

SESSION 2012

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : GÉNIE CIVIL

**ÉPREUVE DE MODÉLISATION
DES MATÉRIAUX ET DES OUVRAGES**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Cette épreuve est constituée de deux sujets indépendants :

- **modélisation des matériaux et patrimoine ;**
- **modélisation mécanique des ouvrages.**

Il est demandé aux candidats de traiter les deux sujets sur des copies séparées.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Epreuve de modélisation des matériaux et des ouvrages

Sujet matériaux et patrimoine

Le sujet proposé comprend deux parties indépendantes. La première partie (PARTIE A) porte sur l'évaluation des performances d'un géotextile utilisé dans des terrassements routiers. La seconde partie (PARTIE B) porte sur l'utilisation de recyclés dans les matériaux routiers cimentaires.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. Pour chaque question, en complément des résultats de calculs proprement dits, il conviendra de justifier les choix effectués et les calculs réalisés, et de commenter les résultats obtenus.

PARTIE A – Caractérisation mécanique et environnementale d'un géotextile

Les géosynthétiques et plus particulièrement les géotextiles sont des produits tissés, non tissés ou tricotés, perméables et fabriqués à base de polymère. Ils se présentent sous forme de nappe, de bande ou de structure tridimensionnelle et sont utilisés en contact avec le sol ou avec d'autres matériaux dans le domaine des terrassements routiers. Les géotextiles ont pour fonctions principales de séparer, filtrer et renforcer le sol. Parmi les principaux avantages de ces matériaux, on peut citer :

1. La préservation des ressources naturelles.
2. La protection des ressources en eau.
3. La réduction de la dépendance aux énergies fossiles et des émissions de gaz à effet de serre.
4. La réduction du temps de réalisation et des coûts de chantier.
5. L'allongement de la durée de vie des ouvrages.
6. L'amélioration de la réversibilité des ouvrages.

A1) Justifier point par point les affirmations précédentes en vous appuyant sur des exemples précis.

A2) Expliquer pourquoi, d'après certains experts, les géosynthétiques et donc les géotextiles sont au service du développement durable.

Dans le cadre de terrassements routiers (voir figure 1), on propose de déterminer certaines caractéristiques physiques et mécaniques d'un géotextile utilisé en séparation et renforcement de corps de chaussée.

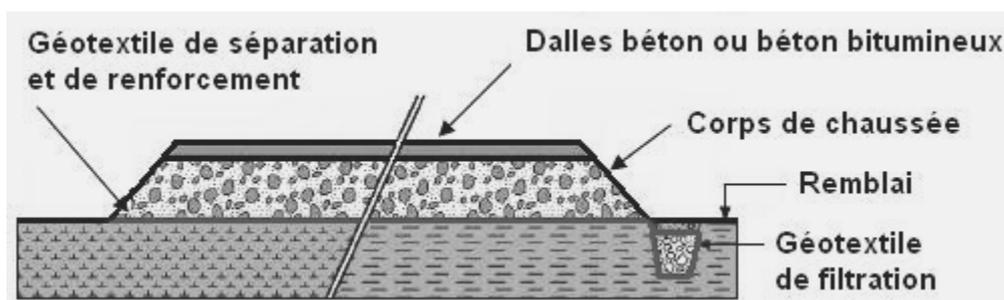


Figure 1. Terrassements routiers.

Pour cette application, les caractéristiques recherchées portent principalement sur : la résistance à la traction, la résistance au poinçonnement statique, la perméabilité à l'eau et la filtration. Ces caractéristiques sont déterminées dans un cadre normatif selon, entre autres, quatre essais :

1. Géotextiles - Essai de traction des bandes larges (NF EN ISO 10319).
2. Géosynthétiques - Essai de poinçonnement statique ou essai CBR (NF EN ISO 12236).
3. Géotextiles et produits apparentés - Détermination des caractéristiques de perméabilité à l'eau normalement au plan, sans contrainte mécanique (NF EN ISO 11058).
4. Géotextiles et produits apparentés - Détermination de l'ouverture de filtration caractéristique (NF EN ISO 12956).

A3) Justifier pourquoi il est pertinent d'évaluer ces propriétés dans le cadre d'une application d'un géotextile en terrassements routiers (Figure 1).

Dans un premier temps, les essais de caractérisation du géotextile, appelé Géo1, portent sur la résistance à la traction. Des essais de traction sur bandes larges, à ± 10 N, ont donc été menés selon la norme NF EN ISO 10319. Le principe de l'essai est décrit sur la figure 2. La texture du géotextile est montrée sur la figure 3. Les résultats des essais sont donnés sur les graphes de la figure 4.

