Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

ministère
éducation
nationale

Secrétariat Général

Direction générale des ressources humaines

Sous-direction du recrutement

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Concours du second degré — Rapport de jury

Session 2010

TROISIÈME CONCOURS

CAPES EXTERNE DE MATHÉMATIQUES

Rapport de jury présenté par
Mohamed KRIR, Président de jury

CONSEILS PRATIQUES AUX FUTURS CANDIDATS

Il est recommandé aux futurs candidats de s'informer à l'avance sur les modalités des concours de recrutement en général et sur celles particulières au Troisième concours du CAPES de mathématiques.

Les renseignements généraux (les conditions d'accès ; la préparation ; le déroulement du concours ; la carrière dans l'enseignement secondaire) se trouvent sur le site du Ministère

http://education.gouv.fr

rubrique SIAC2.

Les informations spécifiques (programmes ; nature des épreuves) sont publiées dans le bulletin officiel de l'éducation nationale, publication qui informe les enseignants : carrière, programmes, nominations, vacances de postes, concours, etc. Ces renseignements se trouvent également, pour l'essentiel, dans le rapport du concours.

Le jury, pour faciliter la recherche d'information émanant des candidats et des formateurs, a en outre créé un site à l'adresse :

http://capes-math.org

sur lequel il a réuni l'essentiel des informations utiles à la préparation au concours.

ATTENTION : Les informations figurant sur ce site n'ont pas de caractère officiel ; seules les informations délivrées directement par la DGRH et par le Ministère ont valeur officielle.

**« LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS
SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ
DES PRÉSIDENTS DE JURY »**

Table des matières

1 Présentation du concours 2010

1.1 Composition du jury.

Par arrêté en date du 15 janvier 2010, la composition du jury est la suivante :

M.	KRIR	Mohamed	Maître de Conférences, Président	Versailles
Mme	FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences, Vice-président	Reims
M.	SORBE	Xavier	IGEN, Vice-président	Paris
M.	AGUER	Bernard	IA-IPR, Vice-président	Amiens
M.	ANDRIEUX	Jean-Claude	Professeur agrégé	Dijon
Mme	AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	Versailles
Mme	BLAU	Danièlle	IA-IPR	Toulouse
M.	CHAREYRE	Bernard	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	DEAT	Joelle	IA-IPR	Versailles
Mme	ERNOULT	Monique	IA-IPR	Créteil
M.	HANS	Jean-Luc	Professeur de chaire supérieure	BESANCON
Mme	LAPOLE	Isabelle	Professeure Agrégée	Amiens
M.	LAPOLE	René	Professeur Agrégé	Amiens
M.	MICHALAK	Pierre	IA-IPR	Versailles
M.	MORENO-SOCIAS	Guillaume	Maître de Conférences	Versailles
M.	PUYOU	Jacques	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	ROUDNEFF	Évelyne	IA-IPR	Versailles

1.2 Statistiques

Le nombre de postes mis au concours est de 32 (22 pour le public et 10 pour le privé). Les candidats présents à l'épreuve écrite du 3ème concours du CAPES pour la session 2010 ont été au nombre de 128 (89 dans le public et 29 dans le privé). Après l'écrit, 37 candidats ont été déclarés admissibles (30 pour le public et 7 pour le privé). Après l'oral, 14 candidats ont été déclarés admis (11 pour le public, et 3 pour le privé). La barre d'admissibilité est de 7,5/20. La moyenne des candidats admissibles est de 10,35/20 pour le public et de 9,94/20 pour le privé. La barre d'admission est de 9/20. La moyenne générale (écrit plus oral) des candidats admis est de 13,18/20 pour le public et de 11,91/20 pour le privé.

L'épreuve écrite pour le troisème concours est la même que la première épreuve du CAPES externe et CAFEP et a eu lieu le 9 mars 2010.

Les épreuves orales se sont déroulées au Lycée Jean Lurçat, 75013 Paris, les 22 et 23 juin pour l'épreuve d'exposé et les 23 et 24 juin pour l'épreuve sur dossier.

2 Énoncé et analyse de l'épreuve écrite

2.1 Énoncé de l'épreuve

Introduction

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On étudie la série de terme général a_n. On montre qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée γ, et appelée **Constante d'Euler**. Pour cela on commence par étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

PARTIE I : Première approche de la constante d'Euler

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, montrer que

$$0 \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0,1]$.

3) Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p}\,\mathrm{d}t,$$

puis montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

4) En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geqslant 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

5) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que

$$0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

PARTIE II : Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dira que f est ***intégrable*** *sur I si l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.*

On admettra le résultat suivant : *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles positives, définies, continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle I. Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux et si la série numérique $\sum \int_I u_n$ converge, alors, la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et on a :*

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

1) Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes **:**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t.$$

b) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \dfrac{1}{t}$ quand $t \to 0^+$.

c) Conclure.

2) Dans cette question on se propose de démontrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \,\mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a}.$$

Soient x et y deux réels strictement positifs.

a) Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t.$$

b) Montrer que pour $a \leqslant b$ on a pour tout réel $z > 0$:

$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t \leqslant e^{-az} \ln \frac{b}{a}$$

c) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\, \mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a}.$$

3) Une première représentation intégrale de la constante d'Euler.

a) Démontrer que pour pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t} \right).$$

b) En déduire que pour pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t} \right).$$

c) Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$1 - \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t} \geqslant 0.$$

d) Retrouver alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$ et démontrer l'égalité :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

4) Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler.

Soit y un réel strictement positif.

a) Calculer $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t$, puis déduire que

$$\lim_{y \to 0^+} \left(\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t \right) = 0.$$

b) Démontrer que :

$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{y} \mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t.$$

c) En déduire que :

$$\lim_{y \to 0^+} \left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \right) = 0.$$

d) Démontrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t\, \mathrm{d}t = \lim_{y \to 0^+} \left(\mathrm{e}^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \right).$$

e) Conclure alors que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t\ \mathrm{d}t.$$

PARTIE III : Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1) **a)** Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right) \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \,\mathrm{d}t.$$

(**Indication** : *on pourra calculer chacune des deux intégrales*).

b) En utilisant l'égalité obtenue en II.3)d), démontrer que :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t.$$

2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$.

(On rappelle que $H_0 = 0$ et pour $k \geqslant 1, H_k = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$.)

a) Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F'(x) - F(x) = \frac{1}{x}(\mathrm{e}^x - 1).$$

c) Montrer alors que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t.$$

3) Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\gamma + \ln x = \mathrm{e}^{-x} F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t.$$

4) Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit un entier $a \geqslant 2$. Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leqslant \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \leqslant \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}.$$

(**Indication** : *on pourra admettre et utiliser l'inégalité :* $n! \geqslant \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.)

5) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\left|\gamma + \ln n - \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k \right| \leqslant \frac{a}{a-1} \frac{\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an} + \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

6) Décrire une méthode permettant le calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-10} près. (On ne demande pas le calcul d'une telle valeur approchée.)

PARTIE IV : La constante d'Euler somme de la série de Vacca (1910)

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on pose :

$$v_p = p\left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k}\right).$$

1) **a)** En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs dans l'expression de v_p, montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$ on a :

$$v_p = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p) \qquad \text{où} \qquad \sigma_p = \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

c) Montrerque pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d) En utilisant le développement asymptotique de H_n, obtenu en **I. 5)**, conclure que la série de terme général v_p est convergente et qu'on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (-1)^n \frac{\log_2 n}{n}$$

où $\log_2$ désigne la fonction logarithme en base 2 et x désigne la partie entière du réel x.

a) Expliquer pourquoi le critère spécial des séries alternées ne permet pas de montrer la convergence de la série de terme général u_n.

b) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\left|\sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

puis en déduire que :

$$\left|\sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}.$$

c) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{p=0}^{n} v_p + \mathcal{O}\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

et en déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.$$

3) On pose pour tout entier naturel n :

$$r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

a) Montrer que la série de terme général r_n est absolument convergente.

b) Exprimer v_k en fonction de k, r_k et r_{k+1}. Montrer ensuite que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1}.$$

Conclure que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right)$$

PARTIE V : La formule de Gosper (1972)

Dans cette partie on désigne par $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. Si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{F}$, on notera aussi $x[k]$ le terme x_k de la suite x. On considère l'endomorphisme Δ de $\mathcal{F}$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathcal{F}, \forall\, k \in \mathbb{N},\ \Delta(x)[k] = x[k] - x[k+1].$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ^n l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ obtenu en composant Δ avec lui même n fois et on pose $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $p \in [0, n]$, $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binômial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x_{p+k}.$$

(**Indication** : *écrire* $\Delta = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}} - T$ *où* T *est l'endomorphisme de* $\mathcal{F}$ *défini, pour tout* $x \in \mathcal{F}$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$, par : $T(x)[k] = x[k+1]$.)

2) Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et de limite ℓ. On se propose de montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \ell.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\frac{\binom{n}{p}}{2^n} \right)_{n \geqslant p}$ converge vers 0.

b) On suppose dans cette question $\ell = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = 0.$$

(**Indication :** *On pourra utiliser l'égalité suivante :*

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p} u_p + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p$$

et, étant donnée un réel $\varepsilon > 0$, *choisir un entier* k *suffisamment grand pour que l'on ait* $\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.)

c) Conclure pour le cas général où ℓ est quelconque.

3) Dans cette question, on se propose de démontrer la propriété suivante : Soit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. Si la série $\sum (-1)^k x_k$ converge, alors, la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$U_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x_k \qquad \text{et} \qquad V_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

a) Démontrer que

$$V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=0}^{N} \binom{N+1}{q+1} U_q.$$

(*on pourra observer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^k x_k = U_k - U_{k-1}$, *avec, par convention,* $U_{-1} = 0$).

b) En déduire que la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k.$$

4) On considère dans cette question un entier $n \geqslant 1$ ainsi que la suite $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_j = \frac{1}{2^n + j}.$$

a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 0$ on a :

$$\Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

Indication : *On pourra admettre et utiliser le résultat suivant : Pour* $m, n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}$$

b) En déduire que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

c) Conclure que la constante d'Euler peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE

2.2 Description de l'épreuve écrite et analyse des prestations

Le sujet dont la difficulté était très progressive n'utilisait que des connaissances de base et on aurait pu a priori espérer que ces connaissances fussent dominées par des étudiants possédant une licence de mathématiques.

Globalement, les correcteurs notent une rédaction de faible qualité et une rigueur trop souvent absente :

- ◇ les quantificateurs (dans les rares copies où ils apparaissent) sont souvent mal employés et génèrent souvent des phrases mathématiques incohérentes ;
- ◇ nombre de candidats utilisent de façon systématiques des équivalences avec des écritures comme $f \leqslant g \Leftrightarrow \int f \leqslant \int g$;
- ◇ les hypothèses des théorèmes utilisés sont rarement citées et, lorsqu'elles le sont, sont encore plus rarement vérifiées par les candidats ;
- ◇ de graves lacunes apparaissent dans les manipulations d'inégalités (soustraction membre à membre, obtention d'encadrements faux par choix d'une valeur par approchée par excès de la borne inférieure obtenue et bien sûr d'une valeur approchée par défaut de la borne supérieure)

Les candidats ont majoritairement abordé les parties I, II et III ; les deux dernières parties n'ont été traitées que très partiellement et dans de très rares copies.

Partie I

Cette partie a été abordée par l'ensemble des candidats.

- la notion de majorant est mal comprise par un nombre important de candidats ;
- si presque tous les candidats rédigent une réponse, il y a bien peu de copies dans lesquelles on trouve une rédaction correcte : il s'agit pourtant d'un développement asymptotique classique. Beaucoup de candidats ne maîtrisent pas les équivalents ;
- il est très inquiétant de voir que peu de candidats obtiennent le bon encadrement

Partie II

C'est dans cette partie que les candidats ont traité le plus de questions et c'est aussi celle où les erreurs et les imprécisions de rédaction sont les plus nombreuses.

- un nombre important de candidats semble ignorer les règles qui permettent de conclure quant à la nature d'une intégrale impropre ; même chez les candidats qui évoquent le critère de Riemann ou la comparaison avec une fonction intégrable, la rédaction est le plus souvent lacunaire.
- les candidats « manipulent » les intégrales impropres sans se préoccuper de savoir si les objets existent ou pas : on voit ainsi fleurir des sommes dans lesquelles apparaissent $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ ou encore $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$;
- bon nombre de candidats alignent des égalités de limites sans savoir si ces limites existent ;
- dans la question 1.b. trop peu de candidats présentent une rédaction correcte : certains se contentent d'énoncer le résultat exact sans justification, d'autres pensent que la limite est nulle !

