



Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C 2, C3 et C4

Marie-Jeanne Perrin-Glorian,

**Professeur émérite des universités,
Université d'Artois**

**Réflexions dans la perspective de
nouveaux programmes pour les cycles 2
(CP-CE2) et 3 (CM1-6ème)**

Réflexions dans la perspective de nouveaux programmes pour les cycles 2 (CP-CE2) et 3 (CM1-6^{ème})

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Préambule

Le présent texte reprend à la fois la contribution que j'ai envoyée début septembre 2014 et la présentation que j'ai faite à l'entretien du 10 octobre 2014.

J'ai essayé de répondre aux questions posées en me référant comme demandé aux programmes de 2002 et 2008 mais aussi et surtout en m'appuyant autant sur mon expérience de formatrice (formation continue des professeurs du second degré à l'IREM de 1968 à 1995, formation initiale des professeurs du second degré de 1996 à 2008, formation initiale et continue des professeurs du premier degré de 1995 à 2008) que sur mon expérience de chercheur acquise aussi bien par mes propres recherches en didactique des mathématiques et les lectures qu'elles ont entraînées, que par les thèses que j'ai dirigées.

Mes recherches se sont intéressées plus particulièrement à la transition école-collège et aux classes faibles de recrutement socio-culturel défavorisé sans toutefois être nécessairement en ZEP. Je me suis intéressée à beaucoup des thèmes qui concernent le primaire : les fractions et décimaux ainsi que la proportionnalité pendant une longue période mais ancienne, et plus récemment la géométrie et la numération des nombres entiers ; ces thèmes rencontrent nécessairement aussi la résolution de problèmes. Depuis une quinzaine d'années, je réfléchis surtout aux conditions d'une progression cohérente de l'enseignement des nombres et de la géométrie sur la scolarité obligatoire parce que je pense que les ruptures non gérées et les vides dans les progressions sont une des causes d'échec, particulièrement pour les élèves de milieu socio-culturel défavorisé qui ne trouvent pas à l'extérieur de l'école les moyens de combler les vides en termes d'apprentissage, ni de reconstruire la cohérence de l'ensemble. C'est donc sur les continuités et ruptures aussi bien horizontalement entre les différentes rubriques du programme que verticalement sur la durée de la scolarité obligatoire que je centrerai mon intervention.

Les questions posées ont orienté ma réflexion mais je ne répondrai pas à toutes et, dans mes réponses à ces questions, je me limiterai à ce qui relève de mes compétences, en essayant de me centrer sur les points où je pense pouvoir apporter une réflexion utile, ce qui veut dire que j'éclairerai certains points tout en laissant dans l'ombre d'autres points que je considère aussi comme importants mais sur lesquels je n'ai pas suffisamment réfléchi. Je pense que d'autres contributeurs les aborderont et je fais confiance à la commission pour faire la synthèse des différents points de vue qu'elle aura recueillis. Ce texte n'engage que moi-même mais j'ai eu l'occasion de discuter certains points avec des collègues.

Dans une première partie, j'aborderai une réflexion générale, d'une part sur la structuration et la forme des programmes, d'autre part sur l'activité mathématique et ses outils avant de m'intéresser

novembre 14

aux contenus en essayant de dégager des repères pour une progression du CP à la sixième.

I. Réflexions sur la forme et la structuration des programmes

Des changements modérés et des programmes ambitieux mais réalistes

Je pense que la publication de nouveaux programmes ne devrait pas trop déstabiliser les enseignants. Ils doivent donc reconnaître dans des nouveaux programmes une bonne partie de ce qu'ils enseignent déjà mais avec des moyens de l'infléchir et de l'améliorer. Je ne pense pas qu'il faille ajouter de nouveaux contenus en primaire ou en sixième à un moment où on cherche à réduire les inégalités et à asseoir le socle commun pour tous. Un réel changement de pratiques nécessite du temps et de la formation et ne peut s'obtenir par le seul changement des programmes.

Une ressource pour les enseignants

Les programmes de 2002 se présentaient sous forme d'un livre préfacé par les ministres : « Qu'apprend-on à l'école élémentaire ? » qui s'adressait non seulement aux enseignants mais aussi aux parents et au grand public (un autre concernait la maternelle) complété par des documents d'application par cycle et par discipline. De plus de nombreux documents d'accompagnement thématiques, y compris un sur l'articulation école-collège sont parus progressivement. Tous ces documents contiennent beaucoup de choses intéressantes et étaient une ressource pour la formation des maîtres.

Je ne sais pas dans quelle mesure il faut rendre les programmes lisibles par les parents (de nos jours, ils peuvent y accéder via internet). En tout cas, compléter les programmes par des commentaires pour les enseignants me paraît indispensable mais ne suffit pas. Des documents d'accompagnement qui approfondissent les points les plus sensibles sont une ressource essentielle pour contribuer à la formation des enseignants, y compris l'autoformation, et ainsi à l'amélioration de l'enseignement.

Une rédaction équilibrée

Les programmes doivent être équilibrés dans leur contenu mais aussi dans leur rédaction : l'expérience montre qu'il y a danger à développer démesurément dans les programmes eux-mêmes les parties sur lesquelles il y a eu des recherches ou qui sont nouvelles : les enseignants risquent de lier l'importance et le temps à consacrer à la longueur du texte du programme. Les parties plus traditionnelles, a priori mieux connues des enseignants semblent ainsi moins importantes et des points essentiels risquent d'être minorés voire oubliés, surtout au fil des années et du renouvellement des enseignants. Ce phénomène était déjà observable dans les programmes dits de « mathématiques modernes ». De même, il y a un risque de dérive à faire apparaître dans les commentaires des programmes eux-mêmes des outils qui doivent rester du domaine de l'enseignant : ces outils risquent de glisser dans l'enseignement aux élèves. C'est par exemple ce qui s'est produit à propos de la résolution de problèmes dans les années 90 : des outils de classement des problèmes et des erreurs ou difficultés des élèves, utiles pour aider les enseignants dans leurs

novembre 14

choix, sont devenus objets d'enseignement.

Je pense donc que les programmes doivent présenter tous les contenus à enseigner avec leurs limites à chaque niveau et des repères pour une progression. Il me semble aussi qu'il faut éviter d'introduire inutilement du vocabulaire issu de la recherche et ancrer le programme dans le vocabulaire professionnel quitte à le faire évoluer.

Un détail raisonnable et des documents complémentaires reliés au programme

Les enseignants ont besoin d'une certaine marge de manœuvre dans la mise en œuvre des programmes mais les objectifs doivent être clairement définis et des pistes pour les atteindre doivent être suggérées. Une liste de contenus¹ comme en 2008 laisse trop de place à l'interprétation et les enseignants démunis.

En plus d'une introduction qui fixe les objectifs, deux types d'éléments complémentaires sont donc indispensables : des commentaires qui accompagnent le programme lui-même et des documents d'accompagnement thématiques qui développent certains points et proposent des activités.

Je pense qu'un gros travail avait été fait pour les programmes de 2002, en particulier pour les documents d'application très détaillés et que ce travail apporte des bases pour élaborer les nouveaux programmes.

Cependant, ces documents d'application, intéressants sur bien des points, sont trop longs comme commentaires de programmes. L'introduction elle-même est très intéressante mais donne lieu à des développements qui trouveraient mieux leur place dans des documents d'accompagnement : des considérations générales qui donnent une orientation des programmes sont nécessaires dans une introduction mais de façon plus brève me semble-t-il. Les commentaires des programmes devraient, à mon avis, être assez synthétiques et se limiter à l'essentiel et à ce qui concerne le contenu lui-même, par exemple faire le lien entre les différentes notions du programme de l'année et ceux des années précédentes et suivantes. En revanche, il conviendrait de renvoyer dans le texte même (par un lien hypertexte dans une version électronique sur le site Eduscol ou par des notes en bas de page dans la version papier) à des développements qui donnent des précisions, des pistes d'activités, des repères pour l'évaluation, dans des textes complémentaires disponibles sur Eduscol (du type des documents d'accompagnement parus entre 2002 et 2005 ou plus récemment le nombre au cycle 2, au cycle 3 qui pourraient être en grande partie repris, après révision bien sûr, et complétés). Ces textes complémentaires qui ont vocation de formation devraient selon moi être pérennes tout en étant mis à jour régulièrement, pas seulement lors de changements de programmes mais aussi indépendamment d'eux, par exemple en raison de l'évolution des technologies pour ceux qui concernent son usage.

Le programme doit tenir compte des pratiques actuelles des enseignants tout en leur donnant le moyen d'évoluer. Le fait d'accompagner le programme de textes thématiques me paraît plus propice

¹ Cette liste ne reprend (avec modifications) que les compétences de fin de cycle et la proposition de programmation qui figurait à la fin du document d'application de 2002.

à la formation que de très longs commentaires. Mais, je le répète, il faut quand même des commentaires et c'est sans doute difficile de dégager l'essentiel pour s'y limiter.

Des pistes pour les documents d'accompagnement

Les documents d'accompagnement parus à la suite des programmes de 2002 mais aussi une partie des documents d'application de ces programmes, par exemple l'introduction commune aux documents d'application du cycle 2 et du cycle 3, constituent une bonne base de départ pour élaborer de tels documents. Dans cette introduction, les paragraphes « Parler, lire, écrire en mathématiques », « Enseignement des mathématiques et technologies de l'information et de la communication », « Différentes formes de travail », « La question du calcul aujourd'hui », « Une place centrale pour la résolution de problèmes » pourraient être revus et réorganisés pour fabriquer un ou deux nouveaux documents d'accompagnement ou s'intégrer à ceux qui existent déjà. Un autre point qui me paraît mériter de figurer dans un tel document d'accompagnement mais ne s'y trouve pas pour le moment, c'est le lien à faire dans le langage entre les manipulations, les expériences matérielles et les notions mathématiques qui les modélisent ou qu'elles représentent. Peut-être pourrait-on ajouter « agir en mathématiques » à « parler, lire, écrire... » ?