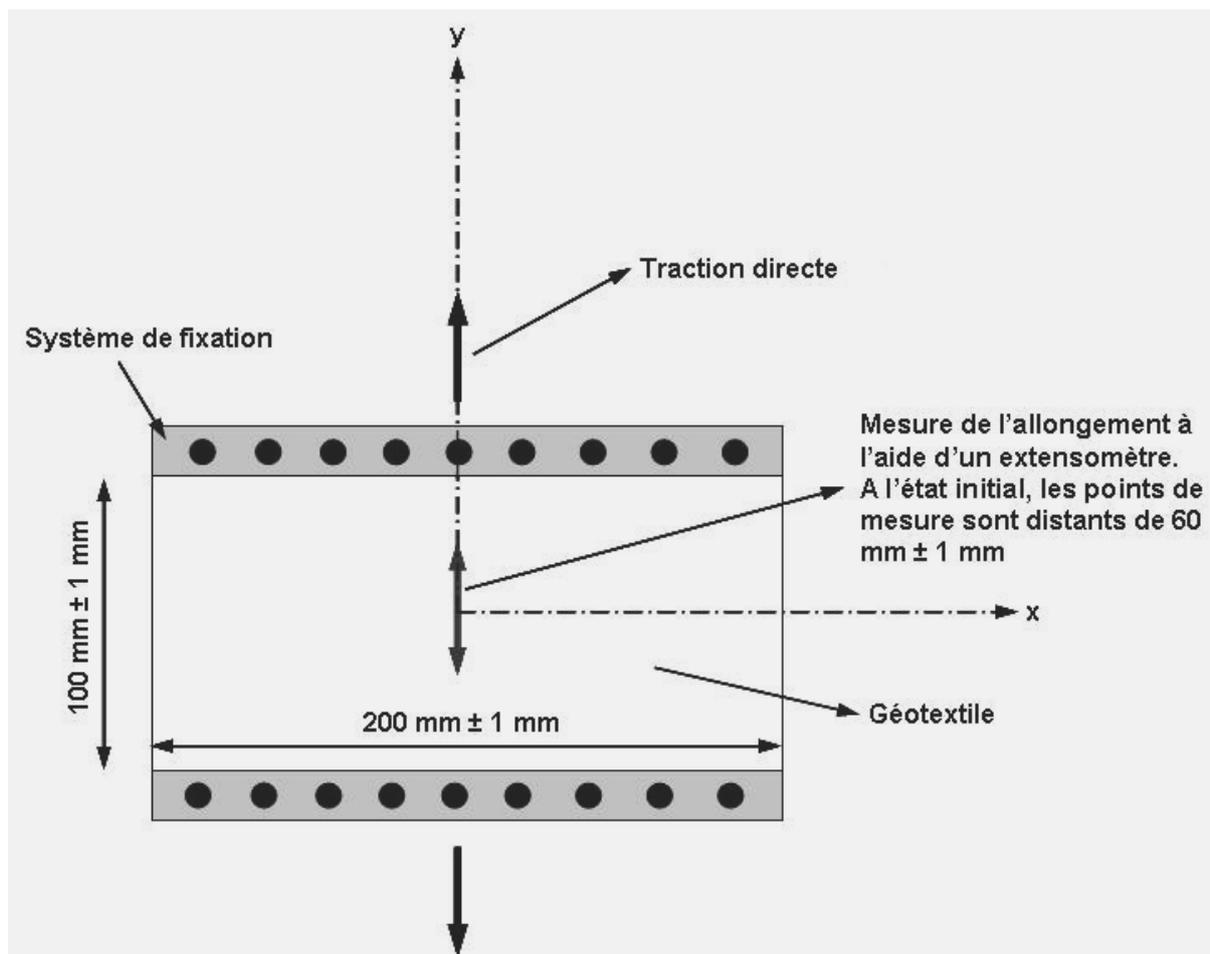


Figure 2. Principe de l'essai de traction directe sur bandes larges de géotextile (Géo1).

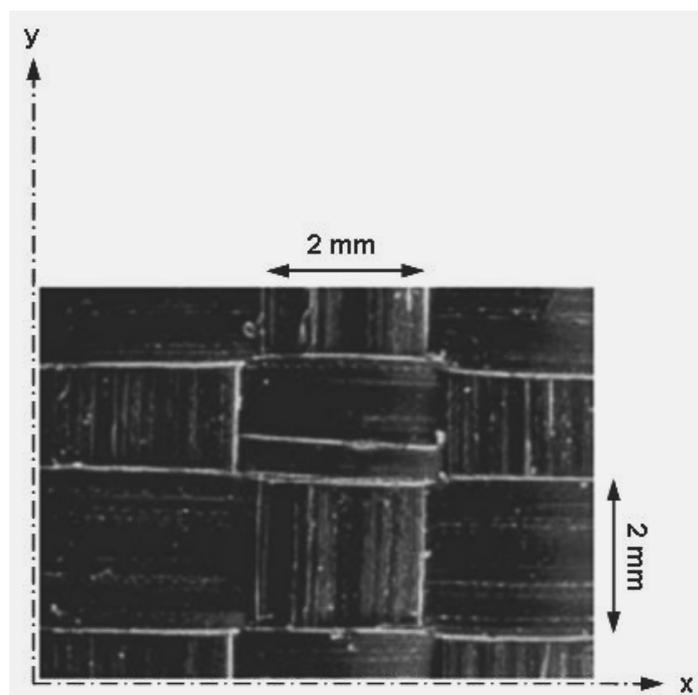


Figure 3. Texture bidirectionnelle du géotextile (Géo1) tissé de bandelettes de polypropylène.

Pour les utilisateurs de géotextile, il est distingué un sens production (direction x) et un sens travers (direction y).

A4) Pourquoi la norme distingue-t-elle un sens production et un sens travers ?

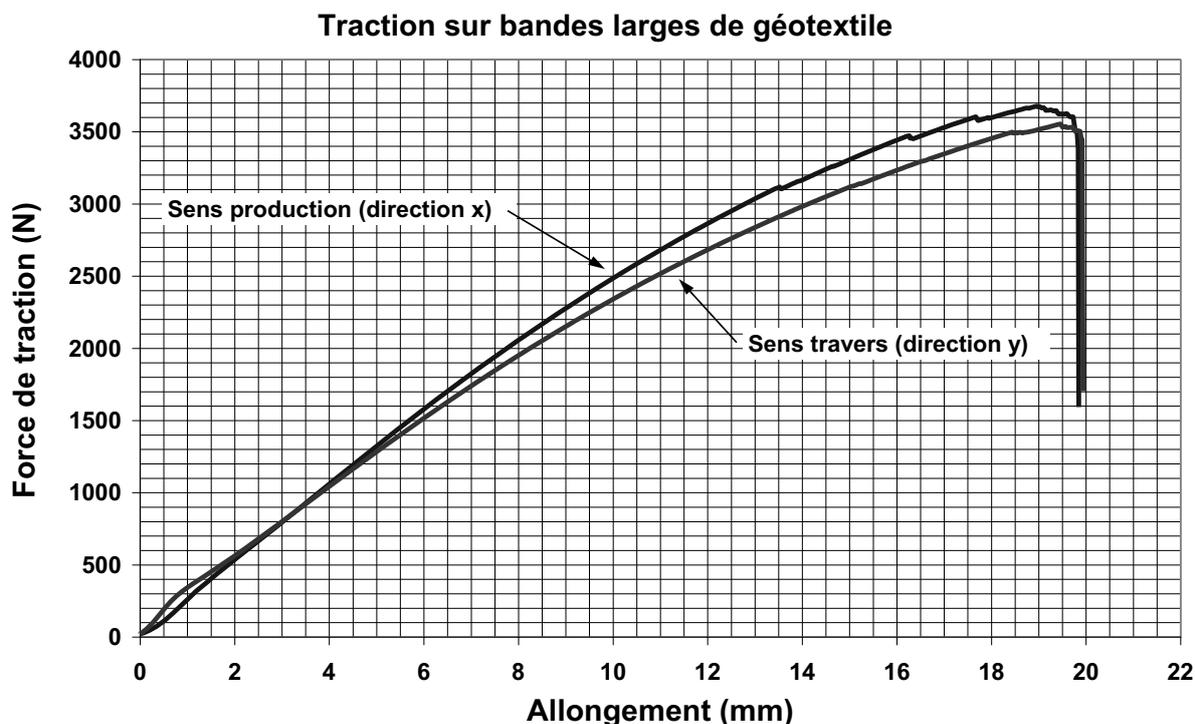


Figure 4. Essais de traction sur bandes larges de géotextile (Géo1).