Partie III

De manière surprenante, seule une minorité de candidats semblent avoir des notions concernant les séries entières (en particulier le rayon de convergence est souvent négligé) ;

pour les autres, la fonction F de la question 2 est tout simplement un polynôme (de degré infini) donc pour lequel la question de dérivabilité ne se pose même pas. Pour ce qui concerne l'équation différentielle, on lit de façon très exceptionnelle une référence au théorème de Cauchy–Lipschitz mais sans aucune vérification des hypothèses.

Les parties suivantes n'ont été que très peu traitées : quelques bonnes copies abordent la partie V mais même dans ces copies la rédaction manque de rigueur (par exemple l'utilisation de la formule du binôme pour le calcul de $(\mathrm{Id} - T)^n$ n'est jamais justifié par le fait que Id et T commutent).

L'ensemble des copies montre des lacunes importantes dans l'utilisation des outils essentiels de l'analyse (et de l'algèbre) : le jury ne peut que conseiller aux étudiants de consacrer à la maîtrise de ces outils le temps nécessaire à une appropriation réelle.

3 Les épreuves orales

3.1 L'épreuve orale sur dossier du 23 juin

Selon les termes de l'arrêté du 26 juillet 2005 : « Outre les objectifs de l'épreuve d'admission du concours externe, l'épreuve doit aussi permettre au candidat de démontrer qu'il a réfléchi à l'apport que son expérience professionnelle constitue pour l' exercice de son futur métier et dans ses relations avec l' institution scolaire, en intégrant et en valorisant les acquis de son expérience et de ses connaissances professionnelles à la problématique du dossier et dans ses réponses aux questions du jury ».

Thème : Suites et fonctions

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 6$ et pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$
   1.a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, 8]$
   1.b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$
2) En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- sa réponse à la question 2) ;
- deux exercices sur le thème mettant en jeu « **Suites et fonctions** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les connaissances et savoir-faire mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

3.2 L'épreuve orale sur dossier du 24 juin

Selon les termes de l'arrêté du 26 juillet 2005 : « Outre les objectifs de l'épreuve d'admission du concours externe, l'épreuve doit aussi permettre au candidat de démontrer qu'il a réfléchi à l'apport que son expérience professionnelle constitue pour l' exercice de son futur métier et dans ses relations avec l' institution scolaire, en intégrant et en valorisant les acquis de son expérience et de ses connaissances professionnelles à la problématique du dossier et dans ses réponses aux questions du jury ».

Thème : Fonctions et géométrie

1. L'exercice proposé au candidat

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On appelle Γ la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$. Soient a, b, c trois réels non nuls et deux à deux distincts, A, B, C les points d'abscisses respectives a, b, c et H l'orthocentre du triangle ABC. Le but de l'exercice est d'étudier la position du point H lorsque l'on fait varier a, b, et c.

1) Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.
2) Faire varier a, b, c et émettre une conjecture concernant la position du point H.
3) On se propose d'étudier la conjecture formulée à la question 2).
   3.a) Donner une équation de deux des hauteurs du triangle.
   3.b) En déduire les coordonnées de H en fonction de a, b, et c . Conclure.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- sa réponse à la question 3) de l'exercice ;
- deux exercices sur le thème « **Fonctions et géométrie** »

Le candidat présentera au jury :

◇ le contenu de ses fiches ;

◇ les connaissances et savoir-faire mis en jeu dans cet exercice ainsi que les objectifs d'apprentissage visés.

4 Déroulement des épreuves orales et conseils

L'oral du concours consiste en deux épreuves de 45 minutes : une épreuve d'exposé de leçon et une épreuve sur dossier. Pour chaque épreuve, le candidat dispose de 25 minutes d'exposé et de 20 minutes d'entretien avec le jury.

Les candidats au concours Troisième voie bénéficient de beaucoup d'atouts : leur maturité, des connaissances bien assimilées, et souvent l'expérience d'une utilisation de l'outil mathématique et informatique dans leur vie professionnelle.