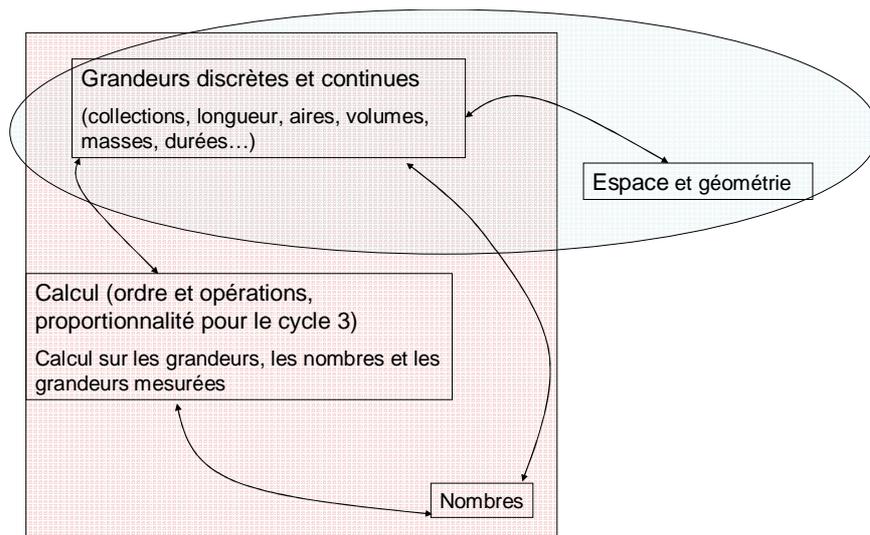
Distinguer les contenus mathématiques de l'activité mathématique

Dans les programmes de 2002 aussi bien que dans ceux de 2008, les rubriques qui structurent le programme mettent sur le même plan des éléments qui ne sont pas de même nature, par exemple « Nombres et calcul », « Organisation et gestion de données ». Je proposerais plutôt de structurer le programme par les contenus mathématiques et de mettre dans une introduction ou dans une deuxième partie, après l'énoncé des programmes eux-mêmes, une rubrique transversale sur l'activité mathématique et les outils de représentation qui concernerait tous les contenus et pourrait reprendre en partie ce qui est actuellement contenu dans les rubriques « résolution de problèmes » et « organisation et gestion des données »).

La proportionnalité relève des contenus et devrait selon moi être rattachée au calcul qui ne concerne pas que les nombres mais aussi les grandeurs.

Mettre en évidence les liens entre les contenus

Concernant, les contenus eux-mêmes, il est important de mettre en évidence les liens entre les différents domaines, par exemple sous forme d'un diagramme comme celui-ci.



En effet, les grandeurs sont en relation avec les nombres directement via la mesure mais aussi, via le calcul dans lequel j'inclus, outre les opérations, la comparaison et la proportionnalité. Le calcul concerne aussi les grandeurs sans mesure parce qu'on les additionne, qu'on les multiplie ou les divise par un entier. Par grandeur mesurée, j'entends (comme dans la thèse de Comin dirigée Brousseau) un nombre suivi d'une unité, ce qu'on appelait les nombres concrets dans les programmes de 1945.

Espace et géométrie sont reliés aux nombres via les grandeurs géométriques.

Se dessinent donc deux blocs : Grandeurs - nombres - calcul d'une part ; géométrie - grandeurs géométriques d'autre part. Les grandeurs géométriques, en particulier les aires, les angles et les volumes font partie de la géométrie ; les longueurs sont essentielles aussi bien pour la géométrie que pour les nombres.

La résolution de problèmes et les représentations

Je pense qu'il y a place dans les programmes pour une rubrique transversale concernant la résolution de problèmes et les représentations, en particulier pour souligner les différents objectifs que visent la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques : problématiser l'introduction d'une notion nouvelle, consolider les apprentissages avec des changements de contexte, utiliser les notions pour résoudre des problèmes plus complexes où il faut mettre en place une démarche de résolution avec plusieurs étapes, modéliser des situations de la vie quotidienne ou d'une autre discipline en se servant des connaissances dont on dispose déjà. Il faut des problèmes complexes qui nécessitent de la recherche et de la réflexion mais il faut aussi travailler et consolider les « briques élémentaires » qui soutiennent la pensée et la compréhension. Pour en référer aux programmes de 2002, disposer ou non d'une procédure experte pour résoudre un problème caractérise plutôt les connaissances de celui qui résout que le problème lui-même donc il me semble que, si on peut expliciter les objectifs que l'on fait jouer à la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques, il me paraît difficile de caractériser les problèmes eux-mêmes hors des rubriques de contenu où ils s'insèrent. Ainsi, si la résolution de problèmes peut apparaître dans une rubrique transversale, il me semble tout aussi indispensable que des problèmes figurent dans les rubriques de

novembre 14

contenus, y compris la géométrie. Cela n'empêche pas de considérer des problèmes complexes (de synthèse) qui mettent en jeu plusieurs contenus.

Il en est de même pour les représentations (tableaux, graphiques mais aussi représentations personnelles de problèmes) dont l'importance peut être soulignée dans une rubrique transversale mais qui doivent apparaître aussi de manière spécifique dans les rubriques de contenus quand c'est utile, par exemple pour la proportionnalité mais pas seulement. Les outils sémiotiques et le langage jouent un rôle essentiel dans l'apprentissage des mathématiques dès le plus jeune âge.

Transition école collège : polyvalence / spécialisation des enseignants

Les enseignants du primaire sont généralistes, ils enseignent toutes les disciplines et, pour la plupart d'entre eux, n'ont pas une formation très poussée en mathématiques. Les enseignants de sixième sont des spécialistes de mathématiques et ils connaissent ce qui sera attendu dans les classes ultérieures du collège dans lesquelles ils enseignent aussi.

Il faut reprendre, assurer et éventuellement réorganiser en 6^{ème} les contenus de l'école primaire, en tenant compte de ce qui a été fait et en le prenant pour appui (on ne repart pas de zéro : les élèves ont déjà beaucoup de connaissances) mais en visant une nouvelle perspective, celle de l'algèbre pour les nombres, celle de la géométrie théorique pour la géométrie. Je dis bien perspective. Pour moi, en sixième on est encore dans la géométrie physique et dans la résolution de problèmes arithmétiques. Cependant il faut aussi qu'il y ait des éléments nouveaux en 6^{ème} aussi bien concernant les nombres que la géométrie.

II. Des repères pour une progression

Concernant les contenus, je vais organiser mon propos autour de trois thèmes susceptibles de contribuer selon moi à la cohérence de l'ensemble qui suppose non seulement une continuité d'une année à l'autre mais aussi et de manière essentielle la continuité entre les différentes rubriques du programme. Je ne répondrai pas vraiment à la première question, que je trouve très difficile, mais je vais essayer de relever quelques points où des liens me semblent à faire soit entre des rubriques différentes des programmes soit entre un niveau et un autre : des changements de points de vue qui sont parfois passés sous silence parce qu'évidents pour les adultes alors qu'ils peuvent être un point d'achoppement pour les élèves.

Sur les grandeurs

Je commence par les grandeurs parce qu'elles interviennent dans les fondements des deux autres. J'étais déjà intervenue sur ce thème lors de la conférence nationale de 2012. Je vous renvoie à ce texte² que je ne reprendrai pas ici mais qui est un de mes appuis pour tenter de dégager des éléments de progression.

² <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale--perrin-glorian>

Un rôle essentiel pour fonder les opérations sur les nombres

Actuellement les grandeurs apparaissent dans l'intitulé « Grandeurs et mesures » d'une rubrique des programmes, ce qui fait que le travail sur les grandeurs semble restreint à la question de leur mesure et de la connaissance des unités du système métrique. Or les grandeurs jouent un rôle fondamental aussi dans toutes les autres rubriques du programme.

Il est en effet essentiel que les opérations (y compris les comparaisons) sur les nombres prennent sens non seulement à partir des opérations sur les collections (grandeurs discrètes) mais aussi sur les grandeurs physiques continues : les longueurs, les masses et les capacités dès le CE1 ou le CE2, les aires à partir du CM. La monnaie n'est pas une grandeur physique continue ; sa connaissance est indispensable d'un point de vue social et elle joue bien sûr un rôle dans l'apprentissage des nombres, notamment la numération, et dans la résolution de problèmes, je n'en parlerai pas plus ici. Les durées sont une grandeur continue mais leur mesure ne relève pas du système métrique, et la perception de durées régulières est difficile sans un moyen de les repérer ou de les mesurer. Cependant le repérage du temps et la quantification des durées (ce qui nécessite la considération de succession de durées égales mais s'amorce plus tôt notamment pour les jours grâce à l'alternance jour nuit) commencent dès la maternelle et se précisent au fil des années. Des conversions de durées en contexte s'effectuent assez précocement (par exemple semaines en jours) et se poursuivent au long du primaire (jours en heures, heures en minutes...). La grandeur durée va donc se conceptualiser en même temps que sa mesure.

Les grandeurs géométriques (longueur, aire, angle, volume) interviennent en géométrie dans les propriétés des objets géométriques qui représentent des objets de l'espace, des relations entre objets de l'espace, des positions ou des déplacements dans l'espace. Nous y reviendrons dans le paragraphe sur la géométrie.

Les longueurs jouent un rôle particulier dans la mesure où elles permettent de représenter toutes les autres grandeurs. En particulier, représenter les différentes grandeurs par des longueurs peut aider à la résolution de certains problèmes. De plus, sur une droite graduée, le nombre qui repère un point (il sera appelé l'abscisse du point, en 6^{ème}) est la mesure de la longueur du segment dont les extrémités sont l'origine et ce point quand on prend comme unité la distance entre 0 et 1. La droite graduée joue ainsi un rôle fondamental non seulement pour la mesure des grandeurs, pour la représentation graphique mais aussi pour la conceptualisation des nombres décimaux.

Enfin, les grandeurs interviennent de façon essentielle dans la proportionnalité qui relève actuellement de la rubrique « organisation et gestion de données ». La considération des grandeurs soutient le raisonnement.³ C'est d'ailleurs par la proportionnalité que seront introduites, pour la plupart d'entre elles au collège, des grandeurs quotient comme le débit, la vitesse ou la masse volumique. Remarquons que, dans le cas de la vitesse, il y a lieu de distinguer la vitesse d'un

³ J'en ai donné un exemple en annexe de mon texte préparatoire à la CNEM. On peut en trouver un autre dans les pages 11 à 14 de la présentation de Quilio au conseil scientifique des IREM Quilio (http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/CS_-_IREM_13_juin_2014_S_Quilio.pdf) où on voit comment les différentes procédures se rattachent à des considérations sur les grandeurs longueur et nombre de pas.

novembre 14

mouvement uniforme qui relève de la proportionnalité et peut être abordée au CM et la vitesse moyenne qui est plus complexe puisque c'est la vitesse liée à un mouvement uniforme fictif sur la même distance et pendant la même durée que le mouvement considéré. En supposant le mouvement uniforme, on peut résoudre des problèmes de vitesse sans conceptualisation de la grandeur quotient distance/durée ni des unités pour la mesurer (km/h par exemple). Les deux grandeurs peuvent être considérées séparément. Cependant, depuis 2002 au moins, dans le paragraphe « organisation et gestion de données » du programme (ou des instructions), à propos de proportionnalité, il est question de vitesse moyenne et non de mouvement uniforme, ce qui serait plus adapté. Ainsi, au cycle 3, les élèves peuvent apprendre que rouler à une vitesse constante signifie que le mouvement est régulier. Si l'on roule à une vitesse de 30 km/h par exemple (qu'il faut lire 30 kilomètres par heure et non « trente kilomètres heure » comme on l'entend souvent), cela veut dire qu'on parcourt 30 km en 1 heure, donc 60km en 2h ou 15km en 1/2h, c'est-à-dire qu'un mouvement à vitesse constante relève de la proportionnalité.