La mesure de la force de traction est donnée par la machine. La mesure de l'allongement dans la partie centrale de l'éprouvette est donnée par l'extensomètre.

A5) La différence de comportement entre la direction x et la direction y vous paraît-elle significative ? Le cas échéant expliquer cette différence.

A6) A partir de la figure 4, donner l'expression littérale de la résistance à la traction T_d (en KN/m) et de la déformation du géotextile. Déterminer alors la résistance maximale à la traction appelée T_{dmax} en KN/m et la raideur sécante (J) à 20% de déformation dans les deux directions du géotextile Géo1.

Des résultats, d'un essai de poinçonnement statique réalisé à l'aide d'un piston de 50 mm de diamètre sur une nappe géotextile Géo1 de 150 mm de largeur, sont donnés dans le tableau 1.

Tableau 1. Résultats d'un essai de poinçonnement selon la norme NF EN ISO 12236 sur géotextile (Géo1).

Géo1	Force maximale (N)	Temps (s)	Enfoncement à rupture (mm)
Echantillon 1	2050	40	33
Echantillon 2	2088	42	35
Echantillon 3	2164	40	33
Echantillon 4	2050	41	34
Echantillon 5	2101	40	33

A7) Expliquer le principe de l'essai de poinçonnement statique ou essai CBR et déterminer la résistance au poinçonnement exprimée en KN du géotextile Géo1. Estimer la déformation du géotextile Géo1 à la rupture.

En cas d'effondrement du remblai sous-jacent, le géotextile Géo1 peut être amené à se déformer selon le schéma de la figure 5.

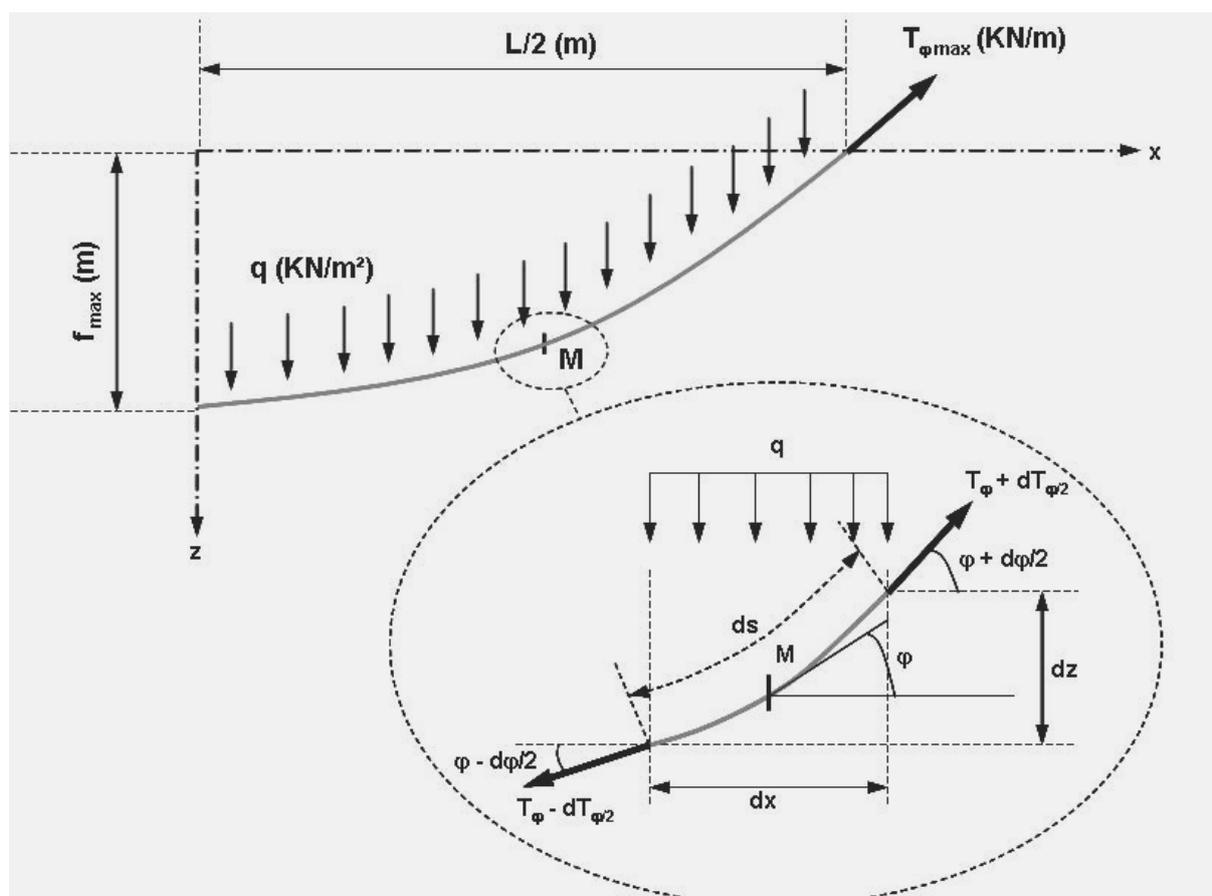


Figure 5. Equilibre d'un tronçon élémentaire de nappe géotextile (Géo1).

φ est défini par

$$\tan\varphi = \partial z / \partial x \quad (1)$$

$$\cos\varphi = \partial x / \partial s \quad (2)$$

A8) Ecrire les équations d'équilibre des efforts horizontaux et verticaux agissant sur un tronçon élémentaire de nappe de longueur déformée ∂s . En déduire l'équation différentielle du second ordre de la déformée de la nappe géotextile qui est définie à une constante près T_0 .

A9) Déterminer f_{\max} et $T_{\varphi\max}$.

A10) Montrer qu'il existe une relation directe entre q , L , f_{\max} et $T_{\varphi\max}$.

A11) En prenant une couche de grave compactée de 30 cm d'épaisseur et de masse volumique 2300 Kg/m^3 pour le corps de chaussée, et un béton bitumineux de 6 cm d'épaisseur et de masse volumique 2600 Kg/m^3 , déterminer q .

