

SESSION 2012

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : GÉNIE ÉLECTRIQUE

**COMPOSITION D'AUTOMATIQUE
ET D'INFORMATIQUE INDUSTRIELLE**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

Asservissement d'un stabilisateur cardiac actif

Avertissement

L'épreuve se compose de parties indépendantes qui peuvent être traitées dans un ordre arbitraire. Les candidats sont donc invités à lire entièrement l'énoncé avant de commencer à composer.

Il est rappelé que les candidats doivent impérativement utiliser les notations indiquées dans le texte ou les figures. Les candidats sont invités à rédiger les réponses relatives aux différentes parties de l'énoncé sur des feuilles séparées.

Les candidats doivent présenter les calculs clairement, dégager et encadrer les résultats relatifs à chaque question référencée dans le sujet. Les correcteurs recommandent d'écrire lisiblement, de numéroter chaque copie en y faisant apparaître clairement la partie traitée.

Si le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement dans votre copie.

1 Description du dispositif de stabilisation active

N.B. Aucune question n'est posée dans cette partie.

1.1 Contexte de la chirurgie cardiaque

Une des opérations cardiaques les plus courantes est le pontage coronarien. Il permet de remédier à une insuffisance du débit en sang pour l'alimentation sanguine du cœur. Il consiste en la dérivation d'un flux sanguin non vital vers la zone du cœur dont l'irrigation doit être renforcée.

Auparavant, ces opérations s'appuyaient sur la mise en place d'une circulation et d'une oxygénation extra-corporelle par l'utilisation d'une machine *cœur-poumon artificiel*. Désormais, une partie des opérations se fait sur cœur battant, permettant ainsi de réduire les complications dues au débranchement du cœur. Afin d'immobiliser la portion du cœur à opérer, un *stabilisateur cardiaque* est mis en place. Il s'agit de dispositifs comportant trois parties :

- une partie distale (distante du chirurgien) destinée à s'accrocher à la surface du cœur. Généralement, elle comprends deux doigts équipés de trous reliés à un système d'aspiration destiné à adhérer à la surface du cœur par succion.
- un système de fixation s'arrimant à la table d'opération (partie proximale : proche du chirurgien). Cette partie est généralement équipée d'un système de positionnement manuel permettant de rigidifier le système une fois la position désirée atteinte.
- une tige permettant de relier rigidement la partie distale à la partie proximale et d'assurer une certaine immobilisation de la partie distale.

Une limitation de ces dispositifs passifs est que l'immobilisation de la partie distale, en contact avec le cœur, n'est pas parfaite. En effet, les efforts importants que le cœur applique sur le stabilisateur, de l'ordre de quelques Newton, conjugués avec la raideur limitée du stabilisateur, entraînent des déplacements de l'ordre du millimètre au niveau de la partie distale. Si les chirurgiens expérimentés sont capables d'opérer en présence de ces déplacements résiduels, il n'en demeure pas moins qu'ils sont une gêne qui ralentit l'opération et nécessite un entraînement du chirurgien très important. Idéalement, il faudrait que les mouvements résiduels soient inférieurs à 0,1 mm pour, ce qui correspond à la précision du geste pour effectuer le pontage.

1.2 Stabilisation active

Compte-tenu de la distance entre la partie proximale et la partie distale, il est illusoire de chercher à assurer une immobilisation par une structure passive. Une structure active, équipée d'actionneurs et de capteurs s'impose donc. Différentes solutions de stabilisation active ont été développées ou sont en cours de développement à Strasbourg par l'équipe Automatique-Robotique-Vision du Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection. Dans le présent problème, on s'intéresse à une première version d'un dispositif, appelé *Cardiolock*, destiné à assurer l'immobilisation dans une seule direction de l'espace. La version ultérieure s'adresse à deux directions, ce qui est considéré comme suffisant pour respecter le cahier des charges.

