mL^{-1}$.
   c) À quelle heure le patient devra-t-il recevoir une troisième injection ?

Exercice 3 (4 points)

La Direction de la recherche, des études, de l'évaluation et des statistiques (Drees) affirme qu'en France : 7 adultes sur 10 portent des lunettes.

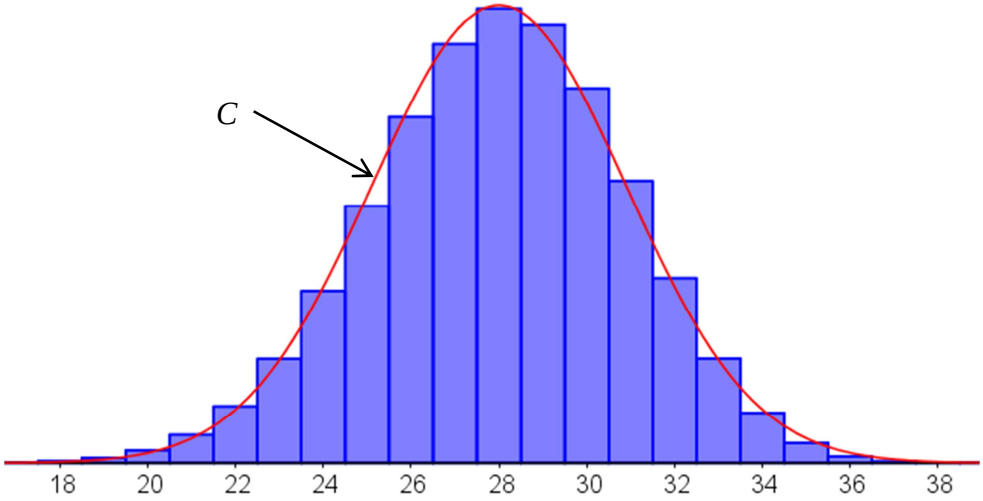
On prélève au hasard un échantillon de 40 adultes parmi la population française. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe le nombre de porteurs de lunettes dans l'échantillon.

1) a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 30 porteurs de lunettes dans un tel échantillon de 40 adultes. On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

On admet que la loi binomiale de la variable aléatoire X précédente peut être approchée par une loi normale de paramètres μ et σ.

2) On a représenté ci-dessous un diagramme en bâtons et une courbe C. L'une de ces deux représentations est la représentation de la loi binomiale suivie par X ; l'autre celle de la loi normale de paramètres μ et σ.



   a) À laquelle des deux représentations est associée la loi binomiale ? Pourquoi ?
   b) Donner, par lecture graphique, la valeur de μ. Justifier.
   c) On affirme que l'écart type σ de la loi normale est égal à 8. Cette affirmation est-elle correcte ? Pourquoi ?

3) a) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des porteurs de lunettes dans un échantillon aléatoire de 40 adultes en France. On arrondira les bornes de l'intervalle à 10^{-3}.

   b) Dans un échantillon de 40 adultes en France, on compte 24 porteurs de lunettes. Déduire de la question précédente si cet échantillon remet en cause l'affirmation de la Drees qui figure au début de l'exercice.

Exercice 4 (4 points)

Soit les fonctions f et g définies sur [0,7] par $f(x) = 20x\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = 20x^2\mathrm{e}^{-x}$. On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives des fonctions f et g représentées en annexe 2.

1) On note :

- D_1 l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$;
- D_2 l'aire du domaine délimité par les courbes C_g, C_f et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 6$.

a) Hachurer les domaines D_1 et D_2 sur le graphique donné en annexe 2, à rendre avec la copie.

b) Encadrer, par deux entiers consécutifs, les aires, en unités d'aire, des domaines D_1 et D_2.