A12) Un effondrement du remblai d'une largeur de 3 mètres ($L = 3 \text{ (m)}$) est constaté sous la chaussée. La déformation de la nappe géotextile en membrane peut être estimée par la formule suivante : $\varepsilon = 8/3(f_{\max}/L)^2$. En prenant une déformation limite admissible de 9%, déterminer T_0 , f_{\max} et $T_{\varphi\max}$. Conclure sur la résistance de la nappe géotextile Géo1 et sur les essais NF EN ISO 10319 et NF EN ISO 12236.

PARTIE B - Utilisation de recyclés dans les matériaux routiers cimentaires

En général, dans le domaine routier, les granulats issus du concassage de matériaux cimentaires ou bitumineux sont recyclés comme graves non traitées pour confectionner des plateformes routières. Dans cette partie, on s'interroge sur l'intérêt et les limitations de ces recyclés pour une utilisation plus noble dans des matériaux traités aux liants hydrauliques (bétons pervibrés, compactés ou graves traitées) et utilisés pour former les couches supérieures des chaussées.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux granulats issus du concassage d'un béton.

B1) Une plateforme aéroportuaire composée de dalles béton doit être déconstruite pour rénovation. La formule du béton des dalles est fournie par le gestionnaire de l'aéroport dans le tableau 2. Les granulats sont des granulats naturels secs et la résistance à la compression au moment de la déconstruction était de 42 MPa.

Tableau 2. Composition du béton des dalles.

Formule pour 1 m ³		
Gravillon, Gn 5/20 mm	kg/m ³	1046
Sable, Sn 0/5 mm	kg/m ³	800
Ciment, C	kg/m ³	330
Eau efficace, E _{eff}	kg/m ³	150
Plastifiant	kg/m ³	1,5
Teneur en air occlus*	%	4

**% en volume par rapport au volume de béton*

Le gestionnaire donne également les propriétés des constituants dans le tableau 3 suivant.

Tableau 3. Propriétés des constituants.

	Masse volumique sèche M _{vr} (kg/l)	Absorption A _b (%)	Extrait sec*
Ciment, C	3,12		
Gravillon, Gn	2,65	0,8	
Sable, Sn	2,6	1,2	
Plastifiant	1,1		30%
Eau	1,0		

** Extrait sec : rapport pondéral de la masse de produit actif rapporté à la masse de l'adjuvant, exprimé en %. Le reste étant de l'eau.*

La porosité P d'un granulat est le rapport entre le volume des vides accessibles à l'eau dans le granulat et le volume du granulat. Elle s'exprime en %. L'absorption A_b d'un granulat est le rapport entre la masse d'eau que peut absorber le granulat et la masse sèche du granulat.

Calculer la masse d'eau que peut absorber l'ensemble sable + gravillon dans la formule de béton fournie et le volume de cet ensemble dans 1 m^3 de béton. En déduire la masse volumique et la porosité moyenne de l'ensemble sable + gravillon.

B2) La pâte de ciment du béton est composée de ciment, d'eau, d'adjuvant et d'air occlus. La porosité de la pâte de ciment du béton est définie comme le volume total des vides accessibles à l'eau dans la pâte durcie rapportée au volume de la pâte. Elle est exprimée en %. On fait ici l'hypothèse que le volume de la pâte durcie reste égal au volume de la pâte à l'état frais. Le volume total de vides est la somme du volume d'air occlus dans le béton lors de sa fabrication, de la porosité des hydrates issus de la réaction du ciment avec l'eau, du volume d'eau efficace résiduelle qui n'a pas réagi et des vides accessibles à l'eau des granulats.

Le volume de ciment combiné à long terme est donné par :

$$V_{\text{ciment}}^{\text{combiné}} = \left(1 - e^{-3,38 \frac{E_{\text{eff}}}{C}} \right) \times V_{\text{total}}^{\text{ciment}} \quad (3)$$

Le volume d'eau efficace combinée est donnée par :

$$V_{\text{eau eff}}^{\text{combinée}} = 0,23 \times V_{\text{ciment}}^{\text{combiné}} \quad (4)$$

Le volume de vides des hydrates est donnée par :

$$V_h^{\text{vide}} = 10\% \times (V_{\text{eau eff}}^{\text{combinée}} + V_{\text{ciment}}^{\text{combiné}}) \quad (5)$$

Avec les propriétés des constituants fournies à la question B1, calculer le volume de pâte dans la formule de béton et en déduire la porosité de la pâte au moment de la démolition du béton. Calculer la masse volumique sèche de la pâte. Pour cela on considère que la pâte est sèche quand elle a perdu toute son eau non combinée.

B3) On concasse le béton issu de la démolition des dalles et on obtient un sable et un gravillon dont les masses volumiques et l'absorption mesurées sont données dans le tableau 4 suivant :

Tableau 4. Caractéristiques des granulats issus de la démolition.

	Masse volumique (kg/l)	Absorption (%)
Gravillon recyclé, Gr 5/20 mm	2,31	5,9
Sable recyclé, Sr 0/5 mm	2,19	7,7

Situer ces valeurs de masse volumique par rapport à celles classiquement rencontrées sur les granulats naturels.

Les granulats recyclés sont composés de pâte de ciment et des granulats naturels d'origine. Toutefois, la pâte ne se répartit pas uniformément dans chaque classe granulaire. Déduire des mesures de masse volumique, les proportions volumiques de pâte dans le gravillon et dans le sable recyclés respectivement.

B4) Expliciter la relation entre l'absorption, la porosité et la masse volumique sèche des granulats. Déduire des valeurs d'absorption mesurées les porosités des granulats recyclés puis vérifier que ces valeurs sont cohérentes avec les proportions volumiques de pâte déterminées à la question précédente.

B5) L'eau efficace est l'eau réellement disponible pour fluidifier le béton à l'état frais et hydrater le ciment. C'est donc cette valeur qu'il faut prendre en compte pour évaluer l'ouvrabilité et la résistance mécanique. La masse d'eau efficace E_{eff} est égale à l'eau totale dans le béton moins l'eau absorbée par les granulats. L'eau totale est égale à la somme de l'eau d'ajout, de l'eau incluse dans l'adjuvant et de l'eau totale apportée par les granulats (l'eau absorbée dans leur porosité plus de l'eau adsorbée).

Soit la formule de béton suivante (tableau 5) élaborée avec des granulats recyclés issus du concassage des dalles de l'aéroport. La formule est donnée pour des granulats secs.

Tableau 5. Formulation de béton – granulats recyclés.

