

SESSION 2012

AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : SCIENCES PHYSIQUES
Option B : CHIMIE

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

L'interaction gravitationnelle

Introduction

Des quatre interactions fondamentales, la gravitation nous est la plus familière. Sur la Terre, ses manifestations sont diverses : la chute des corps, le phénomène des marées, etc... Paradoxalement, elle est aussi la plus énigmatique des interactions d'un point de vue fondamental. Depuis qu'Einstein a établi la théorie de la relativité générale vers 1915, on sait en effet que la gravitation est une force de nature "géométrique" intimement liée à la déformation et à la structure de l'espace-temps, ce qui lui confère un statut très différent de celui des trois autres interactions. Elle régit la dynamique des grandes structures de l'Univers (étoiles, galaxies et autres objets astrophysiques) et la dynamique de l'Univers lui-même dont on sait aujourd'hui qu'il est en expansion accélérée.

Dans une certaine mesure, la gravitation est bien la seule des interactions à pouvoir se manifester dans l'Univers à des échelles très différentes allant de celle de l'Homme à celle de l'Univers tout entier en passant par celle des étoiles par exemple. Ce n'est "que" dans la dynamique de l'infiniment petit qu'elle semble ne jouer aucun rôle...

Ce problème a précisément pour objet d'étudier les manifestations de la force de gravitation à différentes échelles. La première partie est consacrée à l'étude de la gravitation sur Terre. Dans la deuxième partie, nous étudions des propriétés générales de la gravitation classique. La troisième partie a pour but d'illustrer le rôle primordial du champ de gravitation dans les étoiles. Enfin dans une quatrième partie, on étudie l'effet de lentille gravitationnelle, phénomène dont l'observation a permis de valider la théorie d'Einstein de la gravitation.

Les parties sont indépendantes les unes des autres. A l'intérieur même des parties, les sous-parties sont largement indépendantes les unes des autres.

Table des matières

1	La gravitation terrestre	4
1.1	Le champ de pesanteur	4
1.2	S'échapper de la surface de la Terre	5
2	Les lois de la gravitation	7
2.1	La gravitation universelle	7
2.2	La mesure de la constante gravitationnelle \mathcal{G}_N	10
3	La gravitation dans les étoiles	13
3.1	Equilibre mécanique dans une étoile	13
3.2	Aspects énergétiques : réactions nucléaires	18
4	L'effet de lentille gravitationnelle	23
4.1	La déflexion d'un rayon lumineux par le Soleil	23
4.2	La mesure de l'angle de déflexion par une lunette astronomique	24

Formulaire

1. Analyse vectorielle

En coordonnées cartésiennes associées à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les opérateurs d'analyse vectorielle sont déterminés à partir de l'opérateur gradient (ou nabla) $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

par les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f), \quad \text{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}, \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$

pour toute fonction $f(x, y, z)$ et tout vecteur $\vec{V}(x, y, z)$.

L'opérateur Laplacien est défini par :

$$\Delta(f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

En coordonnées sphériques associées à la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, l'opérateur nabla est :

$$\vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

pour toute fonction $f(r, \theta, \phi)$.

Le théorème d'Ostrogradski donne :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \text{div}(\vec{V}) d^3\tau = \oiint_S \vec{V} \cdot \vec{n} d^2\sigma$$

pour tout vecteur \vec{V} , tout domaine \mathcal{D} de l'espace dont le bord est la surface fermée S de normale sortante \vec{n} .

2. Constantes fondamentales

Masse de la Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg

Rayon de la Terre : $R_T = 6,40 \times 10^3$ km

Masse du Soleil : $M_\odot = 1,99 \times 10^{30}$ kg

Rayon du Soleil : $R_\odot = 6,95 \times 10^5$ km

Constante gravitationnelle : $\mathcal{G}_N = 6,67 \times 10^{-11}$ m³.kg⁻¹.s⁻²

Constante de Planck : $h = 6,62 \times 10^{-34}$ m².kg.s⁻¹

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 2,99 \times 10^8$ km.s⁻¹

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ m².kg.s⁻².K⁻¹

Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ m⁻³.kg⁻¹.s⁴.A²

Masse du proton : $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg

Masse du neutron : $m_n = 1,68 \times 10^{-27}$ kg

Masse de l'électron : $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg

Masses atomiques de l'hélium : $m(^3\text{He}) = 5,01 \times 10^{-27}$ kg et $m(^4\text{He}) = 6,63 \times 10^{-27}$ kg

1 La gravitation terrestre

Comme nous l'avons déjà souligné en introduction, la gravitation est certainement la plus familière des interactions pour l'Homme car elle se manifeste en permanence dans notre quotidien. Il n'est donc pas étonnant de constater que dans l'histoire de la physique, la gravitation ait été la première des interactions fondamentales à être correctement comprise et formalisée, d'abord par Galilée puis par Newton qui a établi les lois de la gravitation universelle classique.

Cette partie a pour objet l'étude de certains aspects de la gravitation terrestre. Dans un premier temps, on étudie le champ de pesanteur en montrant qu'il diffère du champ de gravitation. Dans une deuxième partie, on montre comment s'échapper de la surface de la Terre, soit en se libérant totalement du champ gravitationnel terrestre, soit en se plaçant en orbite autour de la Terre.

1.1 Le champ de pesanteur

Le poids de tout corps massif sur la Terre est essentiellement dû à l'attraction gravitationnelle que la Terre exerce sur ce corps mais pas seulement. La rotation de la Terre sur elle-même a aussi une influence sur le poids que nous allons étudier dans cette partie.

1. La Terre n'est pas parfaitement sphérique. Est-elle plus aplatie aux pôles ou à l'équateur ? A quoi est dû cet aplatissement ? En raison de cet aplatissement, le champ de gravitation est-il plus important aux pôles ou à l'équateur ? On donnera une justification précise à cette dernière question.
2. A partir de maintenant, on suppose à nouveau que la Terre est une distribution parfaitement sphérique de masse. Déterminer la force de gravitation \vec{F}_g exercée par la Terre sur un objet de masse m immobile à la surface de la Terre. En déduire que $\vec{F}_g = m\vec{g}_0$ où on donnera l'expression de l'accélération de pesanteur \vec{g}_0 en fonction de R_T , M_T et \mathcal{G}_N et d'un vecteur unitaire soigneusement défini.
3. En outre, la Terre tourne autour de son axe nord-sud avec une vitesse angulaire ω_T supposée constante. Calculer ω_T en supposant qu'un jour dure exactement 24 heures.
4. On considère un objet M de masse m se trouvant à la latitude λ à la surface de la Terre. Ce point est immobile par rapport à la Terre et donc tourne à vitesse angulaire constante par rapport au référentiel géocentrique.
 - a. Définir le référentiel géocentrique. On le supposera galiléen par la suite.
 - b. Décrire précisément la trajectoire de l'objet M dans le référentiel géocentrique. On fera un schéma explicatif.
 - c. Après avoir introduit un système de coordonnées adéquat, déterminer la vitesse \vec{v} et l'accélération \vec{a} du point M dans le référentiel géocentrique. On fera un schéma pour décrire le système de coordonnées choisi.
 - d. En déduire que, dans le référentiel terrestre, le point M subit une force \vec{F}_e , dite d'entraînement, dont la norme F_e est donnée par l'expression :

$$F_e = m R_T \omega_T^2 \cos(\lambda). \quad (1)$$

On précisera sa direction et son sens. Donner l'ordre de grandeur de cette force d'entraînement pour une masse $m = 1$ kg. Expliquer pourquoi le point M reste

immobile dans le référentiel terrestre même s'il est constamment soumis à cette force d'entraînement.

- e. Ainsi, si on tient compte de la rotation de la Terre sur elle-même, le poids \vec{P} d'un corps de masse m immobile à la surface de la Terre est la somme de la force d'entraînement \vec{F}_e et de la force de gravitation \vec{F}_g exercée par la Terre. Déterminer l'écart angulaire entre la direction de \vec{P} et la direction donnée par le rayon de la Terre passant par M en fonction de λ , g_0 , R_T et ω_T . Faire l'application numérique pour $\lambda = 45$ degrés.
- f. Lorsque le point M n'est pas immobile dans le référentiel terrestre, il subit une force supplémentaire en plus de \vec{F}_e et de \vec{F}_g . Quelle est cette force? Donner deux manifestations concrètes de cette force.

1.2 S'échapper de la surface de la Terre

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer Hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère soit pour observer la Terre d'en "haut" soit pour observer l'espace. Cette partie a pour but d'aborder succinctement la mise en orbite autour de la Terre.