1.3 Cahier des charges

- Force maximale exercée par le cœur : 5 N
- Déplacement résiduel du système actif : 0,1 mm

1.4 Description du Cardiolock 1

Un plan CAO du dispositif est présenté sur la figure 1. La partie gauche constitue le mécanisme d'actionnement dont une vue détaillée est donnée sur la figure 2. Compte-tenu des faibles débattements nécessaires, les articulations ont été réalisées par affaiblissement de matière. Cette technique a l'avantage de n'occasionner aucun jeu. Le mécanisme parallèle comprend un actionneur piézo-électrique linéaire. La translation de l'actionneur entraîne la rotation de la base de la tige.

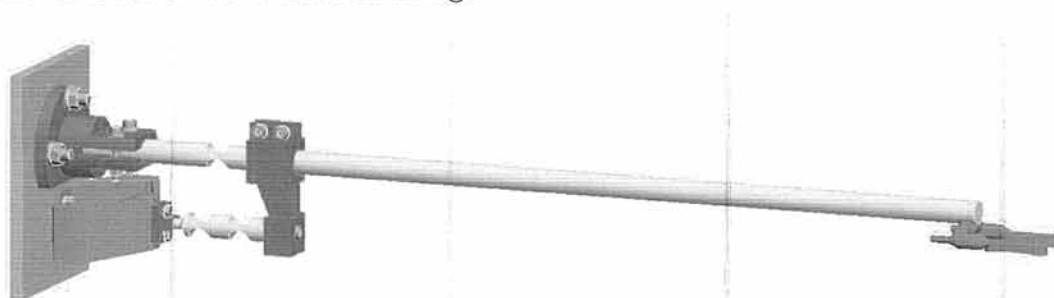


FIGURE 1 – Vue CAO du Cardiolock 1

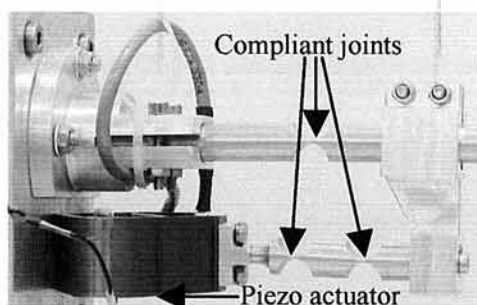


FIGURE 2 – Vue du mécanisme d'actionnement

Dans la présente étude, on se limitera à la prise en compte des déformations de la tige en considérant que le Cardiolock est parfaitement encastré sur une base immobile. Une vue des déformations amplifiées produites par le cœur est présentée sur la figure 3. Sur la figure 4, on observe comment la rétractation de l'actionneur permet de compenser la déformation de la tige.

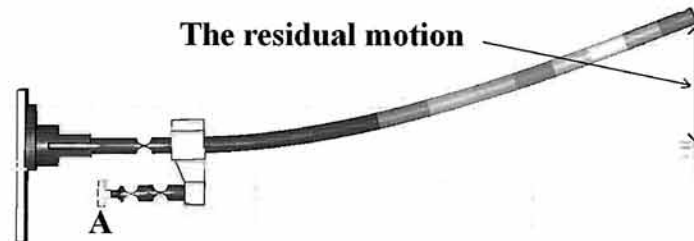


FIGURE 3 – Effet des efforts sur la tige du Cardiolock

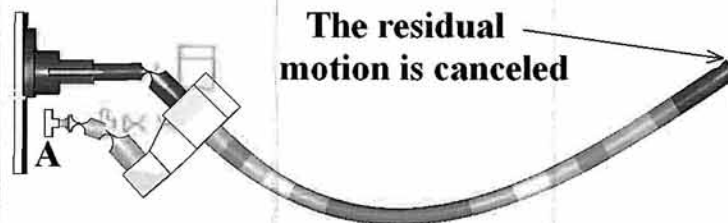


FIGURE 4 – Compensation des déformations du Cardiolock

2 Dimensionnement

Le dimensionnement consiste ici à vérifier les caractéristiques de l'actionneur permettant de satisfaire le cahier des charges. Une représentation schématique du dispositif actionné sans déformation est donnée sur la figure 5. On note b , c , d , e et L les longueurs des différentes parties du dispositif. Les affaiblissements de matière représentés par les points A, D et E réalisent des articulations rotoïdes. Aux points B et C, la structure est rigide. Sur la figure, on observe que le déplacement u de l'actionneur entraîne un déplacement angulaire α et un déplacement de l'effecteur de longueur y .