La notion d'unité

J'en viens à la notion d'unité sur laquelle je voudrais attirer l'attention parce qu'elle est essentielle et prend deux sens différents : en tant qu'unité de mesure et en tant qu'unités structurant le système décimal de numération suivant les puissances de dix (« unités de numération ») : unité, dizaine, centaine... dixième, centième... et aussi, demi, quart, tiers, cinquième..., ce qu'on pourrait plus généralement appeler « unités de nombre »

En tant qu'unité de mesure, il y a une différence entre les grandeurs discrètes et les grandeurs continues. On a une unité naturelle pour les quantités discrètes : chaque objet d'une collection vaut 1 et on peut les compter ce qui donne le nombre d'éléments de la collection. Pour les grandeurs continues, il n'y a pas d'unité naturelle ; il faut faire un choix a priori arbitraire d'une grandeur étalon dont on peut compter les reports à travers une opération physique qui dépend de la grandeur. Cela donne la mesure de la grandeur avec cette unité ou un encadrement de cette mesure.

Les deux sens d'unité doivent être traités avec attention et peuvent être reliés : pour que les calculs soient commodes, il faut disposer, pour chaque type de grandeurs, d'un système d'unités de mesure à base dix comme le système de numération.

Des repères pour une progression

Concernant la progression au long de la scolarité obligatoire, plusieurs aspects sont à envisager pour les grandeurs continues :

- identifier et travailler la grandeur sans mesure par comparaison directe, addition, en faisant le lien entre comparaison et addition, soustraction, division par un entier
- aborder la notion d'unité et de mesure par report d'une unité
- connaître les unités du système métrique et calculer sur les grandeurs mesurées dans le système métrique (c'est-à-dire des nombres suivis d'une unité du système métrique).

Dès la maternelle, la comparaison des objets amène à une première approche des grandeurs avec

novembre 14

l'introduction d'un vocabulaire spécifique : plus lourd, plus léger, plus long, plus court, plus large, plus étroit, plus épais, plus haut qui précise les notions communes de grand, gros, petit qui peuvent référer à plusieurs grandeurs ou bien à l'aire ou au volume en cas d'objets semblables de tailles différentes. Remarquons en passant que « long » et « court » renvoient aussi bien aux longueurs qu'aux durées. A travers ces comparaisons menées sur des objets, on peut déjà s'apercevoir que des objets peuvent être comparés de différents points de vue, ce qui correspond au fait qu'ils sont porteurs de plusieurs grandeurs.

Au long du primaire et du collège, la connaissance des nombres et des grandeurs peut s'enrichir mutuellement par un jeu de cadres entre les deux dans des situations où les nombres interviennent pour modéliser des situations mettant en jeu diverses grandeurs.

Pour que les grandeurs puissent soutenir le travail sur les nombres, il est nécessaire de travailler les opérations sur les grandeurs à partir de manipulations des objets qui les portent, sans passer par les nombres : les nombres interviennent alors pour rendre compte de ces opérations. Avant même qu'on sache les mesurer, les procédés matériels qu'on met en place pour comparer et ajouter les grandeurs interviennent ainsi de façon fondamentale pour construire le sens des nombres. Une première conséquence est qu'il faut aborder les entiers aussi bien à partir des grandeurs discrètes matérialisées par des collections que des grandeurs continues. Il sera essentiel de pouvoir s'appuyer sur ces acquis au moment où on introduira les décimaux.

Au cycle 2, les nombres entiers servent à comparer des collections mais aussi des longueurs : dès la fin du cours préparatoire ou au CE1, il est important que les enfants aient l'occasion d'ajouter des longueurs ou d'en faire la différence par des reports sur une droite : cela contribue de façon essentielle au sens de l'addition et de la soustraction qui ne se résume pas à des réunions ou dissociation de collections. Il en est de même pour la multiplication d'une grandeur par un entier (comme addition itérée d'une même grandeur) et la division d'une grandeur par un entier (en termes de partage ou de nombre de reports d'une même grandeur) qui peut se rencontrer dans des situations simples.

Le sens de ces opérations devra se prolonger aux rationnels et décimaux au cours du cycle 3 et de nouveaux sens (particulièrement dans le cas de la multiplication et de la division) apparaîtront dans des situations variées mettant en jeu des grandeurs continues. Si les opérations sur les entiers n'ont été rencontrées que dans le cas des collections, elles ne peuvent se prolonger que formellement.

Se pose bien sûr le problème de la désignation : quelles écritures peut-on associer à ces opérations sur les grandeurs ? Nous avons vu avec Régine Douady à la fin des années 70⁴ que des élèves de CP peuvent tout à fait utiliser des écritures symboliques pour désigner des longueurs. Je pense que c'est trop loin des pratiques usuelles des enseignants pour qu'on puisse le recommander dans un programme ; cependant, il me paraît raisonnable d'aborder les additions et soustractions sur les grandeurs au moins dans le langage oral en se référant à des longueurs d'objets concrets : par exemple la longueur de la table c'est 3 fois la longueur du cahier plus la longueur de la trousse. Des représentations diverses peuvent être utilisées dans les classes sans qu'elles soient

⁴ Ce qui est confirmé par des recherches sur l'algèbre précoce (early algebra).

institutionnalisées par un programme.

Le fait de pouvoir associer des nombres entiers à des grandeurs continues est lié au choix d'une unité, ce qui permet de discrétiser le continu : on peut ainsi compter les unités 1u, 2u etc. comme on compte des billes. Cela permet de mesurer certaines longueurs et d'encadrer les autres. On peut procéder de même avec les masses sur une balance Roberval et en prenant pour unité la masse d'un petit objet dont on dispose en de nombreux exemplaires.

Au cycle 3, les opérations sur les aires (par décomposition et recomposition) et les angles (par report) sont essentielles aussi avant qu'on puisse aborder leur mesure. Les décompositions et recompositions permettent de ramener l'aire des surfaces usuelles (sauf le disque) à celle du rectangle.

J'ai mis l'accent sur les opérations sur les grandeurs sans passer par leur mesure, mais bien sûr la mesure est importante ainsi que la connaissance des unités du système métrique. Les travaux de Chambris⁵ ont montré que les liens entre numération et étude du système métrique se sont distendus depuis les années 1970. C'est pourtant un moyen de renforcement réciproque des deux domaines. En effet, le travail sur les additions et soustractions de grandeurs est indispensable à deux niveaux, d'une part sur les grandeurs sans mesure à travers des opérations sur les objets eux-mêmes, pour donner du sens à ces grandeurs et à ces opérations, d'autre part sur les grandeurs mesurées : les écritures comme $2m + 125cm$ ont un sens et désignent bien une grandeur mais elles ne se traduisent par une addition sur les nombres que si les mesures sont exprimées dans la même unité :

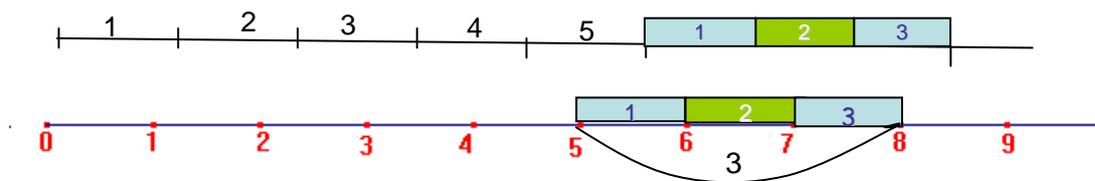
$$2m + 125cm = 200cm + 125cm = 325cm = 2m + 1,25m = 3,25m.$$

Grandeurs, nombres et graduation

La droite graduée est un outil essentiel de représentation des nombres, entiers d'abord, qui s'enrichiront des décimaux, des rationnels et des réels. Elle sert pour les autres disciplines (graduations et mesures) et la représentation des nombres par les points d'une droite est fondamentale pour l'analyse.

Plusieurs aspects sont à prendre en compte dans l'apprentissage. Déjà dans le cas des entiers, il faut voir la différence et le lien entre repères et intervalles : par report d'une unité, on peut numéroter et compter les intervalles ; le nombre s'écrit alors « au long » du segment, entre ses deux extrémités. Le report réitéré d'une même longueur sur une demi-droite permet d'obtenir une graduation. Si l'on porte des nombres sur cette graduation pour en faire une demi-droite graduée en entiers, ces nombres ne sont plus écrits sur les intervalles mais sous les points qui servent de repères.

⁵ Voir sa contribution à la conférence nationale de 2012 : <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale--chambris>



Le passage du report de l'unité à la graduation par des nombres suppose d'avoir compris le rôle du zéro pour marquer l'origine et le fait que le nombre qui est marqué à côté du point indique la mesure de la longueur du segment dont les extrémités sont l'origine du repère et le point repéré (avec pour unité la longueur du segment qui a pour extrémités les points marqués 0 et 1), c'est-à-dire la distance du point repéré à l'origine. Il faut donc voir dans un point de la droite graduée, tout le segment qui va de l'origine de la droite à ce point. Il faut aussi faire le lien entre le report d'unités à partir d'une graduation et l'addition ou la soustraction des longueurs, avec la notion de complément, d'écart et la conservation des écarts dans une translation (qui permet de comprendre la technique classique de la soustraction).

Le lien entre repérage et distance est un aspect important dont Vergnaud a montré qu'il posait encore problème aux élèves de collège : beaucoup rencontrent des difficultés dans les calculs de distance à partir des abscisses. On ne peut donc pas espérer qu'il soit acquis dès qu'on introduit la règle graduée au CE1 pour mesurer les longueurs. Cependant, c'est dès ce moment que commence cet apprentissage.