1. Pour libérer un objet M de masse m de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le "lancer" vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre v_ℓ est précisément la vitesse minimale avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il s'échappe. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à l'objet M entre deux instants bien choisis, déterminer la vitesse de libération v_ℓ en fonction de l'accélération de la pesanteur g_0 supposée constante à la surface de la Terre. Calculer v_ℓ numériquement en prenant $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.
2. Pourquoi la vitesse de libération ne dépend-elle pas de la masse de l'objet M ? En pratique, est-ce effectivement le cas? Pourquoi?
3. Un satellite (ou une station spatiale) en orbite autour de la Terre s'est-il échappé de l'attraction gravitationnelle? Comment expliquer alors qu'un astronaute, dans une station spatiale par exemple, soit en "apesanteur"?
4. On veut maintenant étudier plus en détail les trajectoires possibles des satellites que l'Homme envoie dans l'espace. Pour cela, on suppose que le satellite est un point matériel M de masse m soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle terrestre. En outre, le centre O de la Terre est supposé immobile et le satellite est repéré par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.
 - a. Dans quelles circonstances est-il légitime de supposer que le centre de la Terre est immobile?
 - b. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point M afin d'écrire l'équation différentielle satisfaite par \vec{r} .
 - c. En déduire que le vecteur $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ est constant au cours du temps. Quel est le sens physique du vecteur $\vec{\sigma} = m\vec{L}$? Conclure que le mouvement du satellite est nécessairement plan. Caractériser le plan de la trajectoire : justifier en particulier que le centre de la Terre O est dans le plan de la trajectoire.

- d. Il est donc plus judicieux de travailler en coordonnées polaires qu'en coordonnées sphériques. En outre, on choisit O comme étant l'origine du système de coordonnées polaires. Ce système de coordonnées est illustré sur la figure (1). Le satellite est ainsi

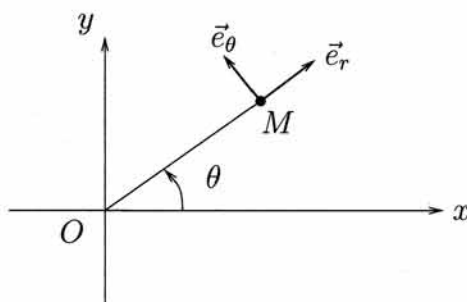


FIG. 1 – Le système de coordonnées polaires est défini par rapport à un système de coordonnées cartésiennes arbitraire déterminé par les axes (Ox) et (Oy) . Le point M est alors repéré par l'angle θ et la distance $r = OM$. La base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ des coordonnées polaires est mobile.

repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) . Déterminer les expressions du vecteur position \vec{r} , du vecteur vitesse \vec{v} et du vecteur accélération \vec{a} dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ des coordonnées polaires.

- e. Calculer la norme L du vecteur $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ introduit ci-dessus et en déduire que $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante qu'on donnera en fonction de L .
- f. En projetant l'équation du principe fondamental de la dynamique dans la direction \vec{e}_r , montrer que la coordonnée r satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2}{r^3} - \frac{G_N M_T}{r^2}. \quad (2)$$

- g. En déduire que tout se passe comme si le satellite M était décrit comme une particule fictive de masse m qui se déplace seulement dans une dimension (dont on notera r la coordonnée) soumis à une force qui dérive d'une énergie potentielle $V(r)$, qualifiée d'effective, que l'on déterminera.
- h. Calculer l'énergie mécanique totale E du satellite et montrer qu'elle se met bien sous la forme

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V(r). \quad (3)$$

Justifier que E se conserve.

- i. Tracer l'allure de $V(r)$ et discuter les trajectoires possibles du satellite en fonction de E . On distinguera en particulier les états qualifiés de liés de ceux dits de diffusion.
- j. Dans le cas où le satellite est en orbite autour de la Terre, la trajectoire est fermée. Déterminer alors la distance minimale r_{min} et la distance maximale r_{max} du satellite au centre de la Terre en fonction de E en particulier.
- k. Pour finir, on lance un objet de masse m depuis la surface de la Terre avec une vitesse qui fait un angle α avec la verticale et de norme v_0 . Donner les expressions de L et de E correspondantes. Déterminer une condition impliquant en particulier les grandeurs α et v_0 pour que l'objet ne s'écrase pas sur la surface de la Terre.

2 Les lois de la gravitation

Cette partie a pour but d'étudier les propriétés générales du champ gravitationnel dans un premier temps. Dans une deuxième sous-partie, nous nous attacherons à comprendre comment Cavendish a pu mesurer la constante gravitationnelle \mathcal{G}_N .

2.1 La gravitation universelle

a. Généralités

1. Quelles sont en plus de la gravitation les autres interactions fondamentales ? Pour chacune d'entre elles, décrire succinctement une situation physique où elle se manifeste.
2. Les coïncidences de l'Histoire font que Newton est né un an (quasiment jour pour jour) après la mort de Galilée. A quelle période ont vécu ces deux personnalités ?
3. Galilée a apporté une contribution immense dans la compréhension de la gravitation. Il a en effet énoncé le principe d'équivalence qui stipule l'égalité entre la masse inerte m_i et la masse pesante m_p d'un même corps. Définir ces deux notions.
4. Par la suite, on notera $m = m_i = m_p$ la masse d'un corps sans préciser si elle est inerte ou pesante. La conséquence immédiate de ce principe est que "les corps chutent tous de la même façon dans un champ de gravitation en l'absence de toute autre force". Décrire une expérience qui permette d'illustrer cette assertion.

b. Champ, potentiel et énergie gravitationnels

Depuis Galilée et Newton, la formulation de la gravitation classique s'est affinée et on sait déterminer (en principe) le champ de gravitation créé par un corps massif non nécessairement ponctuel mais étendu donc plus réaliste : on parle alors de distribution de masse. Une distribution de masse volumique ρ crée un champ gravitationnel (supposé statique) \vec{G} qui satisfait les équations locales suivantes :

$$\operatorname{div}(\vec{G}) = -4\pi\mathcal{G}_N\rho \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{G}) = \vec{0} \quad (4)$$

où div et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ sont respectivement les opérateurs divergence et rotationnel.

1. Comment s'exprime la force de gravitation exercée par une distribution de masse sur un point matériel M de masse m en fonction du champ gravitationnel \vec{G} ?
2. Dresser une analogie entre les équations (4) et celles de l'électrostatique. Quelle est la différence fondamentale entre l'électrostatique et la gravitation ?
3. Ecrire les équations de la magnétostatique. Ces dernières sont-elles également équivalentes à celles de la gravitation ?
4. Le potentiel gravitationnel est pour \vec{G} l'analogue de ce qu'est le potentiel électrostatique V pour le champ électrique. Laquelle des deux équations précédentes (4) permet d'assurer l'existence d'un potentiel gravitationnel Φ pour le champ de gravitation \vec{G} ? Ecrire le lien entre Φ et \vec{G} . En déduire que le potentiel gravitationnel satisfait l'équation de Poisson :

$$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}_N\rho. \quad (5)$$

5. On suppose que la distribution de matière est confinée dans une région \mathcal{D} finie de l'espace : alors $\rho(P) = 0$ en tout point P qui n'est pas dans \mathcal{D} . Dans ce cas, il est toujours possible de déterminer un potentiel $\Phi(M)$ qui s'annule lorsque M est infiniment éloigné de \mathcal{D} . Ce potentiel est en tout point M donné par :

$$\Phi(M) = -\mathcal{G}_N \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{MP} d^3\tau \quad (6)$$

où l'intégrale porte sur le domaine \mathcal{D} ; $d^3\tau$ est l'élément de volume infinitésimal au voisinage du point P et MP est la distance de M à P . Justifier par un argument "physique" que, lorsque M est très éloigné de \mathcal{D} , ce potentiel se comporte de la façon suivante

$$\Phi(M) \simeq -\frac{\mathcal{G}_N M_{tot}}{r} \quad (7)$$

où M_{tot} est la masse totale de la distribution et r est la distance "caractéristique" entre un point quelconque de \mathcal{D} et M . Commenter ce résultat en le comparant au potentiel créé par un point matériel.

6. On considère maintenant une particule ponctuelle au point M de masse m dans le champ gravitationnel créé par la distribution de masse volumique ρ précédente. Montrer que la force gravitationnelle subie par cette particule est conservative et exprimer son énergie potentielle $e_p(M)$ au point M en fonction du potentiel gravitationnel $\Phi(M)$. On supposera que $e_p(M)$ s'annule lorsque M est infiniment éloigné de la distribution \mathcal{D} . En déduire que l'énergie potentielle $e_p(M)$ peut s'interpréter comme le travail nécessaire à fournir pour déplacer de façon infiniment lente la particule ponctuelle de masse m depuis l'infini jusqu'à sa position M . Justifier alors "physiquement" le signe de l'énergie potentielle.
7. Par analogie, on définit l'énergie potentielle gravitationnelle E_p de la distribution de masse comme la somme de tous les travaux nécessaires pour déplacer chacune des parties de \mathcal{D} depuis l'infini jusqu'à sa position finale. Montrer alors que l'énergie potentielle gravitationnelle s'écrit sous la forme :

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) \Phi(P) d^3\tau . \quad (8)$$

On justifiera en particulier le facteur $1/2$.

c. Le théorème de Gauss pour la gravitation

L'expression intégrale (6) est en principe suffisante pour déterminer le potentiel gravitationnel Φ et donc le champ gravitationnel \vec{G} de toute distribution de masse volumique ρ . En pratique, une telle intégrale n'est pas toujours évidente à manipuler et on préfère souvent appliquer une autre méthode pour déterminer \vec{G} . Cette nouvelle méthode s'appuie essentiellement sur le théorème de Gauss.