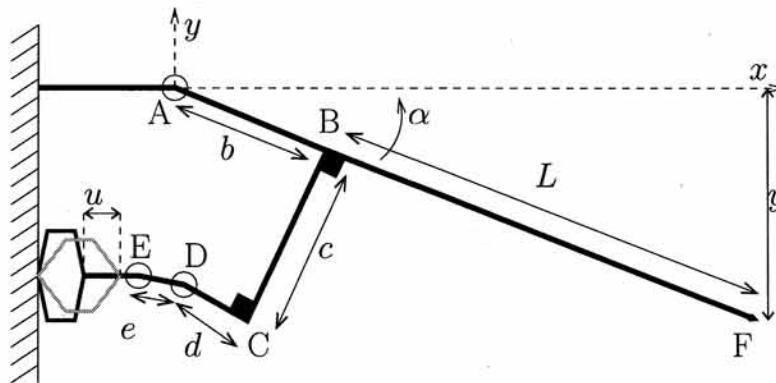


FIGURE 5 – Schéma de principe de l'actionnement

- 2.1 Déterminez les coordonnées du point D dans le repère (A, x, y) correspondant à un angle α quelconque.
- 2.2 Déterminez les coordonnées du point E dans le repère (A, x, y) correspondant à un déplacement u de l'actionneur. On rappelle que $u > 0$ correspond à une contraction de l'actionneur.
- 2.3 Déterminez la relation entre le déplacement u de l'actionneur et l'angle α .
- 2.4 Dans l'hypothèse des petits déplacements, déterminez le gain entre le déplacement u de l'actionneur et le déplacement vertical y de l'extrémité de la tige.

- 2.5 On prendra comme valeurs numériques $L = 19 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$ et $c = 2 \text{ cm}$. Déterminez l'allongement maximal de l'actionneur permettant un déplacement de la tige de 1 mm .
- 2.6 Dans l'hypothèse où les efforts exercés au niveau des articulations sont nuls, déterminez l'effort maximal que doit pouvoir appliquer l'actionneur s'il doit pouvoir compenser une force de 5 N appliquée verticalement (selon (Oy)) au bout de la tige. Dans ce calcul, on supposera que la tige est rigide et que la compensation permet de la maintenir à sa position d'équilibre.

3 Modélisation dynamique

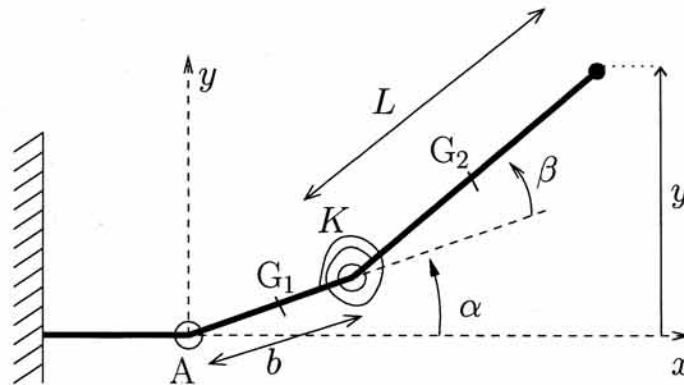


FIGURE 6 – Schéma de principe en vue de l'établissement du modèle dynamique. On remarquera que la position présentée correspond à α et β positifs.