J'ai pu constater dans un stage de formation continue que des enseignants de cycle 2 trouvaient très difficile le problème suivant (annoncé comme proposé à des élèves de CM dans le cadre d'une recherche) et ne faisaient pas tous spontanément une représentation pour le traiter :

Linda et Sacha partent de l'école et vont à la piscine en prenant la même route. Linda marche. Sacha court. Au bout de dix minutes : Sacha a parcouru 900m, il est à 600m de la piscine et Linda est à 400m de Sacha.

A quelle distance de l'école, Linda est-elle au bout de dix minutes ?

A quelle distance de la piscine, Linda est-elle au bout de dix minutes ?

Quelle est la distance entre la piscine et l'école ?

Dans ce même stage, les enseignants de CE1 qui, d'une part utilisent des files numériques avec des cases numérotées, d'autre part travaillent avec leurs élèves la mesure des longueurs avec une règle graduée, n'étaient en général pas conscients du lien qui existe entre la mesure des longueurs comme mise bout à bout d'unités que l'on peut compter (on compte alors les intervalles comme les cases de la file numérique) et la lecture sur une graduation comme repérage d'une position : la différence entre 2 graduations correspond au nombre d'intervalles qui les séparent. Le travail sur des règles cassées (où le 0 est absent) dans le cas des longueurs et sur des bandes numériques⁶ qui ne

⁶ La mise bout à bout de bandes numériques peut contribuer à faire le lien entre la réunion de collections et l'addition des longueurs (voir par exemple <http://www.aider-ses-eleves.com/addition-ordinale-1> et <http://www.aider-ses-eleves.com/gestion-de-classe/deuxieme-niveau> pages 4 à 7).

commencent pas à 1 ainsi que la construction d'une graduation en entiers à partir du report d'une unité contribuent probablement à travailler ces questions. Le lien entre mesure de la longueur du segment délimité par l'origine et une graduation et le nombre écrit sur cette graduation sera essentiel pour le travail sur les décimaux ; il faut qu'il existe déjà pour une graduation en nombres entiers.

Sur espace, géométrie et grandeurs géométriques

Garder une référence explicite à l'espace

D'abord, je pense qu'il est important de garder une référence explicite à l'espace dans le titre. La partie sur l'espace a disparu des programmes du cycle 3 en 2008. Or cette partie est cruciale pour la coordination avec les autres disciplines et pour l'enseignement professionnel mais aussi pour la géométrie elle-même.

Je ne vais pas beaucoup m'étendre sur cette partie : Il y avait un document d'accompagnement sur « espace et géométrie au cycle 2 » très intéressant et très développé sur la partie espace.

Concernant le repérage dans l'espace, il s'agit de repérer des positions, des déplacements et aussi de prendre conscience de la relativité des points de vue selon la position de l'observateur. Le repérage dans l'espace s'appuie sur du vocabulaire et des outils aidant à ce repérage (par exemple le quadrillage pour se repérer sur une feuille de papier). Les programmes du cycle 3 de 2002 commencent par quadrillages, je commencerais par plans et cartes qui abordent réellement le repérage dans l'espace en lien avec la géographie alors que le quadrillage est un outil de repérage qui se limite à la feuille de papier.

Je mettrais dans les programmes l'étude des objets de l'espace et des solides avant celle de la géométrie plane parce que dans ce domaine, en primaire au moins, on reste au niveau de la perception et de la description, donc dans le domaine de la connaissance de l'espace, des formes de l'espace. En sixième, pour le parallélépipède rectangle ou pavé dont on pourrait identifier le parallélisme des faces (d'où son nom) et peut-être parler de plans parallèles en imaginant les plans supports des faces. Le fait de commencer à pointer des relations géométriques pour des objets de l'espace justifierait qu'on se limite au cube et au parallélépipède rectangle en sixième alors qu'on considère d'autres solides en primaire. Peut-on aller jusqu'à la perpendicularité d'une droite et d'un plan à propos des arêtes et des faces ? On pourrait peut-être aborder ces notions à partir de celles de droite verticale, plan horizontal, plan vertical qui font encore partie des connaissances de l'espace mais mettent des jalons pour la géométrie : on peut faire tourner l'équerre en maintenant un côté de l'angle droit sur la droite et l'autre dans le plan. On voit ici que les relations entre espace et géométrie sont au cœur des débuts de l'apprentissage de la géométrie. Comment en tenir compte dans une progression sur la scolarité obligatoire et pour le socle ?

Continuités et ruptures du CP à la cinquième

La question de la cohérence d'une progression au long de la scolarité obligatoire se pose particulièrement en géométrie.

novembre 14

De nombreux travaux ont souligné la rupture entre la géométrie du primaire, que nous appellerons géométrie physique, où la validation des assertions se fait par vérification avec des instruments et celle du secondaire, que nous appellerons géométrie théorique, où la validation se fait par des démonstrations, c'est-à-dire la déduction (par *modus ponens*) à partir d'énoncés de propriétés admises comme hypothèses et en se servant de définitions, de théorèmes établis ou d'axiomes admis. Pourtant ces deux géométries ne sont pas étrangères puisque les axiomes de la géométrie théorique sont choisis pour qu'elle puisse représenter l'espace et modéliser des problèmes de l'espace. Il y a donc des continuités à gérer entre la maîtrise de l'espace (appréhension des objets de l'espace, des positions et des déplacements dans l'espace) et la géométrie pour que les élèves puissent utiliser leurs connaissances de géométrie pour résoudre des problèmes de l'espace. Par exemple, comme le montrent les travaux de René Berthelot et Marie-Hélène Salin, des élèves qui savent dessiner un rectangle sur une feuille de papier avec les instruments de géométrie usuels ne savent pas forcément prévoir la position d'un tapis rectangulaire si on le déplace pour amener un de ses côtés sur une ligne droite tracée sur le sol non parallèle aux bords de la pièce.

Dans ce qui suit, je voudrais donner quelques réflexions sur ce qu'on peut entendre par « géométrie » à différents niveaux, que j'espère pouvoir être utiles moins pour les programmes eux-mêmes que pour des documents d'accompagnement des programmes qui fourniraient des pistes d'activités pour les maîtres. En effet, je pense que c'est peut-être dans les ruptures non gérées entre ce que l'on met derrière le mot « géométrie » et les noms des objets géométriques que se situent les difficultés.

Des repères pour une progression⁷

Si l'on regarde aux deux extrémités du cursus, le mot « géométrie » semble recouvrir des réalités bien différentes. Au cycle 1 les élèves vont reconnaître et nommer des formes, en dessiner le contour avec des gabarits. Ces formes sont des objets plats de l'espace qu'on peut déplacer, retourner, juxtaposer, superposer. Au cours du cycle 4, les élèves sont initiés à une géométrie théorique où la validation se fait par des démonstrations. Pour opérer la mutation d'un point de vue à l'autre sans rompre les liens entre les deux, *deux tournants* sont à gérer l'un au cycle 2 et l'autre au cycle 3.

En effet, pour identifier ou obtenir des propriétés géométriques, on va passer d'abord de procédures matérielles sur des objets de l'espace à des procédures matérielles utilisant des instruments et l'espace sur des figures tracées sur un support plan au cycle 2 et au début du cycle 3, puis à des procédures utilisant les instruments matériels mais sans sortir du plan vers la fin du cycle 3, avant d'arriver, au cycle 4, à des procédures portant sur des objets théoriques avec des instruments théoriques. Par exemple, pour trouver un milieu sans utiliser la mesure, on passera du pliage à la construction au compas ou à l'équerre. Pour la symétrie axiale, on passera du pliage à la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite à l'équerre ou au compas. Pour gérer ces deux tournants, il est important de travailler sur la géométrie sans mesure, tout en travaillant bien sûr parallèlement la mesure des grandeurs géométriques.

⁷ Pour plus de détails sur ma réflexion sur la géométrie, on pourra se reporter à un article qui vient de paraître dans le numéro 222 de la revue genevoise « Math-école ».

Au cycle 1

A la maternelle, on travaille la maîtrise de l'espace, celui dans lequel on se déplace et celui des objets de l'espace qu'on peut manipuler, à partir de la perception, des mouvements, du langage. Les formes planes sont appréhendées dans des activités de puzzles ou de classements. De premières représentations apparaissent : à main levée, comme trace de solides ou contours de gabarits ou de pochoirs. Des apprentissages géométriques (préparant la géométrie proprement dite) s'effectuent déjà au-delà de l'introduction d'un vocabulaire : le repérage et le respect de l'alignement de pièces, de longueurs de côtés à mettre bord à bord, la segmentation du bord d'un polygone pour en tracer le contour sans dévier.

En primaire : l'introduction des instruments et une approche évolutive des figures

Au cours du primaire, on introduit progressivement des instruments (règle puis équerre puis compas) qui permettent de contrôler et produire des caractéristiques visuelles qui se modélisent par des propriétés géométriques. Le papier quadrillé qui fournit des réseaux de parallèles et perpendiculaires permet d'obtenir certaines de ces caractéristiques visuelles en utilisant seulement une règle. Mais l'utilisation pertinente des instruments de géométrie ne demande pas que la maîtrise de techniques, elle demande à l'élève la relation de ces techniques à des connaissances géométriques et pour cela de changer aussi sa vision sur les figures : elles ne sont plus obtenues seulement à partir de surfaces qu'on assemble, mais il s'agit de construire des lignes qui délimitent le contour de ces surfaces (par exemple, construction d'un carré à partir d'un de ses côtés avec une règle et une équerre au début du CE2), voire ensuite des lignes qui ne font pas partie du contour des surfaces mais qui, par leur intersection définissent des points à partir desquels on peut construire ces contours (par exemple, construction d'un carré connaissant sa diagonale en fin de CM2 ou en 6^{ème}).

Au cycle 2 : premières propriétés d'objets vérifiables avec des instruments

Au cours du cycle 2, on perfectionne l'étude des formes en introduisant progressivement des instruments qui aident la perception. Ces instruments amènent progressivement à contrôler des lignes pour obtenir des propriétés de ces formes (surfaces). Les points n'apparaissent que comme des sommets de surfaces ou des points isolés qu'on cherche à relier par une droite puis par report d'une longueur sur une droite. L'équerre et le compas s'utilisent sur papier uni. Le papier quadrillé permet le repérage et le tracé d'angles droits avec une règle seule. En fin de cycle 2 (CE2), on peut concevoir les droites supports des bords d'une figure simple (prolonger si nécessaire) et aussi celles reliant des sommets.

