# Olympiades académiques de première 2009

# Sujets nationaux

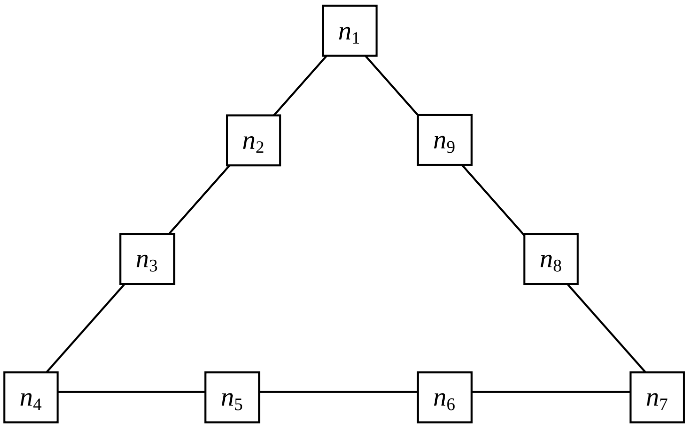
## Exercice 1

**Partie A : Questions préliminaires :**

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
**1-** Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
**2-** Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

**Partie B : Les triangles magiques :**

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

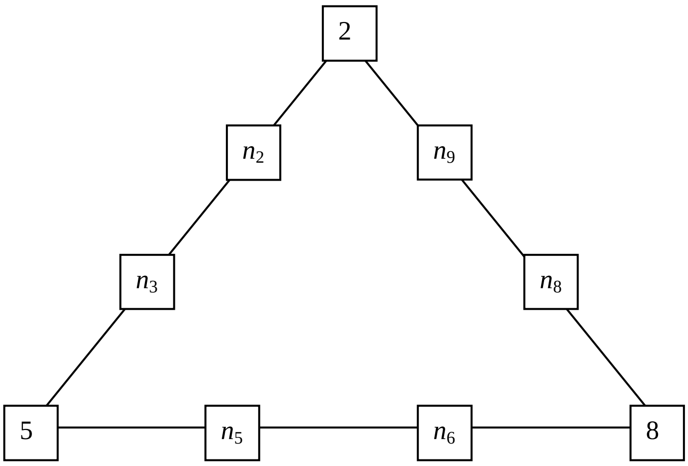



Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \ = \ n_4 + n_5 + n_6 + n_7 \ = \ n_7 + n_8 + n_9 + n_1 \ = \ S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de $S$.

**1-** Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire $S$-magique de somme $S$ = 20.




**2-** On considère un triangle $S$-magique et on appelle $T$ la somme des nombres placés sur les trois sommets.
- **a.** Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
- **b.** En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
- **c.** Donner la liste des couples $(S , T)$ ainsi envisageables.

**3-** Proposer un triangle 17-magique.

**4-** Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

**5-** **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.

**b.** Proposer un triangle 19-magique.

**6-** Prouver que, s'il existe un triangle *S*-magique, alors il existe aussi un triangle (40 - *S*) -magique.

**7-** Pour quelles valeurs de *S* existe-t-il au moins un triangle *S*-magique ?

--------------------------------

***<u>Éléments de correction :</u>***

**Partie A**

**1-** Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)

**2-** Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

**Partie B :**

**1-** Triangle 20-magique :

2
7 1
6 9
5 3 4 8

**2- a.** $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

**b.** $\frac{6+45}{3} \leq S \leq \frac{24+45}{3}$

**c.** (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

**3-** Triangle 17-magique :

1
8 4
6 9
2 5 7 3

**4-** Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.

Aucun des trois nombres $n_1$, $n_4$, $n_7$ n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.

Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où

$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.

(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

**5- a.** Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.

Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

**b.** Triangle 19-magique

7
4 1
5 9
3 8 6 2

**6-** Il suffit de remplacer chaque $n_i$ par $10 – n_i$ ; les sommes sont alors remplacées par 40 – *S* et les $10 – n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle *S*-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).

18 n'est pas *S*-magique. Donc 22 ne l'est pas non plus.

# Exercice 2 :

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

**1-** Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter $c$ la longueur du côté du losange.

***Les questions suivantes sont indépendantes.***

**2-** Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

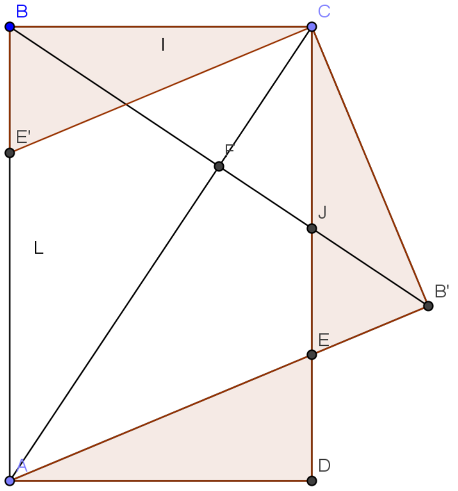
**3-** On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

**4-** À partir d'une feuille de longueur $L$, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de $L$, la largeur $l$ de la feuille de départ.

**5-** Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

--------------------------------

***Eléments de correction :***




**2-** Sachant que AE'CE est un losange on a :
$(16-c)^2+8^2=c^2$ soit $c = 10$

**3-** On a nécessairement : $(L-7{,}5)^2+l^2=7{,}5^2$ avec $L \geq 8$
soit : $l^2=L(15-L)$
d'où les seules réponses entières : $L$=12 et $l$=6.
Et ces deux dimensions conduisent à un losange de côté 7,5 cm.

**4-** Sachant que AE'CE est un losange, on a ED=E'B donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.

D'où l'égalité : $(L-c)l=0{,}25Ll$ d'où $c=0{,}75L$

**5-** Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE'=CE et AE=AE'
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').