1. Enoncer le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique \vec{E} créé par une distribution électrique de charge par unité de volume ρ_e .
2. En s'appuyant sur l'analogie établie entre l'électrostatique et la gravitation, montrer que le champ gravitationnel \vec{G} créé par une distribution de masse volumique ρ satisfait l'identité :

$$\oiint_S \vec{G}(P) \cdot \vec{n} d^2\sigma = -4\pi\mathcal{G}_N M_{int} \quad (9)$$

où S est une surface fermée et M_{int} est la masse contenue dans le domaine de l'espace se trouvant à l'intérieur de la surface S . En outre, dans l'intégrale surfacique, \vec{n} désigne la normale sortante et $d^2\sigma$ est l'élément de surface infinitésimal au voisinage du point P .

3. Montrer qu'on peut obtenir cette égalité directement à partir de l'une des équations (4).
4. L'application du théorème de Gauss nécessite de choisir une surface S . Or le choix de cette surface se fait en utilisant les symétries de la distribution de masse. Comment les symétries de la distribution de masse restreignent-elles la forme de son champ gravitationnel \vec{G} ?

d. Etude d'une distribution sphérique homogène

Afin d'illustrer les notions précédentes, on considère comme distribution de masse une boule de rayon R et de masse volumique uniforme ρ . On considèrera des situations physiquement plus pertinentes lorsqu'on étudiera les étoiles dans la partie suivante.

On choisit donc comme repère un système de coordonnées sphériques dont le centre O est confondu avec le centre de la distribution. On notera $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ la base de vecteurs associée.

1. Justifier avec précision que le champ gravitationnel est nécessairement de la forme

$$\vec{G} = -G(r)\vec{e}_r \quad (10)$$

où $G(r)$ est la norme du champ gravitationnel.

2. Déterminer alors en appliquant le théorème de Gauss la fonction $G(r)$. On distinguera les cas $r > R$ et $r < R$. Tracer la fonction $G(r)$ en fonction de r . Calculer la valeur du champ gravitationnel $g_0 = G(R)$ à la surface de la distribution.
3. Expliquer par des arguments physiques l'allure de $G(r)$ lorsque $r > R$ et $r < R$.
4. Déterminer le potentiel gravitationnel $\Phi(r)$ de la distribution sachant qu'il s'annule à l'infini.
5. Calculer l'énergie potentielle gravitationnelle de la distribution et montrer qu'elle se met sous la forme

$$E_p = -\xi \frac{G_N M_{tot}^2}{R} \quad (11)$$

où M_{tot} est la masse totale de la distribution et ξ est un facteur numérique qu'on déterminera.

e. Etude d'une distribution sphérique non-homogène

On étudie maintenant quelques propriétés de l'énergie gravitationnelle d'une distribution sphérique de masse non-homogène et de rayon R . Cette situation est physiquement plus intéressante que celle d'une distribution homogène car elle permet de modéliser correctement certaines étoiles. On associe un système de coordonnées sphériques à la distribution dont le centre O est l'origine du système. La masse volumique $\rho(r)$ ne dépend que de la coordonnée radiale r .

1. On note $M(r)$ la masse contenue dans la boule de rayon r . Montrer alors que :

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' . \quad (12)$$

Pour cela, on rappelle que l'élément de volume infinitésimal s'écrit en coordonnées sphériques $d^3\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$ où $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. En supposant que $r < R$, établir le lien entre $\rho(r)$ et $\frac{dM}{dr}$. Que vaut $\frac{dM}{dr}$ si $r > R$?

2. En utilisant la relation précédente et en reprenant la définition de l'énergie potentielle gravitationnelle E_p , montrer que E_p peut s'écrire sous la forme :

$$E_p = -\frac{1}{2} \int_0^\infty M(r) \frac{d\Phi(r)}{dr} dr + \frac{1}{2} M_s \Phi_\infty \quad (13)$$

où Φ_∞ est la valeur du potentiel gravitationnel lorsque $r \rightarrow \infty$. On posera $\Phi_\infty = 0$ par la suite.

3. En utilisant la relation entre le potentiel gravitationnel $\Phi(r)$ et le champ gravitationnel $\vec{G}(r)$, écrire E_p comme une intégrale faisant intervenir la masse $M(r)$ et la norme du champ gravitationnel $G(r)$.
4. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer $G(r)$ en fonction de $M(r)$.
5. En déduire finalement que l'énergie potentielle gravitationnelle de l'étoile peut s'écrire sous la forme :

$$E_p = - \int_0^\infty \frac{\mathcal{G}_N M(r)}{r} 4\pi r^2 \rho(r) dr = - \int_0^R \frac{\mathcal{G}_N M(r)}{r} 4\pi r^2 \rho(r) dr. \quad (14)$$

6. Interpréter physiquement cette expression.

2.2 La mesure de la constante gravitationnelle \mathcal{G}_N

C'est dans le but de "peser" la Terre que Cavendish, physicien britannique du 18^{ième} siècle, a mesuré pour la première fois la constante gravitationnelle \mathcal{G}_N . La mesure de \mathcal{G}_N permet en effet de déterminer la masse de la Terre M_T si on connaît en particulier son rayon R_T .

1. Cavendish a utilisé un pendule de torsion pour mesurer la faible attraction gravitationnelle entre des sphères métalliques. Pour quelles raisons, n'a-t-il pas simplement utilisé un ressort afin de déterminer l'interaction gravitationnelle (et donc \mathcal{G}_N) par la mesure de son allongement ?
2. Le pendule de torsion est schématiquement représenté et décrit sur la figure (2). On suppose qu'en l'absence des boules de masse M , la position d'équilibre du pendule est fixée à $\theta = 0$. Lorsque le pendule est écarté d'un angle θ , le fil de torsion produit un moment de rappel $M_r = -C\theta$ (par rapport à l'axe du fil de torsion) où C est la constante de torsion du fil.
 - a. Donner la dimension de C .
 - b. On montre alors que le mouvement de l'angle θ est déterminé par l'équation suivante :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0 \quad (15)$$

où I et λ sont des constantes positives dont on donnera la dimension. Interpréter physiquement les trois termes de cette équation.

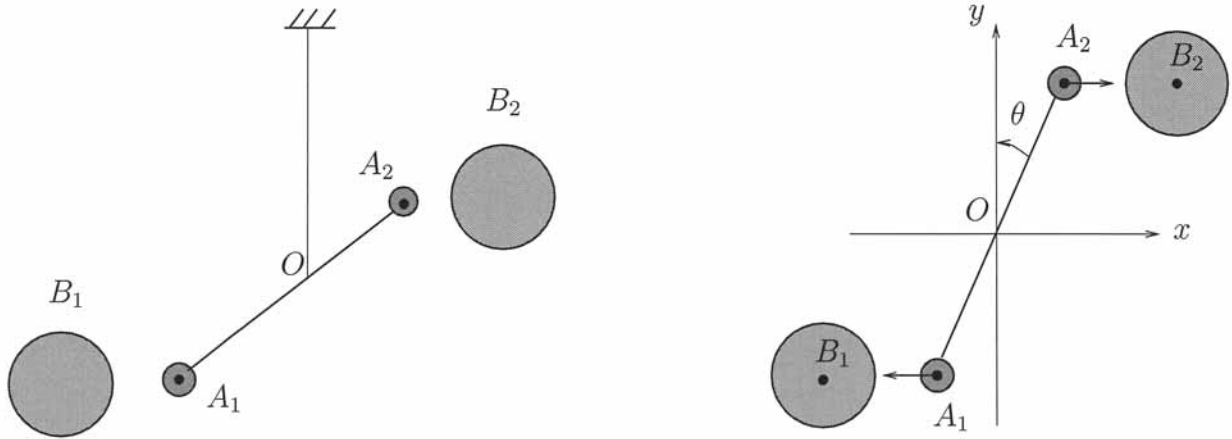


FIG. 2 – Le pendule de torsion est constitué d’un fil métallique fixé à une extrémité et attaché par son autre extrémité au milieu O d’une barre rigide au bout de laquelle sont placées deux boules identiques de centres A_1 et A_2 et de masse m . La position du pendule est repérée par l’angle θ représenté sur le schéma. En plaçant deux autres boules identiques de masse M et de centres B_1 et B_2 à proximité de celles du pendule, on crée un moment de forces dû à la gravitation qui déplace la position d’équilibre du pendule. La mesure de cette nouvelle position d’équilibre permet de déterminer \mathcal{G}_N . On propose à gauche une vision en perspective et à droite une vision de dessus du pendule.