Formule pour 1 m ³		
Gravillon, Gr 5/20 mm	kg/m ³	880
Sable, Sr 0/5 mm	kg/m ³	560
Ciment, C	kg/m ³	402
Eau efficace, E_{eff}	kg/m ³	195
Plastifiant	kg/m ³	2
Teneur en air occlus*	%	4

*% en volume par rapport au volume de béton

Calculez l'eau d'ajout nécessaire à la formule, pour obtenir la même quantité d'eau efficace E_{eff} dans les deux hypothèses suivantes :

1. Les granulats recyclés sont secs.
2. Les granulats recyclés sont saturés surface sèche c'est-à-dire que seule leur porosité contient de l'eau, et qu'il n'y a pas d'eau adsorbée.

Sachant que l'absorption de l'eau par les granulats prend quelques dizaines de minutes, que pouvez-vous en déduire sur les risques de ségrégation au sortir de la centrale à béton et de l'évolution de l'ouvrabilité du béton dans la première heure ?

Sachant également que les sondes qui mesurent la teneur en eau en ligne des granulats en centrale manquent de précision lorsque cette teneur en eau est plus faible que l'absorption, en déduire les conséquences sur la régularité de la production du béton et pourquoi il est préférable de travailler avec des granulats saturés.

B6) On a fabriqué un certain nombre de gâchées de béton avec des taux variables de remplacement des granulats naturels par des granulats recyclés issus du concassage des dalles de l'aéroport. Les données sont résumées dans le tableau 6 suivant :

Tableau 6. Gâchées de béton.

		Gâchée 1	Gâchée 2	Gâchée 3	Gâchée 4	Gâchée 5
Gn 5/20 mm	kg/m ³	1046	800	520	260	0
Sn 0/5 mm	kg/m ³	800	550	350	170	0
Gr 5/20 mm	kg/m ³	0	240	480	690	900
Sr 0/5 mm	kg/m ³	0	150	300	430	565
C	kg/m ³	330	348	368	385	403
E_{eff}	kg/m ³	150	159	170	178	187
Plastifiant	kg/m ³	1,5	1,6	1,7	1,8	1,85
Teneur en air occlus*	%	4	4	4	4	4
f_{c28}	MPa	40	39	41	38	42
Affaissement	cm	10	9	6	1	0

*% en volume par rapport au volume de béton

On sait en outre que la résistance à la compression des bétons de qualité modérée, c'est-à-dire de résistance inférieure à 45 MPa (comme classiquement utilisé dans le domaine routier) peut s'exprimer de façon simplifiée sous la forme suivante :

$$F_{c_{28}} = K_g K_c \left(1 + \rho_c \left(\frac{E_{eff} + 0,5 V_a}{C} \right) \right)^{-2.85} \quad (6)$$

Où

K_g est une constante qui dépend uniquement des qualités des granulats : leur adhérence avec la pâte de ciment et leur résistance,

K_c est une constante qui ne dépend que de la classe du ciment,

ρ_c est la densité du ciment,

V_a le volume d'air occlus par m^3 de béton en litres,

E_{eff} la masse d'eau par m^3 de béton en kg,

C la masse de ciment par m^3 de béton en kg.

Que déduire de l'influence des granulats recyclés sur la résistance des bétons ? Même question sur l'ouvrabilité des bétons. En vous rappelant la nature composite des granulats recyclés expliquer pourquoi ces tendances étaient prévisibles.

B7) En vous basant sur les questions B4, B5 et B6, en déduire pourquoi dans la pratique, on ne fait que du recyclage partiel en recyclant plutôt les gravillons et en conservant plutôt du sable naturel.

B8) Partant d'un béton avec granulats naturels, expliquer comment évoluent la teneur en eau et en ciment quand on remplace les granulats naturels par des granulats recyclés si l'on veut conserver la résistance et l'ouvrabilité. Quels sont les conséquences prévisibles sur les déformations différées et en particulier sur le retrait hydrique.

B9) En quoi le retrait est-il problématique dans les applications routières ? Citez deux types d'adjuvants qui permettent de contrecarrer les effets néfastes des granulats recyclés sur le béton frais d'une part et sur les retraits d'autre part.

B10) Finalement on formule plusieurs bétons avec les mêmes propriétés d'usage (même affaissement, même résistance mécanique) pour réaliser les nouvelles dalles de chaussées (tableau 7).

Tableau 7. Formulation de différents bétons.

		Gâchée 1	Gâchée 2	Gâchée 3	Gâchée 4	Gâchée 5
Gn 5/20 mm	kg/m ³	1046	800	520	250	0
Sn 0/5 mm	kg/m ³	800	550	350	170	0
Gr 5/20 mm	kg/m ³	0	240	480	670	870
Sr 0/5 mm	kg/m ³	0	150	300	425	550
C	kg/m ³	330	348	368	400	422
E _{eff}	kg/m ³	150	159	170	186	197
Plastifiant	kg/m ³	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Teneur en air occlus*	%	4	4	4	4	4

*% en volume par rapport au volume de béton

Evaluer les différentes solutions sur le plan environnemental : quels sont les intérêts et les inconvénients sur les critères d'économie de ressources naturelles, de dégagement de CO₂ ?

Calculer le coût matériau de ces formules avec les hypothèses suivantes:

1. Ciment = 120 euros la tonne.
2. Granulats naturels = 12 euros la tonne.
3. Granulats recyclés = 9 euros la tonne.

Les autres coûts matériaux sont négligés dans cette étude.

Qu'en déduire sur l'intérêt économique de l'utilisation des granulats recyclés ? De quoi cet équilibre dépend-il fortement si on considère que les coûts de fabrication des granulats sont assez proches pour les granulats naturels et recyclés ? Conclure sur la nécessité d'une filière de recyclage fortement développée sur le territoire.

B11) La déconstruction des routes produit des fraisats d'enrobés. Ces fraisats d'enrobés sont souvent recyclés dans les enrobés mais peuvent également l'être dans les bétons. Lorsque l'on recycle des fraisats d'enrobé, on s'aperçoit que la résistance diminue quand le dosage en fraisats augmente. On montre que :

$$F_{c_{28}} = K_g K_c \left(1 + \rho_c \left(\frac{E_{eff} + 0,5 V_a + \beta V_b}{C} \right) \right)^{-2,85} \quad (7)$$

Les termes sont explicités à la question B6 avec en plus, V_b qui représente le volume de bitume amené par les fraisats dans le béton en kg/m^3 et β qui est une constante dépendant des propriétés du bitume.

Expliquer et justifier qualitativement cette expression.