Pour ce type de concours, la communication qui s'établit entre le candidat et son jury est primordiale : il convient donc de valoriser cet aspect. À ce titre, écrire trop de détails au tableau est contreproductif, il est préférable de s'adresser plus souvent aux examinateurs, et de faire preuve de conviction.

Selon les termes de l'arrêté du 26 juillet 2005 : *Outre les objectifs de l'épreuve d'admission du concours externe, l'épreuve doit aussi permettre au candidat de démontrer qu'il a réfléchi à l'apport que son expérience professionnelle constitue pour l'exercice de son futur métier et dans ses relations avec l'institution scolaire, en intégrant et en valorisant les acquis de son expérience et de ses connaissances professionnelles à la problématique du dossier et dans ses réponses aux questions du jury.*

4.1 Pour la première épreuve : l'épreuve d'exposé de leçon

Le candidat tire au sort une enveloppe proposant deux sujets. Il choisit un de ces deux sujets qu'il prépare sans document pendant 2 heures. À l'issue de sa préparation le candidat expose au jury le thème traité.

Il s'agit d'un exposé de connaissances et non pas d'une séquence d'enseignement effectuée face à une classe fictive.

L'exposé est fait au niveau souhaité par le candidat mais il doit témoigner d'un bon niveau en mathématiques. Il paraît en effet essentiel que le candidat montre qu'il domine le contenu du sujet et qu'il maîtrise le niveau auquel il se situe. Ce sont les connaissances du candidat qui sont évaluées, la rigueur de son raisonnement et de son expression, la cohérence des différentes parties de son développement : objectifs définis de manière précise, pré-requis éventuels identifiés, démarche logique, progressive et argumentée aboutissant aux objectifs contenus dans le sujet proposé. L'exposé doit donner lieu à au moins une démonstration détaillée d'un résultat énoncé. Le candidat doit veiller à la rigueur et à la précision de cette présentation.

Bien évidemment, le jury est sensible à la bonne organisation et la bonne présentation de ce qui reste écrit au tableau. L'écriture doit être lisible : le candidat est en général libre d'effacer un tableau qu'il a rempli, afin de poursuivre son exposé. Certaines démonstrations peuvent être exposées oralement : cela permet d'écrire moins, et de se tourner plus vers le jury. Le candidat est souvent amené à effectuer des figures au tableau, en utilisant le matériel mis à sa disposition (règle, équerre, compas, craies de couleur), ou à présenter des illustrations sur transparent ou sur calculatrice. La rétroprojection est mise en place par le jury, de sorte que les candidats n'ont pas à s'inquiéter de ces questions matérielles.

Lors de l'entretien, le jury amène le candidat à apporter un certain nombre de précisions et à faire d'éventuelles corrections. Il peut également demander la justification de certains résultats. Outre les connaissances mathématiques attendues, la qualité de l'écoute et de la compréhension des questions posées permet également d'évaluer la capacité du candidat à communiquer. Le jury valorisera donc un candidat qui s'attache à répondre aux questions avec précision et concision.

Les questions qui sont alors posées par le jury ne visent en rien à déstabiliser le candidat, mais au contraire à lui donner la possibilité de corriger certaines erreurs ou imprécisions, d'apporter des compléments sur des points qu'il aurait passés sous silence, de valoriser des acquis dont il ne soupçonne parfois pas l'intérêt.

Le jury est parfaitement conscient du temps écoulé depuis l'acquisition des connaissances initiales. Toutefois, l'absence de maîtrise du calcul algébrique a été trop souvent constatée, ainsi les erreurs sur la nature et la définition des fonctions usuelles : confusion entre fonctions exponentielles et puissances, définition de la fonction logarithme népérien autrement que par le bouton adéquat de la calculatrice...

Ce qui a été recherché chez les candidats, c'est la capacité à communiquer avec leurs futurs élèves, collègues et formateurs, à mettre à jour leurs connaissances un peu anciennes, apporter leur propre expérience et accepter de tirer profit des conseils, voire des critiques, quel qu'ait été leur parcours scolaire et universitaire antérieur, parfois prestigieux.