- c. Sous quelle condition satisfaite par les constantes I , λ et C le pendule oscille-t-il ? Dans ce cas, donner l’expression de la “pseudo-période” T_0 ainsi que l’expression du temps caractéristique τ du régime transitoire en fonction de I , λ et C . Donner l’allure du graphe $\theta(t)$ dans le cas où le pendule oscille. On précisera en particulier la valeur θ_∞ de $\theta(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
3. Maintenant, on approche les boules identiques de masse M du pendule. Ces boules exercent une force de gravitation sur les boules de masse m qui produit un moment de force supplémentaire $M_g(\theta)$ (par rapport à l’axe du fil de torsion) qui dépend a priori de θ .
- Comment est modifiée l’équation du mouvement (15) ? Déterminer alors l’équation satisfaite par la nouvelle position d’équilibre θ_e du pendule en fonction de C et de M_g .
 - Pour simplifier le problème, les paramètres du dispositif sont choisis de manière à ce que $M_g(\theta)$ varie très peu en fonction de θ . On peut donc faire l’approximation $M_g(\theta) \simeq M_g(0)$ et on notera M_g sa valeur (sans faire référence à l’angle θ). Le moment des forces $M_g = M_{g1} + M_{g2}$ a deux contributions : une première contribution M_{g1} due aux actions des boules de centres B_1 et B_2 respectivement sur celles de centres A_1 et A_2 ; une seconde contribution M_{g2} due aux actions des boules de centres B_1 et B_2 respectivement sur celles de centres A_2 et A_1 . On négligera l’action des boules de masse M sur la barre rigide du pendule. Donner les expressions de M_{g1} et M_{g2} lorsque $\theta = 0$ en fonction de la distance $R = A_1B_1 = A_2B_2$ et de la longueur $2d = A_1A_2$ de la barre rigide. On supposera pour cela que les boules de masse m sont “ponctuelles”. En déduire l’expression du moment total des forces gravitationnelles :

$$M_g = 2 \frac{\mathcal{G}_N M m}{R^2} d \left(1 - \frac{R^3}{[R^2 + (2d)^2]^{3/2}} \right). \quad (16)$$

- c. Connaissant la valeur de \mathcal{G}_N donnée dans le formulaire, évaluer la valeur d'équilibre θ_e sachant que $m = 15 \text{ g}$, $M = 1,5 \text{ kg}$, $d = 5 \text{ cm}$, $R = 4,5 \text{ cm}$ et $C = 0,6 \times 10^{-8} \text{ N.m}$. Cette valeur de θ_e est-elle mesurable?
4. Aujourd'hui, on peut mesurer θ_e avec une plus grande précision. Pour cela, on colle au centre de la barre rigide un miroir plan sur lequel on envoie un rayon laser. En l'absence des boules de masse M , le rayon laser arrive sur le miroir en incidence normale et est réfléchi dans la direction incidente. En présence des boules, le miroir est incliné d'un angle θ_e et le laser n'y arrive plus en incidence normale, il est donc réfléchi dans une direction différente de celle du rayon incident. Le dispositif est représenté dans la figure (3).
- a. Exprimer la valeur de l'angle α que forment le rayon incident et le rayon réfléchi en fonction de θ_e .

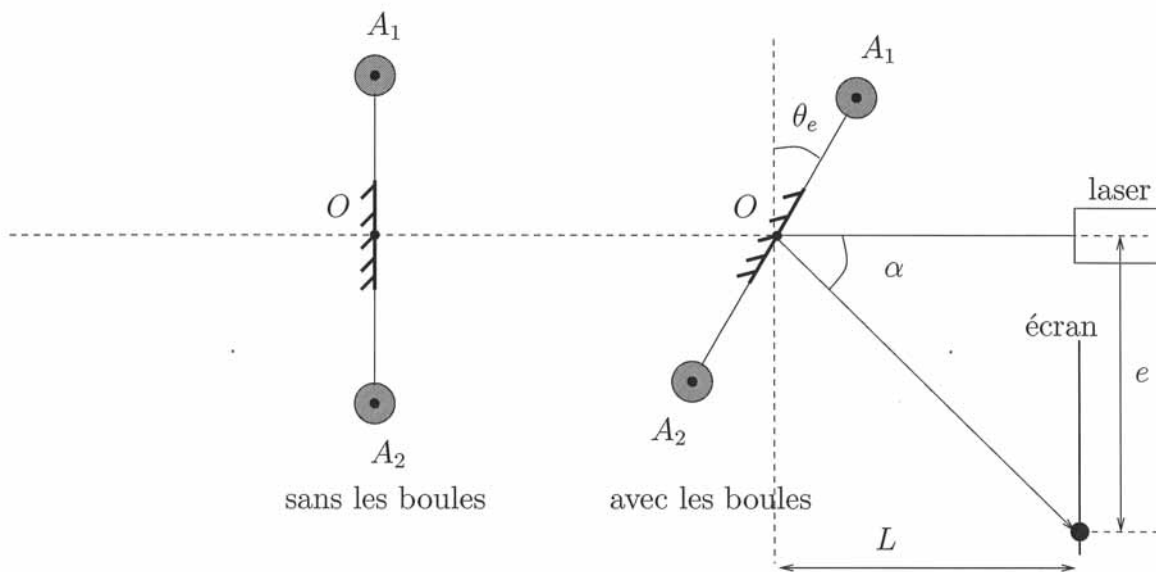


FIG. 3 – La mesure de l'angle α permet d'accéder à la valeur de la constante de Newton \mathcal{G}_N .

- b. On place un écran à une distance L du miroir de sorte à observer le rayon réfléchi comme indiqué sur le schéma (3). On observe alors sur cet écran un point lumineux qui se trouve à une distance e du laser. Quel est l'ordre de grandeur de L pour que la distance e soit de l'ordre du centimètre? Commenter.
- c. L'expérience de Cavendish a permis de déterminer \mathcal{G}_N avec une précision exceptionnelle à son époque. Celle-ci lui a également permis de "peser" la Terre en donnant sa masse M_T . De quelle autre grandeur, que l'on notera g_0 , a-t-on besoin en plus de \mathcal{G}_N et du rayon de la terre R_T pour effectivement déterminer M_T ?
- d. Comment aurait-on pu mesurer le rayon de la Terre R_T à l'époque de Cavendish?
- e. Comment Cavendish aurait-il pu mesurer la grandeur que l'on a notée g_0 ?

Pour conclure, on peut souligner que Cavendish a mesuré la densité moyenne de la Terre avec une telle précision que cette mesure a servi de référence pendant plus d'un siècle!

3 La gravitation dans les étoiles

La gravitation est au cœur de la formation et de l'évolution des étoiles. Mais cette interaction ne permet pas de comprendre à elle seule toutes les propriétés stellaires et il est même remarquable de constater que toutes les interactions ont leur rôle à jouer dans les étoiles. Dans cette partie, nous verrons comment les différentes interactions se manifestent de façon essentielle dans les étoiles.

3.1 Equilibre mécanique dans une étoile

En son temps, Newton avait déjà émis l'hypothèse que l'auto-gravitation était responsable de la formation des étoiles dans le sens où, dans un amas de "particules", celles-ci peuvent s'attirer entre elles du fait de l'interaction gravitationnelle pour former ensuite éventuellement une étoile.

a. Temps d'effondrement sous l'effet de la gravitation

On suppose dans cette partie que l'étoile est isolée dans l'Univers et qu'elle est constituée d'un gaz de particules de masse totale M_s . Cette étoile est supposée être une distribution à symétrie sphérique de centre O et de rayon R_s : on lui associe un système de coordonnées sphériques. Les particules constituant l'étoile ne sont sujettes qu'à l'attraction gravitationnelle exercée les unes sur les autres.

1. A l'instant initial, $t = 0$, le rayon de l'étoile est R_s . Par un argument physique, décrire le seul état d'équilibre possible pour une étoile de particules soumises seulement à l'attraction gravitationnelle.
2. On considère dans cette étoile une particule M qui se trouve constamment "au bord" de l'étoile lors de son évolution. En supposant que la particule n'est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle de la part de l'étoile et qu'elle n'a pas de vitesse initiale, justifier que cette particule a une trajectoire rectiligne.
3. Ecrire l'équation d'évolution pour le vecteur position $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$.
4. En intégrant une fois l'équation différentielle pour la coordonnée radiale $r(t)$, montrer que la vitesse de la particule au bord de l'étoile est donnée par la relation :

$$v^2 = 2\mathcal{G}_N M_s \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s} \right). \quad (17)$$

Cette expression est-elle réaliste ? pourquoi ?

5. Dédurre alors que l'étoile s'effondre au bout d'un temps t_{eff} donné par :

$$t_{eff} = \left(\frac{R_s^3}{2\mathcal{G}_N M_s} \right)^{1/2} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx. \quad (18)$$

On admettra que $\int_0^1 \sqrt{x/(1-x)} dx = \pi/2$.

6. Si on suppose que l'étoile a initialement une masse volumique uniforme ρ , exprimer le temps d'effondrement en fonction de ρ . Commenter le résultat obtenu.
7. Estimer le temps d'effondrement t_{eff} pour une étoile qui a les caractéristiques du Soleil données dans le formulaire. Comparer t_{eff} avec le temps de vie du Soleil. Commenter la différence.

b. Effet de la pression

Comme on pouvait s'y attendre, la seule gravitation ne peut pas expliquer l'équilibre d'une étoile puisqu'une autre force, de nature répulsive, est nécessaire pour éviter que l'étoile ne s'effondre. Il existe en fait au sein des étoiles des forces de pression dont l'effet s'oppose à celui de la gravitation. Les effets de la gravitation et de la pression se compensent totalement lorsque l'étoile est en équilibre.

Afin de tenir compte de la pression, on adoptera à partir de maintenant un modèle "fluide" de l'étoile : on suppose alors que l'étoile est un milieu continu décrit par une masse volumique ρ et une pression P . L'étoile est toujours supposée être à symétrie sphérique : on note O son centre et on lui associe un système de coordonnées sphériques.