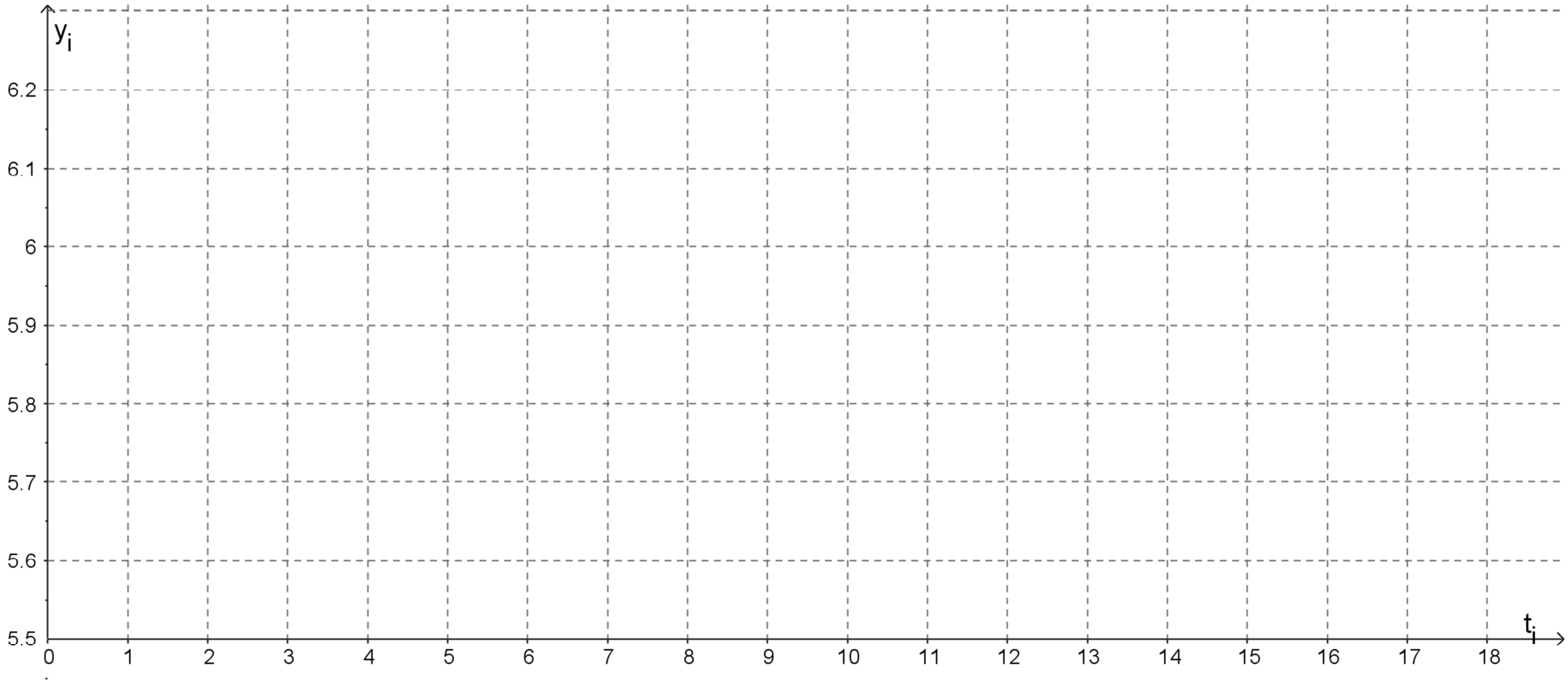
2) La commande $Int(f(x), x, a, b)$ d'un logiciel de calcul formel permet de calculer la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. On obtient alors les résultats suivants pour quatre intégrales :

1	$Int(20xe^{-x}, x, 1, 2)$
	$40\mathrm{e}^{-1} - 60\mathrm{e}^{-2}$
2	$Int(20xe^{-x}, x, 2, 3)$
	$60\mathrm{e}^{-2} - 80\mathrm{e}^{-3}$
3	$Int(20xe^{-x}, x, 3, 6)$
	$80\mathrm{e}^{-3} - 140\mathrm{e}^{-6}$
4	$Int(20x^2e^{-x}, x, 3, 6)$
	$340\mathrm{e}^{-3} - 1000\mathrm{e}^{-6}$

a) Déterminer les aires des domaines D_1 et D_2 en justifiant la réponse. On donnera les valeurs exactes.

b) Comparer les valeurs des deux aires obtenues.

Annexe 1 (exercice 1)
(À rendre avec la copie)



Annexe 2 (exercice 4)
(À rendre avec la copie)