B12) Le tableau suivant (tableau 8) résume la composition de plusieurs bétons contenant des dosages variables de fraisats d'enrobé. Ces fraisats ont une teneur pondérale en bitume résiduel de 5,4% et le bitume à une densité de 1,03. Le tableau 8 fournit les résistances mécaniques obtenues pour chaque formule à trois températures ambiantes.

Tableau 8. Composition des bétons avec fraisats.

		Béton 1	Béton 2	Béton 3
Gn 6/20	kg/m^3	1282	897	0
Sn 0/6	kg/m^3	986	737	157
Fraisat 0/20	kg/m^3	0	471	1570
C	kg/m^3	330	330	330
E_{eff}	kg/m^3	150	157	178
Plastifiant	kg/m^3	1,98	1,98	1,98
V_a	l/m^3	30	30	30
V_b	l/m^3	0,0	24,7	82,3
$f_{c28} (2^\circ\text{C})$	MPa	23,5	17,3	11
$f_{c28} (20^\circ\text{C})$	MPa	22,5	16	7
$f_{c28} (40^\circ\text{C})$	MPa	23	14	5,1

Pour chaque température évaluer la valeur moyenne de β . Comment évolue la valeur moyenne de β en fonction de la température ? Expliquer les résultats obtenus.

B13) Une extraction du bitume a été faite sur les fraisats et on a obtenu une pénétrabilité de 10 (1/10 mm) suivant la norme NF EN 1426 et une température bille anneau de 82°C suivant la norme NF EN1427. Expliquer très succinctement en quoi consistent ces deux mesures et ce qu'elles caractérisent. Comment devrait évoluer β si on avait un bitume avec une pénétrabilité de 40 et une température bille anneau de 53°C ?

B14) Finalement à ce jour, le procédé de recyclage le plus utilisé dans le domaine routier est le retraitement sur place. Cette technique consiste à décohesionner la structure de chaussée

existante (matériaux cimentaires et bitumineux mélangés), à déposer un liant sur les granulats ainsi générés, à arroser et malaxer le tout, puis enfin à compacter le mélange in-situ pour refaire une couche de base portante. Malgré les inconvénients évoqués plus haut avec les deux types de recyclés, expliquer quels peuvent être les intérêts économiques et environnementaux d'une telle technique.

Expliquer notamment pourquoi pour une résistance fixée, l'utilisation du compactage plutôt que de la pervibration permet de diminuer le dosage en ciment et donc ainsi limiter les coûts et les émissions de CO₂.

D'après tout ce qui précède, quand on fait du retraitement en place, quelles sont les précautions à prendre pour s'assurer que l'ouvrabilité et les résistances mécaniques restent les plus constantes possibles ?

Epreuve de modélisation des matériaux et des ouvrages

Partie Modélisation mécanique des ouvrages

Partie 1 : Calcul de Structure – Etude d'une canopée - Résolution analytique

Ce sujet s'inspire d'un projet de couverture de quai d'un tram-train régional. Cet ouvrage consiste en :

- une couverture horizontale de 30*14 m recouvrant le quai à une hauteur de 8m ;
- une poutre treillis assurant la rigidité en flexion de cette couverture ;
- 8 poteaux.