Au CP et au CE1, il me semble raisonnable de se limiter à 3 instruments pour la géométrie : une règle non graduée, un outil de report de longueur (bande de papier avec un bord droit sur lequel on peut écrire) qui peut servir de « gabarit de longueur⁸ » et un gabarit d'angle droit où seuls les côtés de l'angle droit sont rectilignes (coin d'un carré ou d'un rectangle). Comme je l'ai dit dans le paragraphe sur les grandeurs, la règle graduée est un instrument de mesure ou plutôt, elle cumule un instrument

⁸ Formulation utilisée dans les programmes et documents d'application des programmes de 2002.

de tracé et un instrument de mesure, c'est pourquoi je l'écarte ici. Je ne veux bien sûr pas exclure les mesures de la géométrie, elles y ont toute leur place mais l'utilisation de propriétés géométriques sans passer par les nombres me paraît essentielle, y compris pour la construction du sens des opérations sur les nombres comme je l'ai expliqué plus haut. Par exemple, construire un carré de côté donné par un segment avec une règle⁹, un gabarit d'angle droit et un instrument de report de longueur me paraît une activité préalable à celle de construire un carré de côté 5 cm.

Au CE1, la règle doit permettre de repérer et produire des alignements de points mais aussi de prolonger des segments tracés. La bande de papier avec un bord droit permet de reporter des longueurs ; elle permet aussi de trouver le milieu d'un segment sans mesurer. Le travail des alignements commence à permettre d'imaginer la droite comme illimitée, c'est-à-dire pouvant se prolonger autant qu'on veut.

Au CE2, l'équerre du commerce de forme triangulaire peut remplacer le gabarit d'angle droit en carton et on peut introduire le compas pour tracer des cercles et commencer à travailler le lien entre cercle et distance qui se poursuivra au CM et en 6^{ème}.

Au cycle 3 : Accès progressif à une vision des figures en termes de lignes et points définis par des propriétés et reliés par des relations

Au cycle 3, les instruments vont permettre de contrôler des relations entre les supports des lignes qui constituent une figure (bords mais aussi lignes joignant des points intéressants de la figure) et de construire des points par intersection de lignes. On peut alors commencer à étudier ces relations entre lignes et points (parallélisme, perpendicularité, distance).

Au CM, la notion de perpendiculaire nécessite un changement de point de vue sur l'angle droit : avoir un angle droit est une propriété d'une surface plane. Dire que deux droites sont perpendiculaires, c'est indiquer une relation entre deux droites, dire qu'une droite est perpendiculaire à une droite et passe par un point, c'est une double relation d'une droite : avec une autre droite d'une part et avec un point d'autre part. Il y a donc des apprentissages (notamment relatifs aux relations entre des objets géométriques de dimensions différentes, une surface carrée et les lignes droites support des segments qui la délimitent, entre un point comme sommet du carré et comme intersection de ces lignes droites) à prendre en compte pour passer de la notion d'angle droit à celle de perpendiculaire.

Remarquons cependant que la première perception de l'angle droit est sans doute celle de la verticale par rapport à l'horizontale (d'ailleurs on perçoit mieux les angles droits quand on les met dans cette position), mais il s'agit alors de la perpendicularité d'une droite à un plan : une verticale est perpendiculaire à toutes les droites du plan horizontal qui passent par le point d'intersection de la droite et du plan. C'est ce qu'on observe quand on cherche les angles droits au coin d'une pièce : on voit en général 3 angles droits dans un coin et on peut faire tourner l'angle droit de l'équerre en maintenant un côté contre l'arête intersection des murs et l'autre côté contre le sol. Voir un angle droit suppose d'isoler une partie de plan dans l'espace.

Par ailleurs, je m'interroge sur la relation à faire entre parallèles et perpendiculaires et sur l'ordre

⁹ Dans ce texte, le mot « règle » sans précision signifie toujours règle non graduée.

dans lequel traiter ces deux notions. Dans les programmes du primaire, on introduit en général les perpendiculaires avant les parallèles parce qu'on prend un point de vue de construction avec l'équerre : on construit les parallèles par double perpendicularité. Pourtant la notion de parallélisme n'est pas plus complexe et se rencontre tout aussi couramment ; on pourrait l'aborder de manière indépendante sans la lier tout de suite à celle de perpendicularité. On peut tracer des parallèles sans utiliser de perpendiculaire, en faisant glisser n'importe quel côté de l'équerre (ou de n'importe quel polygone) sur une droite : c'est la conservation de la même direction. On pourrait ainsi voir séparément ce que sont des droites parallèles et perpendiculaires et, seulement dans un deuxième temps, voir comment construire des parallèles avec des perpendiculaires ou vérifier le parallélisme en traçant une perpendiculaire. Actuellement les deux notions sont en général introduites en même temps et les enfants les confondent.

Bien que mentionné comme possible dans le document d'application, avec le cerf-volant et le trapèze, le parallélogramme ne figure pas explicitement dans le programme de 2002. Il est réintroduit en 2008 et on demande à son sujet : reproduction, construction. Mais comment construire ou reproduire simplement un parallélogramme en primaire ? On peut le décomposer en deux triangles par une diagonale mais rien n'est dit à ce sujet. L'étude du parallélogramme est depuis longtemps au programme de la classe de 5^{ème} avec la symétrie centrale. Son approche en primaire, que je souhaite, me semble à relier à l'outil bande à bords parallèles, à la notion d'angle via le parallélogramme articulé et dans ses relations avec le rectangle et la notion d'aire : deux bandes à bords parallèles qui se croisent permettent de fabriquer un rectangle et beaucoup de parallélogrammes dont les côtés sont de plus en plus longs et l'aire de plus en plus grande (si les bandes sont de même largeur on a un carré et des losanges) ; si on articule un rectangle comme avec des barres de mécano, on fabrique des parallélogrammes qui ont toujours les côtés de même longueur mais dont l'aire est de plus en plus petite. La notion d'aire est une notion profondément géométrique qu'on ne peut pas réduire à sa mesure. Les formules de calcul d'aire ne peuvent se retenir que si elles se comprennent à travers les relations géométriques de décomposition et recomposition entre figures. La présence explicite du parallélogramme dans les programmes me paraît utile pour la notion d'aire mais aussi pour la symétrie axiale comme contreexemple : pour comprendre une notion il faut non seulement des exemples (le cerf-volant est bienvenu pour cela) mais aussi des contreexemples. Il permet de voir la différence entre tourner dans un plan et retourner un objet plan dans l'espace, ce qui change l'orientation.

En 6^{ème}, la géométrie commence à être enseignée par un spécialiste de la discipline qui va amorcer plus nettement la transition entre la géométrie physique et la géométrie théorique. C'est d'ailleurs ce qu'indique nettement l'introduction du programme de géométrie de 6^{ème} de 2008 où il y a un réel effort d'articulation avec le primaire¹⁰. Pourtant la manière dont cette transition peut se faire ne me paraît pas claire dans la suite du programme lui-même ni dans le choix de ce qui est laissé pour plus

¹⁰ Remarquons cependant que ce n'est pas tout à fait le cas de l'introduction générale des programmes de collège qui indique, parmi les objectifs de la géométrie « passer de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés (passage du dessin à la figure) » en oubliant complètement les instruments : on a l'impression de sauter de la maternelle au collège.

tard dans les acquisitions exigibles du socle. Ainsi, il me semble que la plupart des élèves qui entrent en sixième voient encore prioritairement les figures comme des juxtapositions de surfaces, les lignes étant les bords des surfaces ou des lignes joignant des sommets comme les diagonales, ce qui fait qu'un des enjeux est, dans la poursuite du CM, de comprendre les relations entre les lignes et les points : un point se définit par l'intersection de deux lignes, une droite se définit par deux points, un segment par deux points ou par le report d'une longueur à partir d'un point sur une demi-droite déjà tracée...

Or, par exemple, le programme reporte aux années ultérieures pour le socle « Reproduire un angle » en même temps que l'usage du rapporteur. Il me paraît quant à moi utile de distinguer le report d'un angle, opération sur la grandeur qui peut se faire avec un calque ou un morceau de papier plié qui me semble devoir faire partie du socle pour tous les élèves, de l'usage du rapporteur dont on peut différer la maîtrise. Divers niveaux seraient d'ailleurs à distinguer dans les procédures de report d'un angle : du report avec un papier plié au report avec un compas en fin de CM2, qui pourrait précéder l'introduction du rapporteur en sixième. Or, les angles d'une manière générale semblent reportés à plus tard dans le socle alors qu'ils sont compatibles avec une vision surface des figures et me paraissent devoir faire partie du socle : par exemple, il est plus facile de construire un triangle à partir d'un angle et des longueurs des deux côtés qui l'encadrent qu'à partir des longueurs des trois côtés.

De même, la symétrie axiale me semble indispensable pour comprendre et retenir certaines propriétés des quadrilatères, notamment du losange. Pourquoi la différer ? La médiatrice comme axe de symétrie d'un segment est ce qui justifie la première méthode des élèves au CE1 ou CE2 pour trouver le milieu d'un segment. D'une manière générale, il me semble contreproductif de différer dans le socle des notions qui permettent de s'appuyer sur ce qui a été fait à l'école primaire en le prolongeant.

Concernant les notations du type (AB) pour la droite ou [AB] pour le segment, il me semble qu'il faudrait complètement les exclure de l'école primaire, utiliser le mot complet à ce niveau : segment AB par exemple et réserver leur introduction à la 6^{ème}. D'une part, la notation est un raccourci qui se justifie quand la notion est bien acquise, d'autre part leur usage dans les classes du primaire est parfois erroné : on voit souvent la confusion entre le segment et sa longueur, par exemple [AB] = 5cm.

En bref, pour situer cette progression par rapport aux programmes de 2002

En primaire, je commencerais par les figures planes : reconnaissance, reproduction avant les relations et propriétés.

Je donnerais une place importante à la reproduction de figures complexes qu'il faut analyser, décomposer en figures plus simples et en lignes à construire avec les instruments.

J'inciterais à distinguer le travail sur les mesures du travail sur la géométrie. Ainsi, j'encouragerais les reports de longueurs avec une bande de papier, le pliage de cette bande pour trouver le milieu d'un segment.

novembre 14

J'encouragerais à reproduire des figures à partir d'éléments déjà donnés qui en fixent la taille plutôt que de fixer la taille par des mesures.

En un mot, je donnerais des conditions qui favorisent l'utilisation de ce qu'avec Marc Godin (voir l'article à paraître dans la revue Math-école), nous avons appelé la restauration de figure mais sans employer le mot dans le programme pour ne pas créer une mode, pour éviter un glissement des objectifs : c'est un moyen non une fin.