4.2 Pour la seconde épreuve : l'épreuve sur dossier

La seconde épreuve, de 45 minutes au maximum, qui se déroule le lendemain matin sur un thème commun à tous les candidats convoqués le jour même, consiste à répondre précisément aux questions posées à propos d'un exercice donné par le jury, puis à proposer à son tour des exercices sur un thème connexe, thème lui aussi bien explicité par le sujet.

Le candidat expose pendant 25 minutes au maximum. L'entretien qui suit a une durée d'au moins 20 minutes. Au cours de cet entretien, les candidats sont invités à évoquer leur parcours professionnel, et le profit qu'ils pourront tirer de leur expérience dans l'exercice de leur futur métier.

La fiche que le candidat remet au jury présente la rédaction d'une question précise ainsi qu'un choix d'exercices proposés par le candidat sur le thème étudié.

Les erreurs le plus souvent constatées consistent à présenter une solution de l'exercice du jury, alors qu'il s'agit plutôt de dégager les méthodes utiles à sa résolution, et de rappeler quels outils mathématiques sont à l'œuvre dans celui-ci. De même, présenter un exercice ne signifie pas écrire son énoncé exhaustif au tableau, ni détailler son corrigé, mais indiquer le but de l'exercice, éventuellement l'illustrer par des figures soignées au tableau, ou par l'usage de la calculatrice, et préciser les notions que cet exercice permet de manipuler.

Le jury déplore qu'un certain nombre de candidats n'aient pas mis à profit le temps d'exposé pour présenter les objectifs des exercices proposés en identifiant de manière précise les théorèmes et outils mis en jeu. Le recours à des énoncés rigoureux et l'usage du tableau mis à disposition des candidats s'avèrent souvent judicieux. Le choix des énoncés d'exercices se rapportant aux thèmes traités n'est pas toujours argumenté. Il est parfois même peu pertinent. Les propositions d'exercices faisant appel à des outils différents de ceux en jeu dans l'exercice candidat sont valorisées.

L'entretien conduit le jury à faire préciser la rédaction de certaines parties, permettant ainsi au candidat de faire valoir ses qualités pédagogiques. Il est regrettable que cet exercice révèle des insuffisances mathématiques et il convient de rappeler aux candidats la nécessité de ne proposer que des exercices dont ils maîtrisent la résolution.

L'entretien permet également au candidat de décrire les responsabilités et les activités qui lui ont été confiées en faisant valoir l'apport que son expérience professionnelle constitue pour l'exercice du futur métier envisagé.

L'expérience professionnelle d'un candidat pourrait par exemple souvent utilement être exploitée dans le cadre de travaux pluridisciplinaires liés à la problématique du dossier : il appartient au candidat de le souligner et de l'illustrer.

L'entretien doit aussi permettre au jury d'évaluer l'aptitude du candidat à présenter sa motivation et à se projeter dans le métier de professeur de mathématiques. La qualité de l'expression orale est prise en compte.

Cette épreuve sur dossier permet donc au candidat de prouver :

a) qu'il connaît les contenus d'enseignement et sait les illustrer ;

b) qu'il a réfléchi aux finalités et à l'évolution de la discipline ainsi que sur les relations de celle-ci aux autres disciplines ;

c) qu'il a les aptitudes à l'expression orale, à l'analyse, à la synthèse et à la communication.

5 Conclusion

À l'oral, la seconde épreuve n'a pas permis de réellement mettre en valeur les apports spécifiques de ces nouveaux candidats relatifs à leur carrière professionnelle précédente. Une certaine timidité a pu les gêner, ou pour la plupart, un manque de réflexion préalable, en particulier pour ceux qui, parmi eux, avaient été employés dans différents métiers proches de l'éducation.

Les candidats admis ont fait preuve d'une grande régularité dans leurs résultats aux différentes épreuves. Ils ont de plus montré une motivation profonde et sérieuse pour le métier auquel ils prétendaient.

Le jury suggère aux futurs candidats de mettre d'une façon plus éclatante leurs spécificités en valeur, et espère qu'ils bénéficieront d'une préparation de qualité.

6 La session 2011 du CAPES externe et CAFEP

Il est conseillé aux candidats du 3ème concours de se connecter sur le site du Capes. Ils y trouveront des informations et des références aux textes officiels concernant la session 2011.