Géométrie de l'ouvrage

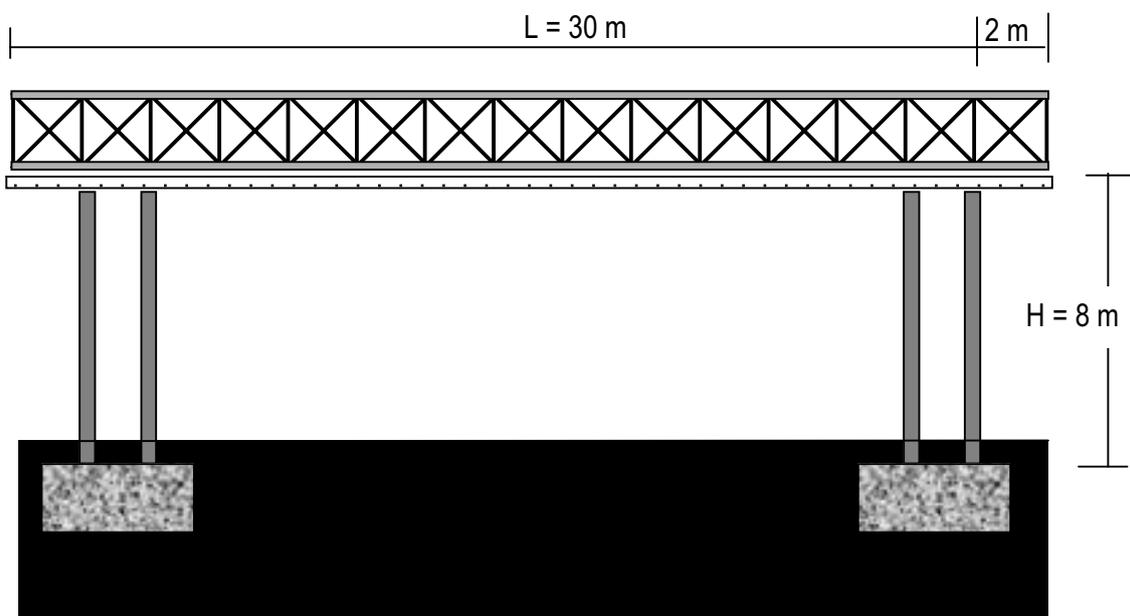


Figure 1 : Coupe longitudinale de la structure

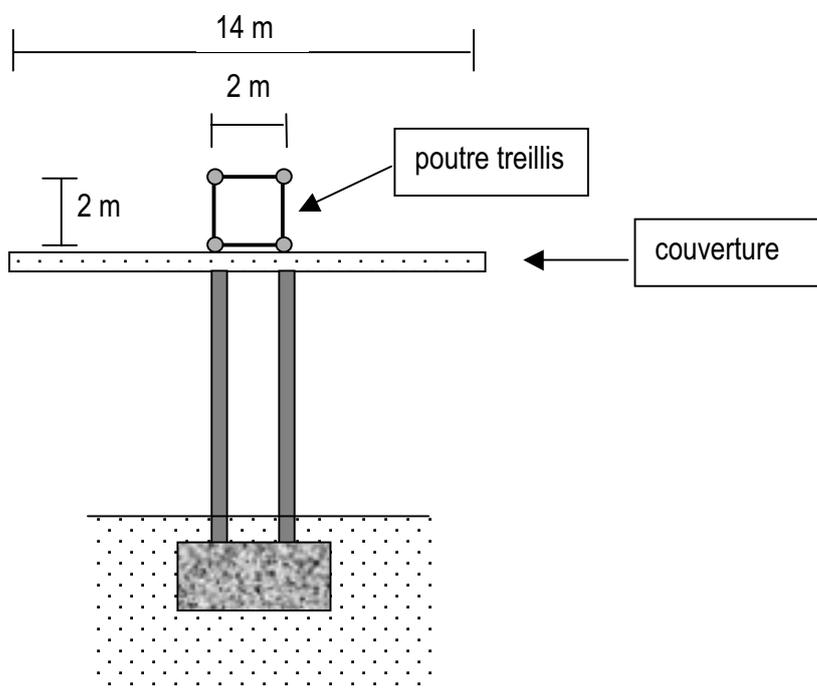


Figure 2 :
Coupe transversale

Objet de l'étude

Il s'agit de vérifier le dimensionnement de la poutre treillis supportant son propre poids et celui de la couverture.

Caractéristiques des éléments constitutifs de la poutre treillis

La poutre treillis est composée de :

- 4 poutres longitudinales de section circulaire (voir figures 1 et 2) de caractéristiques suivantes :
 $L = 30\text{m}$, diamètre extérieur = 100 mm, diamètre intérieur = 80 mm
 $\rho = 78 \text{ kN/m}^3$, $E = 210 \text{ GPa}$,
- de 16 cadres disposés tous les 2m selon une section transversale : voir figure 2
Chaque cadre est composé de 4 barres de caractéristiques :
 $L_c = 2\text{m}$, diamètre extérieur = 40 mm, diamètre intérieur = 30 mm,
 $\rho = 78 \text{ kN/m}^3$, $E = 210 \text{ GPa}$,
- de 15 x 2 (diagonales) x 2 (2 faces : avant et arrière selon la coupe longitudinale) : voir figure 1
Ces barres ont les caractéristiques suivantes :
 $L_d = 2\sqrt{2}\text{m}$, diamètre extérieur = 40 mm, diamètre intérieur = 30 mm
 $\rho = 78 \text{ kN/m}^3$, $E = 210 \text{ GPa}$,

Hypothèse de travail

On traitera uniquement les effets du poids propre de la poutre treillis et de la couverture, sur la poutre treillis. On supposera que la couverture n'apporte aucune rigidité de flexion. Les poteaux seront considérés comme des appuis simples.

Résolution analytique

On traitera le problème comme un problème plan, le plan longitudinal (voir figure 1).

Justifier cette hypothèse en précisant les éléments de la structure qui assurent la rigidité de la flexion engendrée par le poids propre.

1.1 Calcul de la charge s'appliquant sur la poutre treillis

Calculer le poids propre de la poutre treillis.

On considérera pour la suite que le poids de la couverture est de 155 kN.

Calculer la charge linéaire de poids propre que doit reprendre la poutre treillis.

1.2 Réponse d'un treillis élémentaire

Afin d'évaluer le comportement en flexion de la poutre treillis soumise aux charges de poids propre, on propose de considérer que cette poutre est réalisée à partir d'un grand nombre de treillis élémentaires 2D tels que celui représenté sur la figure 3.

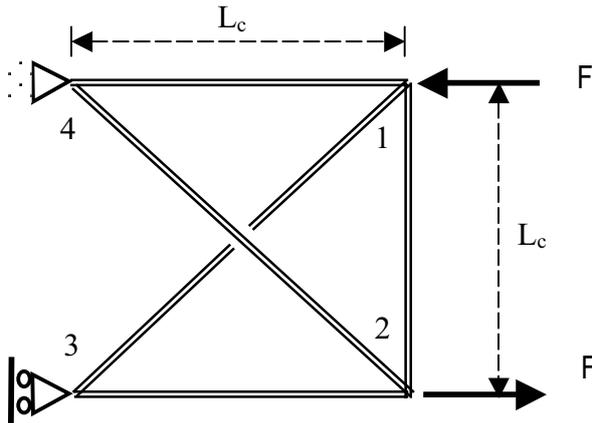


Figure 3 : Treillis élémentaire

Pour déterminer la rigidité en flexion de ce treillis élémentaire, on étudie le cas où il est soumis aux nœuds 1 et 2 à deux forces ponctuelles horizontales opposées d'intensité F .

1.2.1

Rappeler les hypothèses d'étude des treillis plans et déterminer le degré d'hyperstaticité du treillis élémentaire. On rappelle qu'un treillis est composé de barres.

1.2.2

Calculer les réactions d'appui ainsi que les efforts dans les cinq barres. On nommera les efforts F_{ij} avec i et j , les numéros des nœuds de la barre, et on précisera si la barre est comprimée ou tendue.

1.2.3

Déterminer les déplacements horizontaux u_1 et u_2 des nœuds 1 et 2.

1.3 Modèle continu équivalent

On envisage d'approcher la réponse en flexion de la poutre treillis constituant la canopée, en la remplaçant par une poutre de raideur en flexion équivalente qui sera notée $[EI]_{eq}$.

1.3.1

A la suite de la partie 1.2, exprimer le moment M , sur la ligne moyenne, induit par les deux forces d'intensité F , en fonction de F et de L_c .

1.3.2

Montrer que, si l'on considère l'hypothèse des petits déplacements, la rotation de la section repérée par les nœuds 1 et 2, peut être mise sous la forme :

$$\theta_2 = \frac{u_2 - u_1}{L_c}$$

Donner la valeur de la rotation θ_1 de la section repérée par les nœuds 3 et 4.

1.3.3

On définit la rigidité équivalente en flexion par :

$$M = [EI]_{eq} \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad \text{avec, en approximation, } \frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{L_c}$$

Déterminer l'expression de la rigidité de flexion équivalente $[EI]_{eq}$ de la passerelle.

1.4 Calcul de la flèche de la poutre treillis

1.4.1

En assimilant la poutre treillis à une poutre de longueur 22m, simplement appuyée à ses deux extrémités, de rigidité $[E]_{eq}$, chargée par la charge linéaire calculée au 1.1, calculer sa flèche maximale.