Je n'ai pas abordé ici la symétrie axiale qui est pourtant un objet enseigné en primaire et en sixième, sur lequel les liens à faire entre géométrie physique et théorique, dans le langage comme dans les actions, sont nombreux et importants et sur lequel j'ai réfléchi ; j'avais essayé d'apporter quelques repères pour une progression dans une conférence aux journées APMEP de Grenoble en 2011 qui a donné un texte qu'on peut trouver sur le site de l'APMEP¹¹.

Je n'ai parlé que de géométrie plane parce que je n'ai travaillé que dans ce domaine. Cela ne veut pas dire que j'accorde une moindre importance à la géométrie dans l'espace. Au contraire mais, si le travail sur la visualisation et la représentation de l'espace est essentiel aussi bien pour la construction de connaissances spatiales que géométriques, la conceptualisation géométrique de l'espace passe beaucoup par l'identification de plans et de relations dans des plans de l'espace.

Je n'ai pas parlé non plus de géométrie dynamique parce que je n'ai pas spécialement réfléchi à la question mais des travaux ont été faits à ce sujet et d'autres intervenants les mentionneront sans doute. La géométrie dynamique, avec des situations bien adaptées, est un des moyens de gérer les relations entre géométrie physique et géométrie théorique.

Les grandeurs géométriques

Les *longueurs* et les *angles* interviennent de façon fondamentale dans la reproduction de figures géométriques, indépendamment de leur mesure, c'est pourquoi il faut appuyer la géométrie sur la reproduction de figures complexes et pas seulement identifier et apprendre les propriétés qui caractérisent les figures géométriques remarquables (qui ont un nom).

Il faut aborder bien sûr aussi leur mesure : dès le CE1 pour les longueurs et la travailler en relation avec les nombres ; en sixième pour les angles. J'ai indiqué dans le paragraphe sur les grandeurs, des étapes pour une progression sur les grandeurs continues qui valent pour les grandeurs géométriques.

Les aires

Les programmes de 2002 reprennent assez bien la progression que nous avons mise au point avec R. Douady mais ne mettent pas en évidence les étapes (et donc les raisons) de la progression qui sont les suivantes : Aire sans mesure pour construire la grandeur aire ; Unité d'aire et mesure de l'aire comme grandeur unidimensionnelle (par pavage) ; Lien entre unités d'aires et unités de longueur.

¹¹ http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Perrin_Glorian_2.pdf

Ils n'insistent pas suffisamment sur la notion d'unité avec les deux étapes qu'elle comporte : unité qu'on reporte (aire comme grandeur unidimensionnelle) et unités du système métrique dérivées des longueurs (aire comme grandeur bidimensionnelle). Il faut en effet distinguer l'unité d'aire de sa forme dans les deux cas ce qui est plus difficile que pour les longueurs.

Je pense de plus qu'il faut un travail explicite sur le cm^2 et la fabrication sur du papier à petits carreaux de surfaces de formes différentes et ayant une même aire donnée en cm^2 (1cm^2 mais aussi 24cm^2 par exemple) parmi lesquelles des rectangles et des triangles pour que les élèves puissent faire le lien entre le pavage et les unités de mesure.

Il faut aussi relier les formules aux transformations géométriques des surfaces : rectangle, triangle rectangle, triangle.

Les volumes en 6ème

Il y a le même travail à faire sur la tridimensionnalité du volume du parallélépipède rectangle qu'au CM sur la bidimensionnalité de l'aire et il est un peu plus complexe : il faut voir le volume comme le produit de trois longueurs mais aussi comme le produit d'une aire par une longueur. Ce travail sur la tridimensionnalité du volume du parallélépipède rectangle comprend notamment l'effet de la multiplication ou de la division par un entier d'une seule dimension, de deux dimensions, des trois dimensions ainsi que la relation entre les unités de longueur, d'aire et de volume.

Agrandissements et réductions

On relie en général les agrandissements et réductions à la proportionnalité mais je pense qu'il est important de les traiter aussi géométriquement et de faire le lien avec la triangulation et la conservation des angles :

Si on conserve les angles d'un triangle, on conserve sa forme : en reportant deux des angles d'un triangle aux extrémités d'un segment, et du même côté de ce segment, on obtient un triangle de même forme.

Pour un polygone de plus de 3 côtés, ce n'est pas vrai (penser au rectangle !) : la conservation des angles ne conserve pas la forme mais on peut décomposer un polygone en triangles et si on conserve les angles des triangles de la décomposition, on conservera la forme du polygone.

Je pense qu'on pourrait savoir reproduire un triangle à partir de la décomposition en deux triangles rectangles ou à partir des reports de longueurs et d'angles (avec un calque) au CM et réserver la construction au compas (intersection de lignes) à la sixième.

On pourrait ainsi reprendre en sixième la question de la reproduction de triangles : un côté entre deux angles, un angle entre deux côtés ou 3 côtés : il faut alors le compas.

Sur les nombres et le calcul

L'enseignement des nombres comprend l'usage des nombres dans des situations, pour résoudre des problèmes, le nom des nombres (oral, écriture en lettres), l'écriture en chiffres dans le système

novembre 14

décimal de numération ou sous forme de fraction dans certains cas, les opérations sur les nombres et le calcul dans lequel j'inclus le calcul sur les grandeurs unidimensionnelles (longueurs, masses, contenances, durées). Ces divers aspects ne peuvent se juxtaposer : ils doivent interagir et se nourrir l'un l'autre.

En primaire, les nombres dont il s'agit sont essentiellement les entiers et les décimaux. Les fractions ont une place à part, intermédiaire entre nombre et écriture de nombre : celles qui ne représentent pas des entiers ou des décimaux n'auront vraiment statut de nombre que quand on aura introduit la notion de nombre rationnel¹² ainsi que la comparaison et les opérations sur ces nombres.

Je n'aborderai que très peu les nombres entiers et en particulier la numération : je partage à ce sujet les options développées dans le texte de Christine Chambris. Je me contenterai de souligner quelques points qui entrent en résonance avec ce que j'ai dit sur les grandeurs et qui me paraissent importants pour la cohérence d'ensemble et la gestion des ruptures nécessaires. J'y reviendrai après avoir regardé le cas des décimaux qui me paraît un enjeu majeur du cycle 3. Parmi les continuités et ruptures à envisager concernant les liens entre entiers et décimaux, je m'arrêterai un peu sur deux outils sémiotiques importants, en particulier pour les décimaux : le tableau de numération et la droite graduée déjà abordée dans le paragraphe sur les grandeurs.

Sur les décimaux :

Les programmes anciens appuyaient fortement les décimaux sur le système métrique et le changement d'unités. Des erreurs résistantes liées à cette approche ont été identifiées par les premiers travaux de didactique, en particulier le traitement comme deux entiers juxtaposés de la partie entière et de la partie décimale pour la comparaison et pour les opérations. Depuis les années 80, l'introduction des décimaux se fait en général à partir des fractions décimales, après l'introduction de quelques fractions ordinaires simples (demis, tiers, quarts) principalement dans des situations de partage. Je reviendrai sur ce point.

Écritures à virgule et nombres décimaux

Les élèves peuvent rencontrer dès le CE2 des écritures à virgule pour exprimer des mesures de la vie courante (euros, kg, litres, mètres) et les traiter dans des problèmes par des changements d'unités. On n'a pas pour autant introduit les nombres décimaux.

Je ne pense pas que cette utilisation contextualisée de nombres à virgule se constitue en obstacle à l'apprentissage des décimaux si on en reste à une imprégnation sans institutionnalisation prématurée de vocabulaire et de techniques.

Double fondation : le principe de la mesure avec une unité et la numération en base dix

Quelle que soit la manière d'introduire les décimaux, je voudrais souligner le double lien qu'il me paraît important de faire avec la mesure des grandeurs (des longueurs en particulier) d'une part et avec la numération en base dix d'autre part.

¹² Le mot n'apparaît plus dans les programmes de collège actuels (sauf en 3^{ème} dans les objectifs et dans un titre), on les appelle « nombres en écriture fractionnaire » ; ils apparaissent en 6^{ème} et leurs opérations en 5^{ème} et 4^{ème}.

Concernant le lien avec la mesure des longueurs, un point crucial me semble être celui de la droite graduée. Si l'on limite les décimaux aux changements d'unités dans les unités usuelles (jusqu'au millimètre), on reste effectivement dans les entiers et on peut comparer les nombres décimaux comme des entiers à condition qu'ils soient écrits dans la même unité, il faut alors se ramener à la plus petite unité, par exemple pour 12,3m et 12,25m, il faut aller jusqu'aux cm et comparer 12,30 à 12,25. On ne travaille pas alors sur les nombres eux-mêmes mais sur les grandeurs mesurées (avec éventuellement la longueur comme grandeur modèle qui sert de référence pour les autres). Avec ce point de vue, il va être difficile de concevoir la poursuite du processus et, par exemple la densité de l'ordre sur les décimaux qui est une propriété en rupture avec l'ordre des entiers qui est discret. Or l'ordre est une propriété importante pour les décimaux étant donné qu'ils permettent de donner des valeurs approchées aussi précises qu'on veut de n'importe quel nombre réel, propriété cruciale pour l'analyse. On s'intéressera aux valeurs approchées de rationnels dès le début du collège (et même dès le primaire pour certains d'entre eux) et aux racines carrées, premiers irrationnels, rencontrés en 3^{ème}. C'est donc non pas la mesure des longueurs avec les unités du système métrique et les changements d'unité mais le principe de la mesure avec une unité fixée qui aide à la conceptualisation des décimaux : ce n'est pas l'unité qui change mais l'ensemble des nombres qu'on enrichit pour rendre compte des mesures entre deux entiers : on introduit de nouveaux nombres avec les fractions et on introduit de nouvelles unités de numération pour les décimaux.

Concernant le lien avec la numération, il est essentiel et suppose d'avoir bien compris les relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines...) pour les prolonger du côté des dixièmes, centièmes etc. : il faut dix dixièmes ou cent centièmes pour faire une unité, donc dix centièmes pour faire un dixième... et aussi cent dixièmes pour faire une dizaine... On a ainsi un tableau de numération qui peut se prolonger indéfiniment des deux côtés avec des unités qui se multiplient par dix en allant vers la gauche et se divisent par dix en allant vers la droite : pour deux unités voisines, celle qui est à gauche vaut dix fois celle qui est à sa droite (et donc celle qui est à droite vaut un dixième de celle qui est à sa gauche). Il devient alors nécessaire d'avoir un moyen de repérer l'unité, de marquer sa place. C'est le rôle de la virgule qui fixe l'ordre de grandeur.