Dans cette partie, on travaillera sur un modèle simplifié correspondant au schéma de la figure 6 dans lequel on considère que l'actionneur agit sur la position angulaire α par un couple C . On tiendra compte de la flexibilité de la tige de manière approchée : on assimilera la déformation à une articulation placée à la base de la tige, d'angle β , ainsi qu'une raideur K et un amortisseur de coefficient de frottement fluide f . Ainsi, le système est assimilable à un bras manipulateur plan à deux degrés de liberté dont seul le premier degré de liberté est actionné. On négligera les effets de la pesanteur dans l'ensemble du problème. On suppose que les segments sont homogènes et on note G_1 et G_2 leurs centres de masse respectifs. On note m_1, m_2 les masses des segments ; J_1, J_2 leurs inerties par rapport à des axes orthogonaux au plan passant par leurs centres de masse respectifs et on supposera que les segments sont homogènes. On note $q = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ et $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$. On note y le déplacement vertical de la tige.

3.1 Déterminez l'expression de l'énergie cinétique sous la forme

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \text{ en donnant l'expression de la matrice } M(q).$$

- 3.2 A partir de l'équation d'Euler-Lagrange (voir annexe), déterminez les deux équations dynamiques pour chacune des deux articulations. A ce stade, on ne tiendra pas compte des frottements ni de la force perturbatrice. Par contre, on prendra en compte la présence d'un couple C appliqué sur l'articulation α . Pour l'effet de la raideur K , nous proposons de ne pas la prendre en compte dans le calcul de l'énergie potentielle qui sera alors nulle et de tenir compte d'un couple sur l'articulation β égal à $-K\beta - f\dot{\beta}$. A ce stade, on ne tiendra pas compte des efforts extérieurs appliqués par le cœur sur l'extrémité de la tige.
- 3.3 Déterminez l'expression du déplacement vertical y de la tige en fonction des angles α et β . Puis donnez l'expression simplifiée dans le cas des petits déplacements.
- 3.4 Dans le formalisme de Lagrange, il est possible de tenir compte d'une force extérieure sous la forme d'un couple articulaire équivalent. Déterminez les couples articulaires $C_{F\alpha}$ et $C_{F\beta}$ équivalents à une force de module $F(t)$ appliquée en bout de tige dans le sens vertical ascendant (direction y). Vous pourrez vous appuyer sur le principe des travaux virtuels et considérer que le travail produit par les couples $C_{F\alpha}$ et $C_{F\beta}$ lors de déplacements $d\alpha$ et $d\beta$ au niveau articulaire est identique au travail produit au niveau de l'effecteur par la force F . Donnez ensuite les nouvelles expressions des équations dynamiques correspondantes.

3.5 On considère désormais que l'angle α est parfaitement asservi à une référence α^* et que la mesure est le déplacement vertical de la tige. En tenant compte de la perturbation F et en se limitant aux petits déplacements et aux petites vitesses, déduisez-en le modèle linéaire avec comme entrées la référence α^* et la perturbation et comme sortie le signal de mesure. Vous donnerez ce modèle sous forme d'une fonction de transfert. Par la suite on notera $u(t) = \alpha^*(t)$ le signal d'entrée du système asservi en position articulaire et $y(t)$ le signal de mesure. Leurs transformées de Laplace seront notées respectivement $u(s)$ et $y(s)$. Pour la perturbation $F(t)$, on notera $F(s)$ la transformée de Laplace. Vous donnerez le modèle sous la forme $y(s) = G(s)u(s) + H(s)F(s)$.

4 Analyse du système en boucle ouverte

On suppose que le système a comme modèle $y(s) = G(s)u(s) + H(s)F(s)$ où la fonction de transfert s'écrit :

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (1)$$

$$H(s) = \frac{c_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2)$$

avec $a_2 = 1.33 \times 10^{-3}$, $a_1 = 0.1$, $a_0 = 100$, $b_2 = -1.33 \times 10^{-5}$, $b_1 = 0.022$, $b_0 = 22$ et $c_0 = 0.04$.