1. On considère une couronne sphérique (d'épaisseur infinitésimale dr) comprise entre r et $r + dr$.
 - a. Déterminer les forces de pression qui s'appliquent sur un élément infinitésimal cylindrique (d'épaisseur dr et dont la base à une surface d^2S) de cette couronne sphérique.
 - b. Calculer la masse δm de cet élément infinitésimal de la couronne sphérique. En déduire la force gravitationnelle qu'exerce l'étoile sur cet élément infinitésimal de la couronne sphérique en fonction de ρ et de la masse $M(r)$ contenue dans la boule de rayon r .
 - c. En déduire la relation à l'équilibre mécanique :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\mathcal{G}_N M(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (19)$$

- d. Retrouver cette équation directement à partir de l'équation de l'hydrostatique :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = -\rho \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) \quad (20)$$

où Φ est le potentiel gravitationnel créé par l'étoile.

2. Cette équation n'est pas suffisante pour déterminer l'état d'équilibre de l'étoile. Il est nécessaire de se donner en plus une équation d'état. On suppose, dans un premier temps, que ρ est uniforme.
 - a. Calculer $M(r)$. En déduire l'expression de $P(r)$ en supposant que $P(0) = P_0$.
 - b. En analysant l'expression de $P(r)$, déterminer le rayon R_s de l'étoile.
 - c. Montrer alors que la masse M_s de l'étoile est donnée par la formule :

$$M_s = \left(\frac{6P_0^3}{\pi\mathcal{G}_N^3\rho^4} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Discuter la relation entre M_s et ρ .

3. En guise de deuxième exemple, on suppose que le gaz de particules dans l'étoile satisfait maintenant l'équation $P(r) = \lambda\rho(r)^2$ où λ est une constante.
 - a. Dans ce cas, on ne peut plus intégrer directement l'équation traduisant l'équilibre hydrostatique (19) pour déterminer $P(r)$. Pour contourner ce problème, on cherche

à déterminer une équation pour la masse volumique $\rho(r)$. Pour cela, déterminer une relation entre $\frac{dM}{dr}$ et ρ de laquelle on déduira l'équation du second ordre suivante :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi \mathcal{G}_N \rho(r). \quad (22)$$

- b. En déduire une équation différentielle satisfaite par $\rho(r)$ et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\frac{d^2}{dr^2}(\rho r) = -\frac{2\pi \mathcal{G}_N}{\lambda} \rho r. \quad (23)$$

- c. Déterminer alors la densité $\rho(r)$ de l'étoile et montrer qu'elle s'écrit nécessairement sous la forme

$$\rho(r) = \rho_0 a \frac{\sin(r/a)}{r} \quad (24)$$

où ρ_0 est la masse volumique au centre de l'étoile et a une longueur caractéristique que l'on déterminera en fonction de \mathcal{G}_N et λ .

- d. Représenter l'allure de $\rho(r)$. En déduire, par des arguments physiques, le rayon R_s de l'étoile dans ce modèle en fonction de a .
- e. Déterminer R_s en fonction de la pression P_0 et de la densité ρ_0 au centre de l'étoile. Comparer ce résultat à celui obtenu dans le cadre du modèle précédent. Commenter.
- f. Déterminer la masse M_s de l'étoile dans ce modèle.

c. La masse de Chandrasekhar

Les deux modèles précédents permettent de donner un ordre de grandeur intéressant pour le rayon R_s et la masse M_s d'une étoile en équilibre sous certaines conditions. Ils sont d'autant plus intéressants qu'il est possible de les intégrer totalement. Ce n'est toutefois généralement pas le cas. Si le gaz de particules dans l'étoile a un comportement polytropique, tel que $P = \lambda \rho^\gamma$ où λ et γ sont des constantes, on ne peut pas résoudre analytiquement l'équation de l'hydrostatique si γ est quelconque. On peut cependant étudier quelques aspects de cette situation.

1. Que vous évoque l'équation du comportement polytropique $P = \lambda \rho^\gamma$?
2. En introduisant la grandeur sans dimension $\psi = (\rho/\rho_0)^{\gamma-1}$ où $\rho_0 = \rho(0)$, montrer qu'il est possible de trouver une longueur caractéristique r_γ telle que l'équation de l'équilibre hydrostatique (19) devienne :

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\psi}{dx} \right) = -\psi^n \quad (25)$$

où l'on dérive par rapport à la variable sans dimension $x = r/r_\gamma$. Déterminer n et r_γ . Il s'agit de l'équation de Lane-Emden.

3. Il est possible de résoudre numériquement cette équation lorsqu'on impose les conditions suivantes

$$\psi(0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{d\psi}{dx}(0) = 0. \quad (26)$$

au centre de l'étoile. Discuter ces deux conditions, tout particulièrement la deuxième.

4. Lorsque $n < 5$, on montre que $\psi(x)$ décroît de façon monotone et s'annule pour la valeur $x_s : \psi(x_s) = 0$. En s'inspirant des exemples étudiés précédemment, déduire la valeur du rayon R_s de l'étoile en fonction de x_s et de r_γ .
5. On peut en outre calculer la masse de l'étoile M_s dans ces modèles. Si on tient compte des effets dus à la relativité et à la mécanique quantique, on montre que M_s ne peut pas excéder la masse dite de Chandrasekhar M_{Ch} qui est donnée par :

$$M_{Ch} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{8\pi m_p^2} \left(\frac{hc}{\mathcal{G}_N} \right)^{3/2} \quad (27)$$

où m_p est la masse du proton, h est la constante de Planck et c la vitesse de la lumière dans le vide.

- a. Discuter la présence des constantes fondamentales dans l'expression de la masse de Chandrasekhar. En particulier, justifier la présence de la masse du proton m_p dans cette expression.
- b. Faire l'application numérique pour M_{Ch} et la comparer avec la masse du Soleil.
- c. Que se passe-t-il si la masse de l'étoile devient, lors de son évolution, plus grande que la masse de Chandrasekhar ?

d. Stabilité de l'équilibre dans une étoile

Dans les questions précédentes, nous avons montré comment déterminer l'état d'équilibre d'une étoile. En particulier, de "simples hypothèses" permettent d'accéder au rayon R_s et à la masse M_s de l'étoile. Dans cette partie, nous allons aborder la question de la stabilité de l'état d'équilibre d'une étoile sous l'effet d'une perturbation.

Pour cela, on suppose que l'étoile est un fluide formé d'atomes de masse m . Ce fluide forme un gaz parfait caractérisé à l'équilibre par une masse volumique ρ_0 , une pression P_0 , une température T_0 et une vitesse macroscopique \vec{v}_0 nulle.

L'état d'équilibre est perturbé dans le sens où la masse volumique devient $\rho = \rho_0 + \rho_1$, la pression devient $P = P_0 + P_1$, le fluide acquiert une vitesse \vec{v}_1 alors que la température reste constante. Les perturbations ρ_1 , P_1 et \vec{v}_1 sont des infiniment petits d'ordre un et ne sont ni uniformes ni constantes dans le temps : elles sont donc des fonctions de la position \vec{r} et du temps t .

1. Ecrire l'équation d'état du fluide formant l'étoile en fonction de P , ρ , k_B , T_0 et m . En déduire en particulier une relation entre P_1 , ρ_1 et T_0 .
2. Ecrire l'équation de Poisson permettant de déterminer le potentiel gravitationnel Φ créé par l'étoile à partir de la masse volumique ρ . Par la suite, on écrira $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ où Φ_0 est le potentiel gravitationnel à l'équilibre alors que Φ_1 est le résultat de la perturbation. En déduire l'équation liant Φ_1 et ρ_1 .
3. En plus des deux équations précédentes, les grandeurs qui caractérisent le fluide satisfont les deux relations vectorielles suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}_1) = 0 \quad (28)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_1 \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) - \rho \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi). \quad (29)$$

- a. Que sont ces deux équations? Donner leur sens physique.
 - b. Ecrire l'équation (29) à l'ordre 0 en perturbation. Retrouver l'équation de l'hydrostatique.
 - c. Ecrire les équations (28) et (29) à l'ordre 1.
4. Ces équations sont en général compliquées à manipuler. Pour les simplifier on fera deux hypothèses :
- les grandeurs à l'équilibre sont uniformes : T_0 , P_0 , Φ_0 et ρ_0 sont constants ;
 - le problème est unidimensionnel, c'est à dire que les fonctions ne dépendent que de la coordonnée cartésienne x et de la variable t : $\rho_1(x, t)$, $P(x, t)$, $\Phi(x, t)$ et $\vec{v}_1 = v_1(x, t)\vec{e}_x$.
- Ces hypothèses sont physiquement irréalistes mais elles vont grandement simplifier l'analyse mathématique du problème sans conduire à une conclusion physique incorrecte.
- a. Dédire de ces hypothèses que les équations obtenues précédemment deviennent :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}. \quad (30)$$

- b. Montrer à partir des deux équations précédentes que P_1 , ρ_1 et Φ_1 satisfont l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = 0. \quad (31)$$

- c. En utilisant les résultats des questions 1 et 2 ci-dessus, montrer enfin que la perturbation ρ_1 satisfait l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - 4\pi \mathcal{G}_N \rho_0 \rho_1 = 0 \quad (32)$$

où c_s est une grandeur qu'on déterminera en fonction de k_B , T_0 et m .