Ruptures et continuités avec les entiers

En résumé, il est important de donner un poids égal à deux aspects fondamentaux des décimaux :

- ce qui est en rupture avec ce qu'on sait sur les entiers, notamment la densité de l'ordre ;
- ce qui est en continuité avec ce qu'on sait sur les entiers, c'est-à-dire la structuration en base dix de l'écriture des nombres. C'est ce qui permet de prolonger facilement les techniques opératoires (y compris les comparaisons) moyennant la compréhension du système d'écriture.

Dans le système d'écriture en base dix, il faut mettre en valeur ce qui relie et différencie entiers et décimaux :

- on peut avoir des unités de compte (en puissances de dix) aussi loin qu'on veut à gauche pour les entiers, dans les deux sens pour les décimaux.
- on ne peut exprimer en mots que les premières : centaines, millions... centièmes millièmes...

novembre 14

millionièmes... mais on peut imaginer que cela continue sans fin sur l'écriture en chiffres et en fractions décimales.

Multiplication et division par dix

Les multiplications et divisions par dix des décimaux donnaient régulièrement lieu à beaucoup d'erreurs dans les évaluations de début de 6^{ème} des années 90 et je ne suis pas sûre que les résultats actuels soient meilleurs. Actuellement, les règles utilisées usuellement pour la multiplication et la division par dix se formulent différemment dans les entiers et dans les décimaux. Or on pourrait faire le lien entre les deux, voire unifier ces règles au moment où on les travaille sur les décimaux.

En effet, quand on multiplie par dix, avec chaque unité de numération on peut faire une unité d'ordre immédiatement supérieur (des centaines avec les dizaines etc.) donc cela revient à décaler les chiffres d'un rang vers la gauche dans le tableau de numération, en mettant un zéro au rang des unités s'il se trouve vide. Quand on divise par dix, chaque unité d'un ordre donne une unité de l'ordre immédiatement inférieur, ce qui revient à décaler les chiffres d'un rang vers la droite et à mettre une virgule au rang des unités si elle n'y figurait pas déjà (en la précédant d'un 0 si le rang des unités est vide). Ce n'est pas la virgule qui se déplace (elle reste toujours au rang des unités), ce sont les chiffres. Cette formulation a l'avantage d'unifier ce qui se passe pour les entiers et décimaux. Je pense qu'il est difficile de l'utiliser dès l'introduction de la multiplication au cycle 2 mais on peut dès ce moment dire : quand on multiplie par dix, les unités deviennent des dizaines, les dizaines des centaines... parce que dix unités c'est une dizaine, dix dizaines c'est une centaine, tous les chiffres se décalent vers la gauche et on met un 0 à la place des unités. En tout cas, il me semble nécessaire de reprendre les multiplications et divisions par dix dans les entiers au moment où on les étudie dans les décimaux en montrant la cohérence : la nouvelle prolonge l'ancienne.

Règles de comparaison

Dans les décimaux, un des points de rupture avec les entiers concerne l'ordre. En particulier, dans les entiers, on peut se fier au nombre de chiffres pour conclure sur l'ordre de deux nombres. Dans les décimaux, le nombre de chiffres à gauche de la virgule permet de conclure mais ce n'est pas le cas à droite de la virgule.

Pour comparer deux nombres qui n'ont pas le même nombre de décimales, on a deux techniques :

- Soit se ramener à une même unité (dixième, centième...) et on peut alors comparer les nombres comme dans les entiers, notamment en se fiant à leur nombre de chiffres
- Soit comparer les premiers chiffres qui diffèrent (en partant de la gauche) par exemple 2,48 et 2,6 : 8 centièmes c'est moins que 1 dixième donc 4 dixièmes et 8 centièmes c'est moins que 5 dixièmes donc que 6 dixièmes.

Cependant, quand on traite de la comparaison, on peut aussi mettre en avant la continuité en revisitant les règles de comparaison des entiers :

novembre 14

- la première technique consiste à se ramener à la même unité, souvent l'unité « simple » : si on compare 12 dizaines et 25 unités, il faut comparer 120 unités et 25 unités ; mais on pourrait dire aussi que dans 25 unités, il y a moins de 3 dizaines donc moins de 12 dizaines.

- la deuxième technique consiste à regarder la plus grosse unité qui diffère : dans 12 dizaines ou 120 unités il y a 1 centaine, il n'y en a pas dans 25 unités.

Le tableau de numération : un outil pour comprendre les relations entre les unités du système de numération ?

Quand on parle de tableau de numération, il faudrait mettre le pluriel. En effet, celui dont j'ai parlé plus haut, notamment à propos des multiplications et divisions par dix dans les décimaux demande de n'écrire qu'un chiffre par case et de mettre un zéro dans une case vide qui se situe à droite d'une case occupée pour la partie entière ou à gauche d'une case occupée pour la partie décimale. Or, comme on peut le voir dans les exemples ci-dessous, le tableau peut être utile pour les conversions et pour comprendre l'addition à condition de ne pas respecter ces règles.

	m	c	d	u
				3456
=			345	6
=		34	5	6
=	3	4	5	6
=	3	4		56

	m	c	d	u
	3		4	5
+			53	
+	4	5		12
=	7	5	57	17
=	7	10	8	7
=	8	0	8	7

Dans les classes (voir par exemple la thèse de Tempier soutenue en novembre 2013), ces règles sont mises en avant (dans le cas des entiers), ce qui fait que le tableau est souvent utilisé non comme un instrument de travail pour aider à faire des conversions mais comme une présentation de l'écriture chiffrée. Or les règles « un seul chiffre par case » et « toutes les cases à droite d'une case occupée doivent être occupées aussi, quitte à y inscrire un 0 » sont justement les règles qui permettent d'écrire le nombre sans les colonnes du tableau. Tant que les colonnes sont présentes avec leur entête, on peut écrire dans les cases un nombre d'unités quelconque et faire des conversions par exemple dans des lignes successives pour arriver à l'écriture canonique qui permet de se passer du tableau. L'usage du tableau comme outil de conversion se rencontre pour les mesures du système métrique mais rarement pour les nombres. Je conçois qu'il y ait un risque d'erreur dans le passage à l'écriture chiffrée avant la fin des conversions mais ne se prive-t-on pas alors d'un outil qui aide justement à réaliser ces conversions et à comprendre les relations entre les unités ?

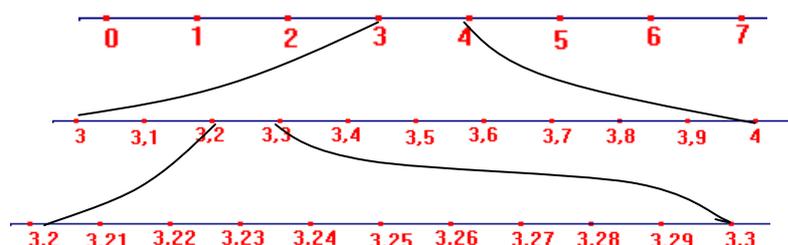
La droite graduée

Nous avons déjà dit dans le paragraphe sur les grandeurs que la droite graduée est un lien entre la longueur et les nombres. Par la suite, elle pourra se prolonger à gauche pour inclure les abscisses

novembre 14

négatives au cycle 4.

Elle est essentielle pour synthétiser les ruptures et continuités entre entiers et décimaux, par le lien qu'elle permet entre placement sur un axe gradué et mesure de longueur, entre ordre et mesure des longueurs. De plus, le raffinement des graduations permet d'approcher la densité de l'ordre en imaginant des grossissements à la loupe.



Le sens de la multiplication

Un dernier point que je voudrais aborder est celui du sens de la multiplication (et donc de la division). Dans les situations, la multiplication prend des sens différents dont je ne ferai pas l'inventaire et qui sont parfois difficiles à relier pour les élèves. Le sens d'addition répétée de la multiplication dans les entiers peut s'étendre facilement aux décimaux dans le cas où le multiplicande est une grandeur continue mesurée ou la mesure d'une grandeur mais dans ce cas, le multiplicateur est un entier sans dimension (nombre de fois où on reporte la grandeur). Depuis 2002 (peut-être même 1995), on réserve à la 6^{ème} le produit de deux décimaux en n'abordant au CM que la multiplication d'un décimal par un entier. Cependant, les deux situations suivantes : 3kg de prunes à 3,15€ par kg ou 3,15 kg de prunes à 3€ par kg, conduisent à la même opération sur les nombres (une fois acceptée la commutativité de la multiplication) mais ne sont pas équivalentes du point de vue du sens de la multiplication sur les grandeurs : dans le premier cas, le sens de l'addition répétée s'étend facilement ; dans le deuxième cas, il faut vraiment considérer la proportionnalité : par exemple, si les prunes coûtaient 1€ par kilo, je paierais 3,15€ mais elles coûtent 3€ par kilo donc le prix est trois fois plus élevé, ou bien, il faut considérer le prix d'un centième de kg. Déjà dans les entiers, la commutativité de la multiplication n'est pas évidente et il faut dénombrer le nombre de cases de grilles rectangulaires pour se convaincre qu'en prenant n'importe lequel des deux nombres comme multiplicande et l'autre comme multiplicateur, on obtient bien le même résultat. Pour les décimaux, les aires de rectangles donnent aussi une situation naturellement commutative qui correspond à un produit de grandeurs mesurées. On peut relier cette situation à la proportionnalité en considérant des rectangles avec une dimension fixée. Cependant, si les nombres prennent leur sens progressivement dans des situations où ils opèrent sur des grandeurs comme mesure ou comme coefficient de proportionnalité, ils auront vraiment acquis leur statut de nombres quand les opérations sur ces nombres permettront de traiter des situations très différentes, indépendamment du sens qu'ils y prennent. C'est toute la puissance des mathématiques de faire abstraction des situations mais cela ne peut se faire que progressivement et l'enseignement doit y être attentif.

novembre 14

Concernant une possible progression, il me semble qu'on peut, dès le CE2, rencontrer des écritures à virgule qui correspondent à l'usage social du système métrique ou de la monnaie : 3,250kg ; 12,500m ; 3,45€. Cela ne veut pas dire pour autant qu'on introduit les nombres décimaux à ce niveau. Pour le CM, la progression indiquée dans le document d'application du programme de 2002 me semble raisonnable et il me semble qu'il y avait un vrai effort d'articulation avec ce programme dans le programme de 6^{ème} de 2008.

Sur les fractions

Le mot « fraction » ne devrait à mon avis pas apparaître dans un grand titre du programme tout en faisant l'objet d'un paragraphe, parce que l'objectif, c'est bien les décimaux. Seuls les décimaux devraient donc apparaître dans le titre selon moi.