- 4.1 Calculez les pôles et les zéros de $G(s)$. Que peut-on en conclure ?
- 4.2 Calculez le gain statique et le gain haute fréquence du système. Qu'en déduisez-vous de particulier sur la réponse indicielle du système ?
- 4.3 Sachant que l'asservissement est prévu pour avoir une bande passante ne dépassant pas 20 Hz, déduisez-en un modèle simplifié valable dans la plage $[0 - 20 \text{ Hz}]$. On notera $G_1(s)$ cette fonction de transfert.
- 4.4 Donnez l'allure approximative des diagrammes de Bode de $G(s)$ et de $G_1(s)$. Vous pourrez utiliser le document réponse à cet effet.

5 Synthèse d'un régulateur à temps continu

On considère le modèle du système sous la forme $y(s) = G_1(s) (u(s) + K_F F(s))$ avec :

$$G_1(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3)$$

et avec $a_2 = 1.33 \times 10^{-3}$, $a_1 = 0.1$, $a_0 = 100$, $b_0 = 22$ et $K_F = 1.8 \times 10^{-3}$.

Le but de l'asservissement est d'atténuer l'effet des perturbations F sur la mesure y grâce à une action appropriée sur u .

5.1 Correction proportionnelle

On choisit dans un premier temps un correcteur par retour de sortie statique $u(s) = -K y(s)$ ou K est un gain positif.

- 5.1.1 Expliquez la propriété que doit satisfaire le correcteur pour rejeter le mieux possible les perturbations. Quelles contraintes s'opposent à la réalisation de cette situation idéale ?
- 5.1.2 Déterminez l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée entre la perturbation F et la mesure y .
- 5.1.3 Déterminez la valeur de K permettant une atténuation de 20 dB du gain statique par rapport à la situation en boucle ouverte.
- 5.1.4 Évaluez approximativement la marge de phase obtenue avec ce réglage. Précisez et justifiez les approximations effectuées.
- 5.1.5 Déterminez le gain K permettant d'assurer une marge de phase de l'ordre de 90° ? Quelle est alors, en terme de gain statique, l'atténuation en boucle fermée par rapport à la situation en boucle ouverte sur le transfert entre F et y ?
- 5.1.6 Concluez sur l'utilisation d'une correction proportionnelle.

5.2 Correction intégrale

On considère une correction par retour dynamique de sortie $u(s) = -K(s) y(s)$ avec un correcteur intégral $K(s) = \frac{K_I}{s}$ et on choisira la bande passante à une fréquence inférieure à la fréquence de résonance.

- 5.2.1 Donnez l'allure du diagramme de Bode du système asservi en boucle ouverte. Vous pourrez utiliser le document réponse à cet effet.

- 5.2.2 Déterminez K_1 de manière à assurer une fréquence de coupure à 0 dB du gain en boucle ouverte égale au dixième de la fréquence de résonance. Justifiez les éventuelles approximations que vous seriez amenés à faire.
- 5.2.3 Évaluez approximativement la marge de gain et la marge de phase de l'asservissement en justifiant les éventuelles approximations que vous seriez amenés à faire.

6 Synthèse d'un régulateur à temps discret

Le régulateur est implanté dans un calculateur numérique. La mesure $y(t)$ est acquise aux instants $t_k = kT_e$ où $T_e = 0.1$ ms est la période d'échantillonnage : $y_k = y(t_k)$. La commande $u(t)$ est bloquée sur les périodes $[t_k; t_{k+1}[$, égale à u_k . On considère le modèle du système donné en début de la partie précédente. La loi de commande s'écrit en temps discret $u(z) = -K(z)y(z)$ où $u(z)$ et $y(z)$ sont les transformées en \mathcal{Z} respectivement des signaux échantillonnés u_k et y_k ; $K(z)$ est la fonction de transfert en \mathcal{Z} du correcteur.

- 6.1** Pour le correcteur à temps continu $K(s) = K_1/s$, avec $K_1 = 100$, donnez la fonction de transfert en z du correcteur à temps discret $K(z)$ obtenue par la transformée bi-linéaire de Tustin. On précise que la transformée bilinéaire de Tustin est obtenue à partir du développement limité de l'exponentielle suivant : $\exp(\epsilon) = \frac{1+\epsilon/2}{1-\epsilon/2}$.
- 6.2** Donnez l'équation aux récurrences à implanter sur le correcteur pour réaliser la loi de commande.