- d. L'équation précédente est en fait l'équation de propagation d'une onde sonore. Donner la dimension de c_s et interpréter physiquement cette grandeur.
5. On cherche une solution (en notation complexe) à l'équation (32) sous la forme d'une onde plane progressive "monochromatique" : $\rho_1(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t))$ où A , k et ω sont des constantes.
- a. Quelles sont les dimensions et les significations physiques des grandeurs ω et k ? Montrer qu'elles satisfont nécessairement l'équation de suivante :

$$-\omega^2 + c_s^2 k^2 - 4\pi \mathcal{G}_N \rho_0 = 0. \quad (33)$$

- b. Lorsque la constante k est fixée, donner la condition pour que ω soit un nombre réel. Comment interpréter la solution de l'équation de propagation si ω est purement imaginaire? En déduire une condition sur k pour que l'état d'équilibre soit stable sous l'effet de la perturbation. Conclure que l'état d'équilibre est stable si sa longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ est plus petite qu'une longueur d'onde limite λ_J définie par :

$$\lambda_J^2 = \frac{\pi c_s^2}{\mathcal{G}_N \rho_0}. \quad (34)$$

λ_J est la longueur d'onde de Jeans.

- c. Pour avoir une interprétation physique de ce résultat, on suppose à nouveau que l'étoile est une boule de rayon R_s de masse volumique ρ_0 à l'équilibre. L'étoile est perturbée : il se propage donc une onde "sonore" à la vitesse c_s dans l'étoile. L'étoile sera stable seulement si le temps de propagation de l'onde sonore à travers l'étoile est plus petit que le temps d'effondrement de l'étoile. Discuter cette condition.
- d. En déduire alors, en utilisant (18) pour le temps d'effondrement de l'étoile, que l'on peut supposer l'étoile stable lorsque :

$$\frac{R_s^2}{c_s^2} < \frac{3\pi}{32\mathcal{G}_N\rho_0}. \quad (35)$$

Comparer cette condition à celle obtenue ci-dessus (34). On ne s'intéressera qu'aux ordres de grandeurs.

3.2 Aspects énergétiques : réactions nucléaires

Dans cette partie, on s'intéresse à la source d'énergie à l'intérieur des étoiles. Pour cela, on suppose à nouveau que l'étoile est une sphère de rayon R_s caractérisée, à l'équilibre, par une masse volumique ρ , un potentiel gravitationnel Φ , une pression P et une température T . On continuera à noter O le centre de l'étoile et on lui associe un système de coordonnées sphériques centré sur O . En raison de la symétrie sphérique, les grandeurs qui caractérisent l'étoile ne dépendent que de la coordonnée radiale r . Comme dans la partie précédente, le gaz formant l'étoile est composé d'un seul type d'atomes de masse m .

a. Le théorème du Viriel

En utilisant le théorème du Viriel, on montre dans cette partie que l'énergie gravitationnelle n'est pas suffisante pour comprendre l'énergie émise par une étoile. Pour cela, on note $M(r)$ la masse d'étoile contenue dans une boule de centre O et de rayon r et $M_s = M(R_s)$.

1. En utilisant l'expression (14) de l'énergie potentielle gravitationnelle et l'équation de l'hydrostatique (19) exprimer E_p en fonction de la pression $P(r)$ à l'intérieur de l'étoile et en déduire que :

$$E_p = -3 \int_0^{R_s} P 4\pi r^2 dr. \quad (36)$$

2. On suppose maintenant que le gaz formant l'étoile est parfait. Les variables P , ρ et T satisfont donc l'équation du gaz parfait qu'on rappellera. En outre, l'énergie interne par unité de volume du gaz u est celle d'un gaz parfait monoatomique et est donnée par

$$u = \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} k_B T.$$

- a. Quelle est l'interprétation microscopique de l'énergie interne ? D'où provient le facteur $3/2$ dans l'expression de u ?
- b. En déduire la relation :

$$E_p + 2U = 0 \quad (37)$$

entre l'énergie potentielle gravitationnelle et l'énergie interne totale de l'étoile U . Cette relation est la formulation du théorème du Viriel dans le cadre de notre étude.

- c. En supposant que l'étoile est "immobile", c'est à dire qu'elle n'a pas de vitesse macroscopique, déterminer l'énergie totale E_{tot} de l'étoile en fonction de E_p .
3. Le théorème du Viriel permet de donner une première estimation de la durée de vie du Soleil. Pour cela, on suppose que le Soleil peut se modéliser comme une étoile sphérique homogène de rayon R_\odot et de masse M_\odot .
- En utilisant la formule (11) pour l'énergie potentielle, dans laquelle on posera $\xi = 1$ pour simplifier, donner l'expression de l'énergie totale du Soleil en fonction de \mathcal{G}_N , M_\odot et R_\odot . Faire l'application numérique.
 - On définit la luminosité d'une étoile comme étant la quantité d'énergie émise par l'étoile par unité de temps. On mesure que la luminosité du Soleil est donnée par la valeur $L_\odot = 3,83 \times 10^{26} \text{ J.s}^{-1}$. Estimer alors la durée de vie restante du Soleil τ_\odot en années (1 an = 365 jours).
 - Des mesures d'une autre nature indiquent que la durée de vie restante est de l'ordre de 10^8 années. Quelles sont les limitations du modèle utilisé ici pour déterminer la durée de vie du Soleil permettant d'expliquer cet écart ?
4. Une autre application intéressante du théorème du Viriel est l'estimation de la température moyenne des étoiles. Pour estimer la température T_\odot du Soleil par exemple, on la supposera uniforme.
- En déduire alors l'expression de l'énergie interne totale du Soleil U en fonction de T_\odot , de k_B et du nombre total N d'atomes constituant le Soleil.
 - En déduire que, dans ce modèle simplifié, la température du Soleil est donnée par :

$$T_\odot = \frac{\mathcal{G}_N M_\odot^2}{3k_B N R_\odot}. \quad (38)$$

- Calculer N sachant que le Soleil est composé à 70% d'hydrogène et à 30% d'hélium 4 en masse. En déduire la température T_\odot .

b. Les réactions nucléaires dans les étoiles

Dans les parties précédentes, on a vu que la gravitation peut permettre la formation des étoiles et que, sous certaines conditions, ces étoiles sont stables d'un point de vue mécanique. Cependant, la simple interaction gravitationnelle n'est pas suffisante pour expliquer le fonctionnement d'une étoile comme le Soleil. En raison de la très forte attraction gravitationnelle dans l'étoile, la température devient très importante et même suffisamment grande pour que puissent se produire des réactions nucléaires.

Les réactions nucléaires qui ont lieu dans les étoiles sont une source d'énergie primordiale pour celles-ci. Elles varient en fonction de la température des étoiles, de leur masse et aussi de leur stade d'évolution. Cette partie a pour objet l'étude de certaines réactions. On supposera qu'initialement une étoile est un gaz d'hydrogène.

- Dans le premier stade de leur évolution, les étoiles sont principalement le siège de réactions nucléaires qui mettent en jeu la transformation de l'hydrogène en hélium. Ces réactions font-elle intervenir le processus de fusion ou celui de fission nucléaire ? Justifier.
- Afin de comprendre dans quelles circonstances les réactions de fusion ou de fission nucléaires sont favorisées, on étudie la courbe d'Aston (4) qui donne l'énergie de liaison par nucléon $E_\ell(A, X)/A$ de chaque noyau ${}^A_Z X$ en fonction du nombre de masse A .

- a. Donner la signification physique de Z et de A dans la notation A_ZX d'un noyau. Pourquoi l'énergie de liaison par nucléon est-elle plus intéressante que l'énergie de liaison elle-même ?

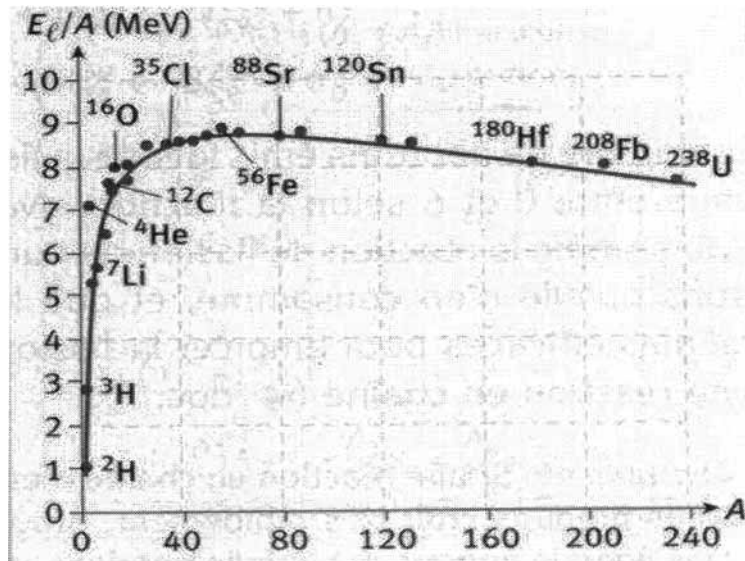


FIG. 4 – La courbe d'Aston qui représente l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau en fonction de son nombre de masse A . L'énergie de liaison est exprimée ici en MeV.