À titre d'informations, pour le CAPES externe et le CAFEP les programmes des épreuves est paru au BO spécial n° 7 du 8 juillet 2010 et la description des épreuves est régie par un arrêté du 28 décembre 2009 paru au JO du 6 janvier 2010.

6.1 Programme des épreuves écrites et orales

Paru au BO spécial n° 7 du 8 juillet 2010

ÉPREUVES ÉCRITES
Le programme est constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée (STS et CPGE) en vigueur au titre de l'année scolaire 2010-2011 et de ceux en vigueur au titre de l'année scolaire 2009-2010.

ÉPREUVES ORALES
Le programme est constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs en vigueur au titre de l'année scolaire 2010-2011 et de ceux en vigueur au titre de l'année scolaire 2009-2010.

6.2 Description des épreuves écrites et orales

Paru au JO du 6 janvier 2010.

A . - *Epreuves d'admissibilité*

1° Première composition écrite (durée : Cinq heures, coefficient 3).

2° Deuxième composition écrite (durée : Cinq heures, coefficient 3).

Le programme de ces épreuves est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée (STS et CPGE).

L'usage de calculatrices scientifiques est autorisé selon la réglementation en vigueur.

B. - *Epreuves d'admission*

1° Leçon portant sur les programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs :

Durée de la préparation : deux heures et demie ; durée de l'épreuve : une heure ; coefficient 3.

Le candidat choisit un thème, parmi deux qu'il tire au sort.

Dans un premier temps (quinze minutes maximum), le candidat expose un plan d'étude détaillée du sujet qu'il a choisi.

Dans un second temps (quinze minutes maximum), le candidat développe une partie de ce plan d'étude, choisie par le jury.

L'épreuve se termine par un entretien avec le jury portant sur ce développement, puis sur d'autres aspects relevant du sujet choisi par le candidat.

Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.

2° Epreuve sur dossier comportant deux parties : 14 points sont attribués à la première partie et 6 points à la seconde. (Durée de la préparation : deux heures et demie ; durée totale de l'épreuve : une heure ; coefficient 3.)

Première partie : épreuve d'exercices ; durée : quarante minutes.

L'épreuve permet au candidat de montrer :

– sa culture mathématique et professionnelle ;

– sa connaissance des contenus d'enseignement et des programmes ;

– sa réflexion sur l'histoire et les finalités des mathématiques et leurs relations avec les autres disciplines.

L'épreuve s'appuie sur un dossier fourni par le jury, portant sur un thème des programmes de mathématiques du collège, du lycée ou des sections de techniciens supérieurs. Ce thème est illustré par l'énoncé d'un exercice, pouvant être complété par des extraits de manuels, des productions d'élèves ou des passages des programmes officiels. Le dossier comprend des questions permettant d'apprécier la réflexion pédagogique du candidat. Ces questions portent sur l'énoncé de l'exercice et sa résolution ou d'autres aspects pédagogiques liés au contenu du dossier.

Pendant vingt minutes, le candidat expose ses réponses aux questions posées dans le dossier et propose, en motivant ses choix, plusieurs exercices s'inscrivant dans le thème du dossier.

Cette première partie se termine par un entretien avec le jury, portant sur l'exposé du candidat, en particulier sur les exercices qu'il a proposés, aussi bien en ce qui concerne leur résolution que les stratégies mises en oeuvre.

Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.

Le programme de cette première partie d'épreuve est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs.

Seconde partie : interrogation portant sur la compétence « Agir en fonctionnaire de l'Etat et de façon éthique et responsable ». (Présentation dix minutes, entretien avec le jury : dix minutes.)

Le candidat répond pendant dix minutes à une question, à partir d'un document inclus dans le dossier qui lui a été remis au début de l'épreuve, question pour laquelle il a préparé les éléments de réponse durant le temps de préparation de l'épreuve. La question et le document portent sur les thématiques regroupées autour des connaissances, des capacités et des attitudes définies, pour la compétence désignée ci-dessus, dans le point 3 « les compétences professionnelles des maîtres » de l'annexe de l'arrêté du 19 décembre 2006.

L'exposé se poursuit par un entretien avec le jury pendant dix minutes.

6.3 Des exemples de sujets zéro

voir le lien :
http ://www.education.gouv.fr/cid49096/session-2011-exemples-de-sujets.html.

FIN DU RAPPORT