Dans la suite, on s'intéressera à une représentation à temps discret de l'ensemble du système dont le modèle à temps continu est donné au début de la partie précédente. Pour cela, on considérera un schéma équivalent où la perturbation $F(t)$ est remplacée par une perturbation à temps discret $F_k = F(t_k)$ où k est le numéro de l'échantillon. Quant à la commande, on considérera que la valeur issue du calculateur est bloquée à l'ordre zéro.

- 6.3** Pour un système à temps continu de fonction de transfert $G(s)$ alimenté par un signal à temps discret bloqué à l'ordre zéro et échantillonné en sortie, montrez que la fonction de transfert équivalente est $G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \circ \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right)$ où \mathcal{Z} représente la transformée en \mathcal{Z} et \mathcal{L} représente la transformée de Laplace.
- 6.4** A partir du modèle donné en (3), calculez la fonction de transfert $G_1(z)$ entre la commande $u(z)$ et la mesure $y(z)$. Vous pourrez vous appuyer sur la table des transformées donnée en annexe.

- 6.5** En tenant compte du correcteur précédemment défini, déterminez la fonction de transfert en boucle fermée entre $F(z)$ et $y(z)$ pour $K_1 = 100$.
- 6.6** Par quel critère serait-il possible de vérifier rapidement la stabilité de la boucle fermée à partir de la fonction de transfert déterminée à la question précédente ?

7 Commande par retour d'état

Dans cette partie, on s'intéresse au développement d'une loi de commande de type retour d'état pour le modèle à temps continu. Le modèle dynamique est donné sous la forme suivante :

$$a_2\ddot{\beta} + a_1\dot{\beta} + a_0\beta = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0u + gF \quad (4)$$

où u est le signal de commande, F est la force perturbatrice et β est la position angulaire de la tige dans l'hypothèse d'un mouvement articulaire équivalent. La mesure est donnée par :

$$y = c_0\beta + d_0u \quad (5)$$

Les valeurs numériques sont : $a_2 = 1.33 \times 10^{-3}$, $a_1 = 0.1$, $a_0 = 100$, $b_2 = -1.33 \times 10^{-5}$, $b_1 = 0.022$, $b_0 = 22$, $g = 0.04$, $c_0 = 0.2$ et $d_0 = 0.22$.

7.1 Déterminez un modèle d'état du système. Vous pourrez prendre comme variables d'état $x_1 = a_2\beta - b_2u$ et $x_2 = \frac{dx_1}{dt} + a_1\beta - b_1u$. La représentation sera donnée sous la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + B_1u + B_2F \quad (6)$$

$$y = Cx + D_1u + D_2F \quad (7)$$

7.2 Montrez que le système est commandable et observable.

On suppose dans un premier temps que l'état $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ est disponible et on envisage une commande par retour d'état $u = -Kx$.

7.3 Déterminez K de manière à assurer que les pôles de la boucle fermée soient égaux à $-20 \pm j 20$ rad/s.

Au lieu de chercher à implanter le correcteur sous forme de retour d'état, ce qui nécessite de reconstruire les états, on cherche à traduire la loi de commande sous la forme d'un retour de sortie dynamique $u(s) = -K(s)y(s)$.

7.4 En remplaçant les états par leurs expressions en fonction des mesures, des commandes et de leurs dérivées, déterminez la fonction de transfert $K(s)$ du correcteur par retour de sortie dynamique équivalent au retour d'état.

A Équation d'Euler-Lagrange

Soit un système mécanique articulé présentant n degrés de liberté dont les positions articulaires sont notées q_k , $k = 1, \dots, n$. Ces positions peuvent être linéaires (en m) ou angulaires (en rad). On note q le vecteur des positions articulaires et \dot{q} celui des vitesses. L'énergie cinétique est notée $E_c(q, \dot{q})$. L'énergie potentielle est notée $E_p(q)$. On appelle Lagrangien la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle : $L(q, \dot{q}) = E_c - E_p$.