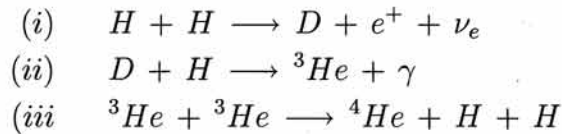
- b. Sachant que l'énergie de liaison $E_\ell(A, X)$ d'un noyau A_ZX est l'énergie minimale qu'il faut lui fournir pour le dissocier en ses nucléons, déterminer $E_\ell(A, X)$ en fonction de la masse M_X du noyau, de A , de Z , de la masse du proton m_p et de celle du neutron m_n . Quelle est l'interaction fondamentale responsable des liaisons entre les nucléons d'un noyau atomique ?
- c. Grâce à des arguments énergétiques, commenter la courbe d'Aston. Où se trouvent les noyaux les plus stables sur cette courbe ? Quels sont ceux susceptibles de donner lieu à une réaction de fusion ? Quels sont ceux susceptibles de donner lieu à une réaction de fission ?
- d. La formule de Bethe-Weizsäcker est une formule empirique qui donne l'énergie de liaison $E_\ell(A, X)$ sous la forme :

$$E_\ell(A, X) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p A^{-1/2} \quad (39)$$

où a_v , a_s , a_c , a_a et a_p sont des paramètres qu'il est possible de fixer en fonction du type de noyau que l'on considère. Si les deux derniers termes ont une origine purement quantique, les trois premiers termes de la formule ont une interprétation classique. Que représentent physiquement ces trois premiers termes ? On expliquera en particulier les puissances de A qui apparaissent dans ces termes.

3. On étudie quelques réactions nucléaires spécifiques qui ont lieu dans le Soleil. Comme on l'a déjà souligné, la principale réaction nucléaire dans le Soleil est celle qui transforme

l'hydrogène en hélium. Cette transformation se déroule en trois étapes :



où H est le proton, D est le deutérium, ${}^4\text{He}$ est le noyau d'hélium et γ est un photon.

- Que sont les particules ν_e et e^+ qui apparaissent dans la première équation (i) ?
- Derrière cette première réaction se cache la "transformation" d'un proton en neutron :



Comment s'appelle cette "transformation" radioactive ? Quelle est l'interaction fondamentale qui est responsable de cette réaction radioactive ?

- Il existe une réaction radioactive similaire qui transforme un neutron en proton.
 - Ecrire l'équation de cette réaction et donner le nom des produits de la réaction.
 - La réaction précédente est au centre de la désintégration radioactive du carbone 14. Ecrire l'équation de désintégration de ${}^{14}\text{C}$.
 - Rappeler la loi de décroissance radioactive du nombre de noyaux de ${}^{14}\text{C}$ en fonction du temps de demi-vie $T_{1/2}$.
 - Décrire le principe de la datation par le carbone 14.
 - Quelle est la raison de la présence de ${}^{14}\text{C}$ dans l'atmosphère ?
- Entre la réaction qui transforme le proton en neutron et celle qui transforme le neutron en proton, laquelle est spontanée ? On justifiera la réponse.
- La réaction (i) a lieu si les deux protons s'approchent à une distance $\delta \sim 10^{-15}\text{m}$. Pourquoi ? Or pour se rapprocher l'un de l'autre, il est nécessaire d'avoir une énergie suffisante pour "lutter" contre la répulsion coulombienne. Sachant que l'énergie d'interaction coulombienne E_{coul} entre deux protons distants de δ est de l'ordre de

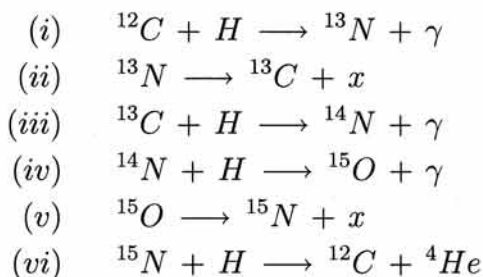
$$E_{coul} \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\delta} \quad (41)$$

où e est la charge élémentaire, en déduire l'ordre de grandeur de la température T_{nucl} dans le Soleil pour que l'énergie thermique des protons soit de l'ordre de grandeur de E_{coul} .

- Comparer les ordres de grandeurs de T_{nucl} et T_\odot (38). Comment expliquer malgré tout que cette réaction nucléaire ait effectivement lieu ?
- Quelle est l'origine du photon dans l'équation (ii) ? Quel est l'ordre de grandeur de son énergie e_γ ? Quel est l'ordre de grandeur de sa fréquence f_γ ? Quelle interaction fondamentale est responsable de l'émission de photons ?
- Les trois étapes décrites ci-dessus donnent le cycle PP-I. Ecrire le bilan de la réaction en supposant que D et ${}^3\text{He}$ ne sont que des "intermédiaires" réactionnels. En négligeant l'énergie de ν_e et de γ , calculer l'énergie E_{PP} fournie par cycle PP-I. En déduire que l'énergie libérée par proton fusionné lors d'un cycle PP-I est approximativement égale à 0,7% de l'énergie de masse du proton, c'est à dire que :

$$E_{PP} \simeq 4 \times 0,007m_p c^2 . \quad (42)$$

6. On peut à nouveau estimer l'âge du Soleil en supposant que l'énergie émise provient exclusivement de l'énergie libérée lors du cycle PP-I. On suppose qu'au départ le Soleil a pour masse M_{\odot} et est constitué d'hydrogène pur. En outre, seuls 10% de la masse du Soleil seront effectivement convertis en hélium, ce qui correspond à la masse du cœur du Soleil où ont lieu les réactions nucléaires. Estimer à nouveau l'âge du Soleil. Cette estimation est-elle meilleure que celle faite dans la partie précédente? Commenter.
7. Il existe de nombreuses autres réactions nucléaires au sein des étoiles qui sont plus ou moins favorisées selon la masse de l'étoile, la température et la nature des éléments constituant l'étoile. Lorsque la température de l'étoile augmente, le cycle CNO-I devient plus efficace que le cycle PP-I. Il est défini par les six étapes suivantes :



- a. Equilibrer les équations (ii) et (iv) en déterminant les produits x . Quelles lois de conservations utilise-t-on pour équilibrer ces réactions?
- b. Faire le bilan de ce cycle. Quel est le rôle du carbone lors du cycle?
8. Connaissez vous les raisons qui font qu'il est très difficile de fabriquer des réacteurs de fusion nucléaire sur Terre? Citer deux raisons qui font de la fusion nucléaire un processus plus intéressant que la fission nucléaire sur Terre.

4 L'effet de lentille gravitationnelle

Dans la théorie de la relativité générale d'Einstein, l'attraction gravitationnelle ne concerne pas que les corps massifs ; elle concerne toutes les sources d'énergie dans l'Univers en particulier la lumière ou de manière générale les ondes électromagnétiques. Ainsi, un rayon lumineux est "attiré" par les corps massifs. Cet effet n'est toutefois visible que si le rayon lumineux passe à proximité d'une masse très importante. Il a été confirmé pour la première fois en 1919 par Eddington : celui-ci a montré lors d'une éclipse totale de Soleil que la position apparente d'une étoile derrière le Soleil pendant l'éclipse n'était pas la même que sa position habituelle.

L'objet de cette partie est de comprendre ce phénomène à travers un modèle simplifié et de voir comment on pourrait observer l'effet de lentille gravitationnelle avec une lentille astronomique.

4.1 La déflexion d'un rayon lumineux par le Soleil

La déviation d'un rayon lumineux par le Soleil peut se comprendre en dressant une analogie avec l'optique. En effet, tout se passe comme si le Soleil modifiait autour de lui l'indice optique du "vide" interstellaire. Cet indice optique "effectif" est non uniforme et il faudrait donc utiliser les lois de l'optique géométrique dans les milieux non-homogènes pour étudier précisément la déviation.

Pour simplifier l'étude, on suppose qu'il existe une zone sphérique de rayon a centrée autour du Soleil (mais hors du Soleil) dans laquelle l'indice optique n est uniforme et différent de l'indice optique dans le vide $n_0 = 1$. L'indice n est toutefois proche de 1 et est donné par la formule (provenant en partie de la relativité générale) :

$$n = 1 + \frac{2\mathcal{G}_N M_\odot}{ac^2}. \quad (43)$$

On donnera une interprétation physique du rayon a par la suite. La déviation s'explique donc comme le résultat de la réfraction aux points I et J du rayon lumineux comme schématisé dans la figure (5).