Un statut ambigu entre nombre et écriture

Les fractions ont un statut ambigu : tantôt une écriture quand on les simplifie, tantôt un nombre quand on les ajoute. Le nombre c'est le rationnel qui relève du collège. Cependant, au collège, dans les programmes de 2008, on parle de « nombres en écriture fractionnaire ». A l'école primaire, « les fractions sont essentiellement introduites pour donner sens aux nombres décimaux », comme le disaient les programmes de 2002. Le programme du primaire de 2008 pourrait laisser croire qu'on doit faire beaucoup plus quand il indique « somme de deux fractions décimales ou de deux fractions de même dénominateur ». Cependant il parle de fractions « simples » sans préciser, sauf dans le tableau de répartition où il indique au CM1 « Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième ». Ainsi les fractions simples se limiteraient aux demis, quarts, tiers et les fractions décimales aux dixièmes et aux centièmes, du moins au CM1. En fait le programme de 2008 reprend les tableaux de répartition à l'intérieur du cycle de la fin des documents d'application du programme de 2002 en y ajoutant la somme de fractions décimales ou de même dénominateur. Une étude de manuels du primaire, réalisée l'an dernier dans le cadre d'un mémoire de master, montre une grande diversité dans les situations utilisées pour introduire les fractions. Le sens fraction de grandeur (par exemple, prendre les deux tiers de quelque chose) n'apparaît pratiquement pas.

Si l'on regarde le programme de 6^{ème} de 2008, il paraît bien dans la continuité de celui du CM mais il semble que dans les manuels aussi bien que dans les pratiques des classes, cette continuité et cette cohérence ne soient pas réellement mises en pratique.

Le principe du fractionnement de l'unité pour comprendre les fractions décimales

Concernant les fractions, il me semble raisonnable de se limiter à l'école primaire (CM1, CM2) à quelques fractions dans le cas des longueurs, des aires (surfaces) et de quelques situations de la vie courante.

Ce qu'il me paraît important d'établir et de retenir à ce niveau, c'est la notion de quantième et le rapport des quantième à l'unité, c'est-à-dire le fait qu'il faut n fois $\frac{1}{n}$ pour faire 1 : 2 fois $\frac{1}{2}$; 3 fois $\frac{1}{3}$ 10 fois $\frac{1}{10}$ et qu'une fraction de type $\frac{p}{n}$ est une somme répétée : p fois $\frac{1}{n}$. Bien sûr p peut

novembre 14

tout à fait être plus grand que n et il est indispensable de considérer ce cas.

Le lien avec la division peut se rencontrer dans des situations en primaire et n'être institutionnalisé qu'en 6^{ème}. Il en est de même pour les rapports rencontrés, par exemple, dans des situations de proportionnalité. La manière de nommer les fractions (quarts, tiers, dixièmes...) est liée au partage de l'unité qui me paraît pour cette raison la première situation pour introduire les fractions. Le langage des fractions ($4/5$ se lit en général *quatre cinquièmes*) correspond à cette approche et non à celui de la division directe du numérateur par le dénominateur.

Il faut noter que l'oralisation du type « 4 sur 5 » pour $4/5$ devrait dans la mesure du possible être évitée parce qu'elle peut renvoyer à l'idée de 4 parmi 5 qui est incompatible avec des fractions plus grandes que 1 : si on prend 4 parts sur 5, c'est qu'on n'a que 5 parts, on ne peut pas en envisager une sixième. Dans les situations de type rapport où elle peut paraître adaptée, elle pourrait être remplacée par *4 pour 5*.

Il y a donc une grande différence à définir les quantités par rapport à l'unité puis les ajouter et définir directement $\frac{p}{n}$ comme je partage en n et je prends p parts.

En sixième, on pourrait peut-être introduire le terme « nombre rationnel » en disant qu'un quotient de deux entiers est un nombre rationnel, que tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels mais qu'il y a des nombres rationnels qui ne sont pas décimaux et en donner des exemples.

Sur les entiers

A ce que j'ai dit plus haut sur la multiplication, notamment concernant son sens comme addition répétée ou produit cartésien et sa commutativité, sur la multiplication et la division par dix, en lien avec les unités de numération et le tableau de numération, j'aurais voulu ajouter quelques remarques que je ne développerai pas :

La numération

Concernant la désignation des nombres, il faut bien sûr travailler la désignation orale et la désignation chiffrée, mais aussi refaire une place conséquente à la désignation en nombre d'unités, dizaines, centaines...

Pour que cette désignation puisse vivre à l'écrit, il faut des abréviations. Je serais d'avis d'en introduire seulement pour unités, dizaines, centaines, milliers : u, d, c, m pour favoriser le travail des conversions au CE1 et au CE2. Au-delà et pour les décimaux, j'écrirais en toutes lettres, par exemple 375 millions 689 mille 402 unités, 81 centièmes. L'écriture mixte de ce type en chiffres et lettres est plus courte que celle des puissances de dix avec tous les 0.

Il faudrait aussi attirer l'attention des enseignants sur les liens à faire au cours des manipulations d'un matériel entre le langage du matériel et le langage symbolique qui, seul, sera indépendant du contexte.

novembre 14

C'est un travail de numération de travailler la multiplication et la division par une puissance de dix des « nombres ronds » : 10 fois 1 dizaine c'est 1 centaine ; donc 10 fois 5 dizaines, c'est 5 centaines ; 5 dizaines fois 10 c'est pareil, c'est aussi 5 centaines ; 5 centaines divisé par 10 c'est 5 dizaines...

Les techniques opératoires sont l'occasion d'utiliser et de renforcer la numération.

Le calcul sur les durées est aussi un moyen de renforcer la numération par les conversions qu'il nécessite.

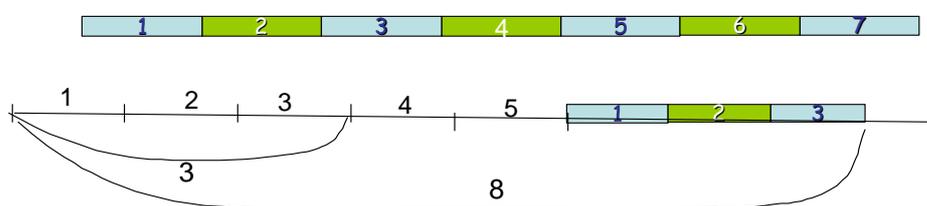
Le CP

Pour le cycle 2 et particulièrement le CP, la thèse d'Eric Mounier a montré que les pratiques actuelles reposent essentiellement sur l'oral. Or, l'appui sur l'oral et le comptage ne suffisent pas. Il est nécessaire de mettre en relation la numération orale (dont Mounier a montré différents fonctionnements possibles) et la numération chiffrée. En effet, la numération chiffrée ne dérive pas de la numération orale : écrire en chiffres et nommer sont deux apprentissages à mener et à relier par le travail sur la dizaine et les noms des dizaines. Les irrégularités des noms des nombres en français rendent ces relations peu transparentes et elles ne peuvent aboutir qu'au CE1 lorsqu'on aborde la centaine et les nombres à 3 chiffres : on a alors plus de neuf dizaines. Cependant il est essentiel de les travailler dès le CP.

Les travaux de Liping Ma ont montré l'importance d'une connaissance approfondie des petits nombres (jusqu'à 20), c'est-à-dire leurs décompositions (cela inclut les tables d'addition mais pas seulement). Un point important dans cette connaissance est le lien entre addition et comparaison, entre successeur et ajout de 1, prédécesseur et retrait de 1.

Le travail de la dizaine est essentiel aussi pour la suite du travail sur la numération. En particulier, la difficulté est de voir une dizaine à la fois comme un tout qui peut servir d'unité de compte (1d, 2d, 3d) et comme composée de dix unités : 6 dizaines c'est 60 ; $3d + 2d = 5d$ donc 50. Les décompositions faisant intervenir les dizaines et les compléments à la dizaine sont donc aussi essentielles pour que la dizaine puisse devenir une unité de compte (voir contribution de C. Chambris).

Le lien entre mise bout à bout de longueurs et sauts sur une droite repérée peut aussi commencer à se faire dès le CP et se poursuivre au CE1.



Le calcul

Le calcul commence avec ce qu'on appelait autrefois le *sens des opérations*, c'est-à-dire relier les signes opératoires et les mots qui les désignent à la résolution de problèmes,

Le calcul mental et le calcul réfléchi (l'expression a malheureusement disparu en 2008 et il me paraît

novembre 14

judicieux de la rétablir) sont très importants. Le calcul mental et le calcul réfléchi contribuent à la connaissance des nombres mais aussi à la représentation des problèmes et bien sûr, ils sont utiles dans la vie quotidienne et, encore plus avec la calculatrice pour contrôler les ordres de grandeur et détecter ainsi les éventuelles erreurs de frappe.

Je pense qu'en lien avec la numération, il faudrait aussi travailler en calcul mental les multiplications et divisions par 10, 100, 1000 : c'est fondamental pour repérer les ordres de grandeur.

L'importance du calcul mental et du calcul réfléchi est un aspect bien développé dans les programmes de 2002 et le document d'accompagnement ; cela dépasse la mémorisation des tables sur laquelle insistent surtout les programmes du cycle 3 de 2008.

L'apprentissage des tables de multiplication est néanmoins une nécessité : elles sont indispensables pour le calcul mental et libèrent de la place en mémoire pour les résolutions de problèmes : si l'on doit retrouver des résultats, cela mobilise une partie de l'attention qui pourrait être mieux employée. Les jeunes enfants ont de grandes capacités de mémorisation, qui ne seront plus aussi bonnes quelques années plus tard.

Les techniques opératoires : je pense que leur apprentissage est toujours indispensable parce que c'est une des occasions de comprendre et d'utiliser le système de numération. Elles font partie de la culture et on doit aussi pouvoir ne pas être complètement dépendant des machines ou au moins pouvoir comprendre et contrôler leurs résultats. Cependant bien sûr, il n'est pas utile de faire preuve de virtuosité pour faire rapidement de grandes opérations comme cela pouvait l'être dans ma jeunesse.

La calculatrice : Je pense néanmoins que la calculatrice ne doit pas être trop tôt à la disposition des élèves et qu'on doit en faire un usage contrôlé, notamment dans des situations où elle joue un rôle dans l'apprentissage parce qu'elle pose un problème différent de ceux qu'on peut poser sans calculatrice, par exemple pour travailler spécifiquement des connaissances sur la numération ou les techniques, ou dans des problèmes qui nécessitent beaucoup de calculs et où elle peut libérer du calcul posé, par exemple des problèmes d'approximation dans les décimaux. Sur ce point aussi il y avait un document d'accompagnement.