En situation libre, c'est-à-dire sans l'effet de forces extérieures, l'évolution d'un système mécanique est régie par les équations d'Euler-Lagrange pour chacun de ses degrés de liberté :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (8)$$

pour $k = 1, \dots, n$.

Dans le cas où le $k^{\text{ème}}$ degré de liberté est soumis à une force (si q_k est une position linéaire) ou un couple (si q_k est une position angulaire), noté Γ_k , l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \Gamma_k \quad (9)$$

B Transformées de Laplace et en Z

Dans le tableau ci-dessous, $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac et $u(t)$ est l'échelon unitaire.

$x(t)$	$x(s)$	$x(z)$
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$\exp(-at)u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-\exp(-aT_e)}$

C Abaques des systèmes du second ordre

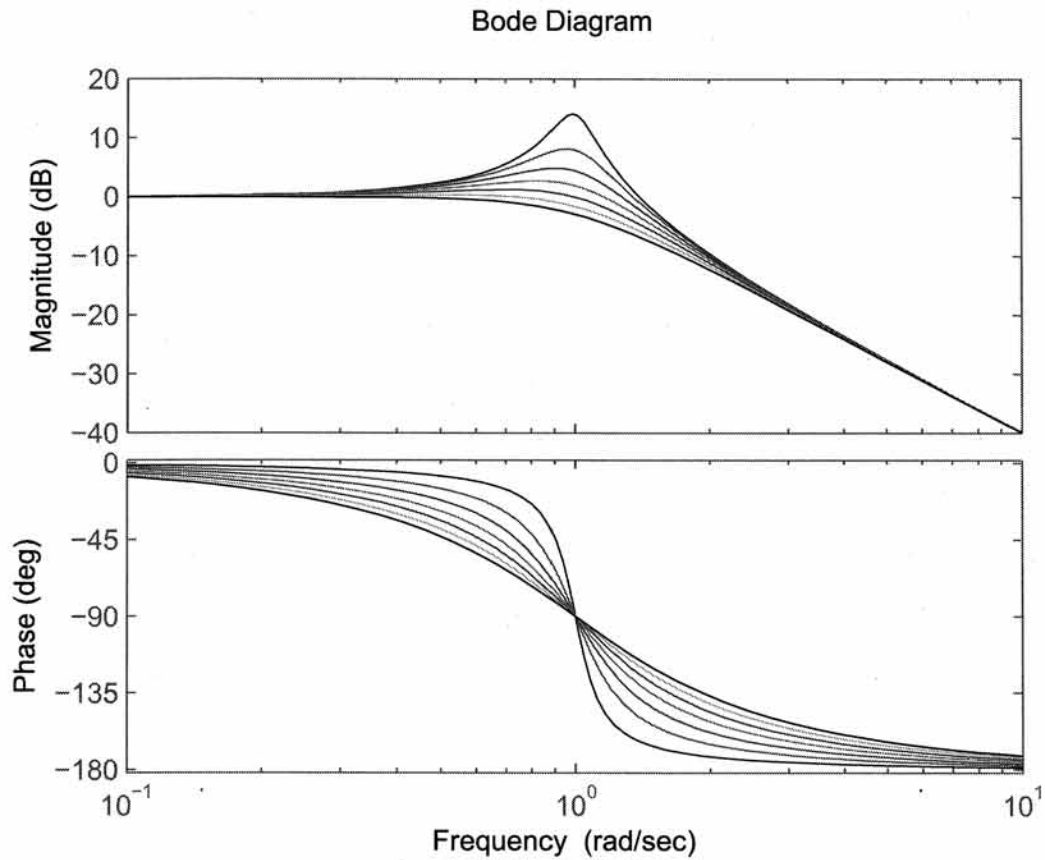
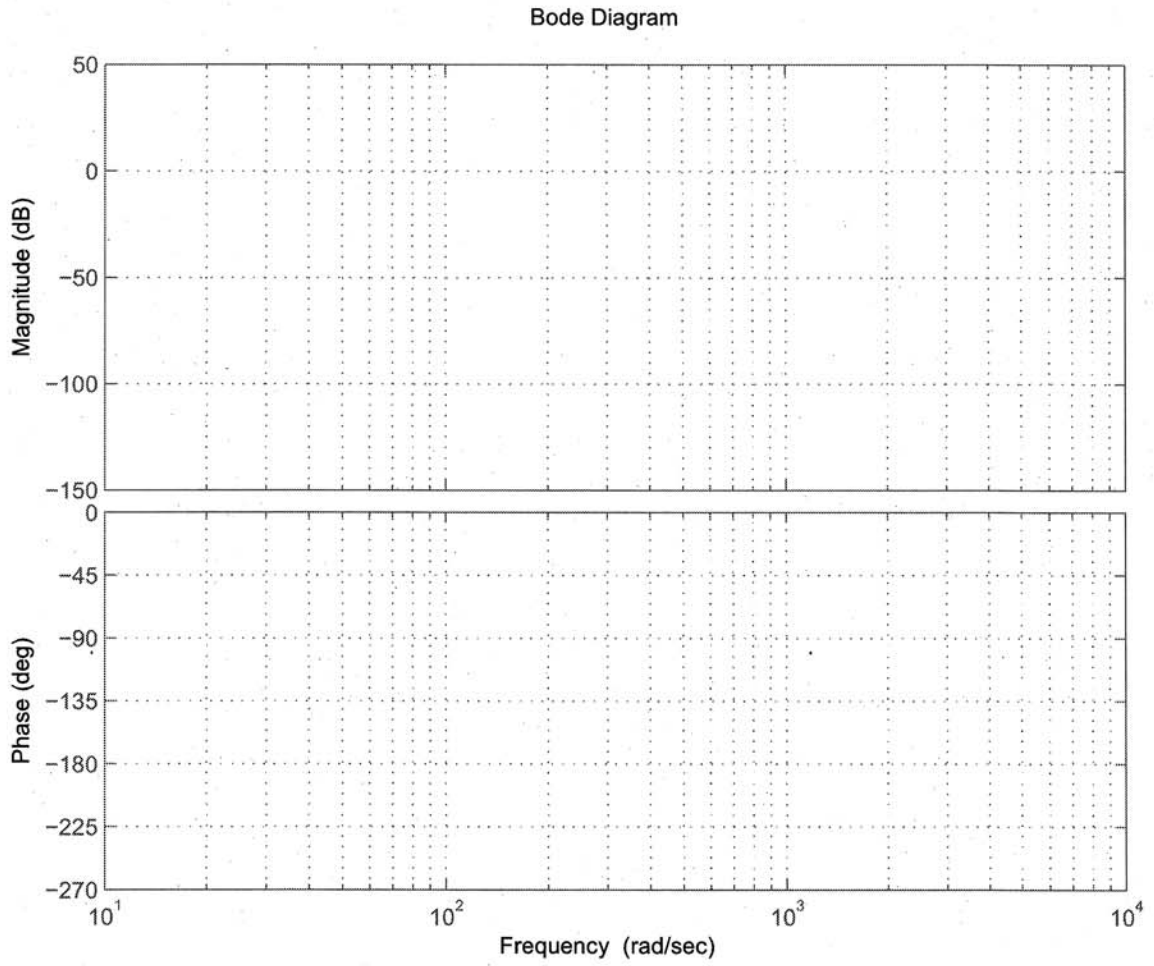


FIGURE 7 – Diagramme de Bode des systèmes du second ordre $\frac{1}{s^2+2\xi s+1}$ pour $\xi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ et 0.7 .

D Documents réponses

D.1 Diagramme de Bode du système en boucle ouverte (question 4.4)



D.2 Diagramme de Bode du système en boucle ouverte corrigé (question 5.2.1)