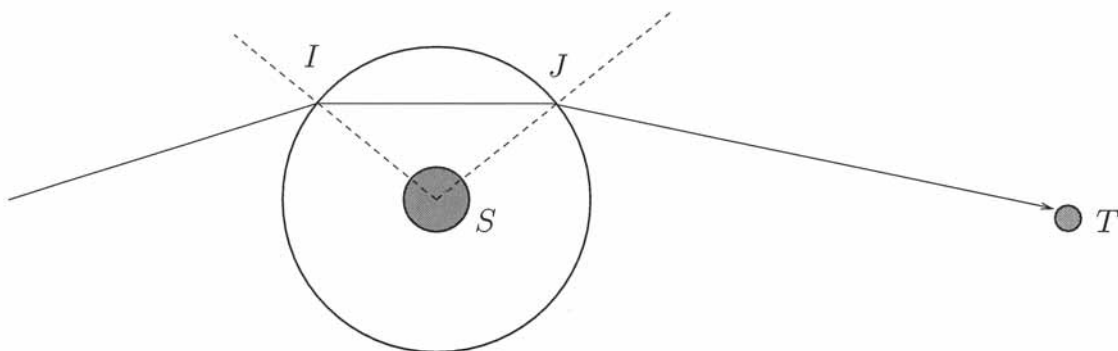


FIG. 5 – La déviation du rayon lumineux s'explique par la présence d'une zone d'indice n centrée autour du Soleil S . En dehors de cette zone, l'indice est $n_0 = 1$. Un rayon provenant d'une étoile "à gauche" subit deux réfractions (en I et J) avant d'être observé sur la Terre T .

On se propose alors de calculer l'angle de déviation (non-orienté) α entre le rayon incident (à gauche du Soleil) et le rayon émergent (à droite du Soleil).

1. Rappeler les lois de Descartes relatives à la réfraction.
2. Reproduire le schéma de la figure (5) et y faire apparaître l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r au point I ainsi que l'angle d'incidence i' et l'angle de réfraction r' au point J . Calculer α en fonction de ces angles et en déduire que :

$$\alpha = 2(i - r). \quad (44)$$

3. Estimer n lorsque a est de l'ordre de grandeur du rayon solaire R_\odot . En déduire que l'angle de réfraction r est nécessairement très proche de l'angle d'incidence i .
4. On cherche alors r sous la forme $r = i + \epsilon$ où $\epsilon \ll i$. Trouver ϵ et en déduire l'expression de l'angle de déviation α en fonction l'angle i en particulier.
5. Le paramètre d'impact p est défini comme la distance la plus courte entre le centre du Soleil et le rayon lumineux. Exprimer p en fonction de a et de l'angle i .
6. En partant de la théorie de la gravitation d'Einstein, on trouve que l'angle de déviation est donné par

$$\alpha = \frac{4G_N M_\odot}{pc^2}$$

où p est à nouveau le paramètre d'impact. Quelle relation doivent satisfaire a et p pour que le modèle simplifié reproduise le résultat précédent ? Cette relation est-elle réaliste ? Comment pourrait-on modifier le modèle simplifié pour se rapprocher du résultat issu de la théorie de la gravitation ?

7. Calculer numériquement α lorsque $p = 1,5R_\odot$.
8. Pourquoi Eddington a-t-il attendu une éclipse de Soleil pour observer cet effet ? Si on suppose que l'étoile d'où provient le rayon lumineux est ponctuelle, quelle est la forme de l'image de cette étoile observée après la déviation ?

4.2 La mesure de l'angle de déflexion par une lunette astronomique

Compte tenu de la valeur de l'angle α et de la faible luminosité du phénomène, il est nécessaire d'utiliser un instrument d'optique pour réaliser l'observation. On suppose ainsi qu'on fait l'observation avec une lunette astronomique dont on va étudier quelques caractéristiques.

a. Les lentilles minces

1. On commence par rappeler quelques propriétés des lentilles minces.
 - a. Qu'est-ce qu'une lentille sphérique ? Sous quelle condition une lentille sphérique peut être supposée mince ?
 - b. Qu'est-ce que l'axe optique d'une lentille ?
 - c. Sous quelles conditions une lentille mince est-elle un système optique stigmatique ? Énoncer précisément ces conditions.
 - d. Comment sont définis les foyers objet F et image F' d'une lentille ?
2. On note O le centre d'une lentille mince et f' sa distance focale image.
 - a. Écrire alors la relation de conjugaison avec origine en O qui permet de déterminer la position de l'image ponctuelle A' d'un objet ponctuel A sur l'axe optique. On pourra noter $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$.

- b. Exprimer p' en fonction de p et déterminer la distance la plus petite entre un objet réel A et une image réelle A' en fonction de f' . On suppose dans cette question que la lentille est convergente.
- c. On considère un objet AB étendu perpendiculaire à l'axe optique : A se trouve sur l'axe optique et B est hors de l'axe. Tracer géométriquement l'image $A'B'$ de cet objet, lorsque la lentille est convergente, dans les situations suivantes :
- L'objet est réel et $OA > f'$.
 - L'objet est réel et $OA < f'$.
 - L'objet est virtuel.
- Dans chacun des cas, on précisera la nature de l'image. On expliquera les règles de construction.
- d. Définir le grandissement transversal γ d'une lentille mince. Exprimer γ en fonction de p et p' .
- e. A quelle condition sur la position de l'objet observe-t-on une image droite plus grande que l'objet ? Quel instrument d'optique simple fonctionne sur ce principe ?

b. La lunette astronomique

La lunette astronomique est formée de deux lentilles minces convergentes : une lentille L_1 de centre O_1 et de focale f'_1 ; une lentille L_2 de centre O_2 et de focale f'_2 . Une telle lunette est schématisée sur la figure (6). Dans toute cette partie, on étudie la lunette dans les conditions de stigmatisme approché.

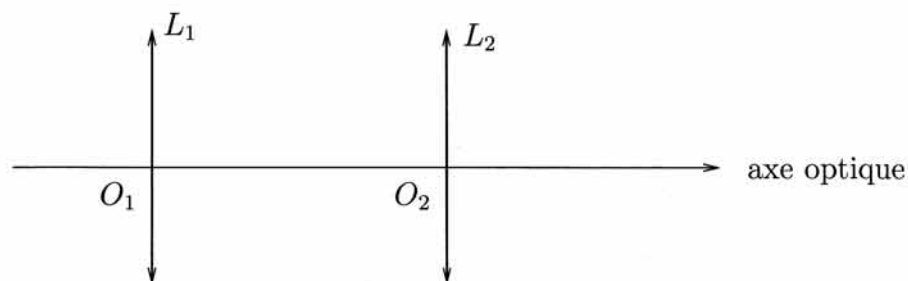


FIG. 6 – Modélisation d'une lunette astronomique

- La lunette astronomique est un système afocal.
 - Que signifie cette expression ? Pourquoi est-il intéressant qu'une lunette astronomique soit afocale ?
 - Déterminer alors l'encombrement de la lunette, à savoir la distance $d = O_1O_2$ en fonction des focales des deux lentilles.
- On observe à travers la lentille un objet ponctuel B à l'infini hors de l'axe optique. Les rayons qui proviennent de B forment donc un faisceau de rayons parallèles entre eux et faisant un angle θ avec l'axe optique. L'angle est orienté de l'axe optique vers le rayon. Tracer l'image d'un rayon du faisceau incident à travers la lunette.
- Chaque rayon du faisceau émergent fait un angle θ' avec l'axe optique. Cet angle est orienté selon la même convention que l'angle θ . Déterminer le grossissement $G = \theta'/\theta$ de la lunette astronomique en fonction des focales f'_1 et f'_2 . Commenter le signe de G .

4. On désire alors mesurer l'angle de déviation α du rayon lumineux en utilisant cette lunette astronomique. Pour cela on règle la lunette de telle sorte que son axe optique soit confondu avec l'axe passant par le Soleil et l'étoile d'où provient le rayon lumineux.
 - a. Dans ce cas, quelle est la valeur absolue de l'angle θ que font les rayons provenant de l'étoile après la déviation avec l'axe optique ?
 - b. Déterminer alors la valeur absolue de l'angle θ' et faire l'application numérique en prenant $p = 1,5R_{\odot}$, $f'_1 = 1$ m et $f'_2 = 5$ cm. Peut-on observer un tel angle à l'œil nu ?
5. L'un des problèmes importants dans l'observation de cet effet par la lunette est le manque éventuel de luminosité. Pour limiter ce problème, l'observateur doit placer son œil dans les meilleures conditions à la sortie de lunette.
 - a. La position de l'œil est-elle importante pour observer une image nette de l'étoile ?
 - b. Le diaphragme d'ouverture de la lunette astronomique est la lentille, L_1 ou L_2 , qui limite la quantité de lumière qui entre dans l'instrument. Quelle lentille joue alors le rôle de diaphragme d'ouverture en supposant que les deux lentilles ont le même diamètre ?
 - c. Le cercle oculaire est défini comme le conjugué image du diaphragme d'ouverture par la lunette. Déterminer alors la position $\overline{O_2C}$ du centre du cercle oculaire en fonction de f'_1 et f'_2 .
 - d. Déterminer également le diamètre d du cercle oculaire en fonction de G et du diamètre D du diaphragme d'ouverture.
 - e. Quel est l'intérêt du cercle oculaire ? Où l'observateur doit-il placer son œil pour avoir le plus grand confort visuel ?

En guise de conclusion, soulignons que même si l'expérience d'Eddington a permis de valider expérimentalement la théorie de la gravitation d'Einstein dès 1919, il a fallu attendre les années 1960 pour que les physiciens s'y intéressent vraiment avec la découverte fortuite du fond diffus cosmologique. Or le fond diffus cosmologique est interprété comme une preuve de la théorie du big-bang...