1.4.2

Pour se rapprocher de la réalité, on peut calculer la flèche de cette même poutre en prenant cette fois en compte le fait qu'elle s'étend sur 4m de part et d'autre des appuis (les appuis à 2 m des 2 extrémités sont ignorés). L'expression de la flèche est alors :

$$f = \frac{p}{EI} \left(\frac{5}{384} \cdot L^4 - \frac{5}{48} \cdot L^3 \cdot L_{ex} + \frac{1}{4} \cdot L^2 \cdot L_{ex}^2 - \frac{1}{6} \cdot L \cdot L_{ex}^3 - \frac{1}{24} \cdot L_{ex}^4 \right)$$

avec p : charge linéaire

L : longueur total de la poutre treillis

L_{ex} : distance entre l'appui et l'extrémité de la poutre treillis

Sans effectuer tous les développements, indiquer comment cette expression peut être obtenue.

Faire l'application numérique et comparer avec la valeur obtenue au 1.4.1. Justifier qualitativement ce résultat.

Partie 2 : Calcul de Structure – Etude d'une canopée - Résolution numérique

On se propose de traiter la même structure, la canopée, par une méthode numérique, en l'occurrence la méthode des éléments finis. Conformément aux hypothèses de la Partie 1, on étudiera la poutre treillis selon un modèle plan.

2.1 Méthode

2.1.1

Compte tenu de la structure de la poutre treillis, citer les 2 types d'éléments les plus appropriés pour la modéliser. Justifier votre réponse.

2.1.2

Décrire ces 2 types d'éléments. Préciser pour chacun les hypothèses nécessaires à leur formulation. Préciser les caractéristiques géométriques et les caractéristiques mécaniques.

2.1.3

Sans écrire explicitement la matrice de raideur élémentaire de ces éléments, indiquer leur taille (nombre de ddl) et les paramètres intervenant dans son expression.

2.2 Modélisation de la poutre treillis

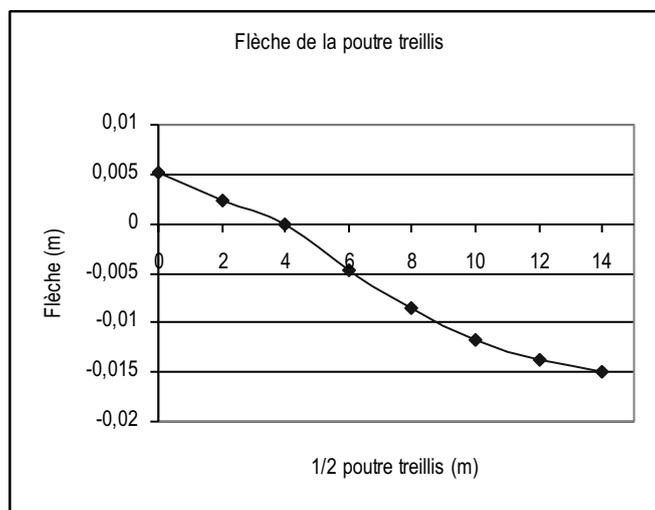
Proposer un modèle correspondant à la configuration de la question 1.4.2. : dimensions, type d'éléments, caractéristiques mécaniques, conditions aux limites, charges ...

Afin de réduire le temps de calcul et la taille mémoire, proposer un modèle exploitant les symétries. Justifier ce modèle et préciser les conditions aux limites.

2.3 Analyse des résultats

2.3.1

Une simulation basée sur des éléments barre, fournit les résultats suivants :



Position (m)	0	2	4	6	8	10	12	14
Flèche (m)	0,00524	0,00236	0	-0,00463	-0,00849	-0,01166	-0,0138	-0,01504

Commenter ces résultats par rapport aux résultats analytiques obtenus précédemment. Justifier qualitativement ces écarts

2.3.2

Afin d'être plus conforme à la réalité, la simulation numérique est réalisée avec des éléments poutres. Le résultat est sensiblement le même. Justifier ce résultat. Que peut-on en conclure sur l'hypothèse de modèle continu équivalent prise en compte dans la Partie 1 ?

Compte tenu du type de charge sur la structure, indiquer pourquoi cette simulation avec des éléments poutres classiques n'est pas exacte.

Partie 3 : Mécanique des fluides

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants. Le premier concerne l'étude d'une porte d'écluse séparant deux tronçons d'un canal, le second traite des performances d'une éolienne.

3.1 Etude de la porte d'une écluse

Une porte d'écluse de largeur l retient de l'eau de masse volumique ρ . La hauteur immergée en amont est : $OH = h$. On appelle g l'accélération de la pesanteur en ce lieu.

- En amont (côté 1), la surface libre de l'eau servira de plan de référence.
- En aval (côté 2), la surface libre est à la cote $(-e)$.

Données : $l = 6 \text{ m}$, $h = 8 \text{ m}$; $e = 2 \text{ m}$; $p_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$; $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

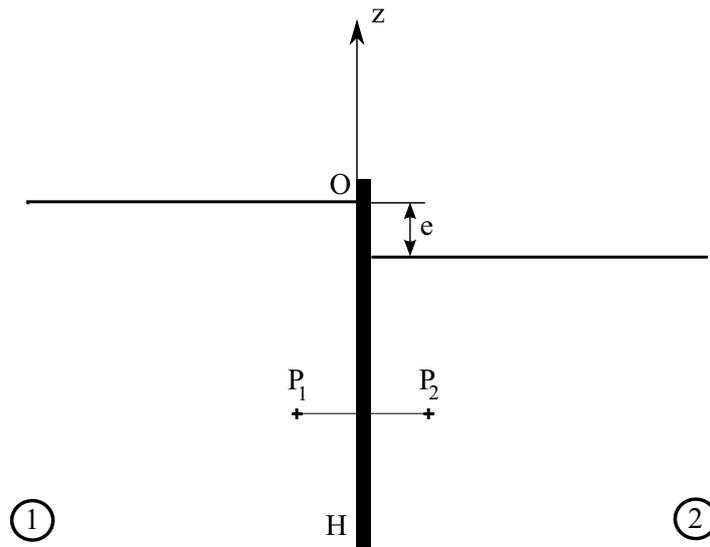


Figure 4 – Porte d'écluse

3.1.1

- Exprimer la pression p_1 à la cote z du côté 1.
 - Exprimer la pression p_2 à la cote z du côté 2.
- On distinguera les deux cas : $-e \leq z \leq 0$, puis $-h \leq z \leq -e$.

3.1.2

- En déduire la force de pression résultante \overline{dF} sur l'élément rectangulaire de hauteur dz , de largeur l , à la cote z . On considérera les deux cas : $-e \leq z \leq 0$, puis $-h \leq z \leq -e$.
- Que constatez-vous sur la répartition des efforts (ou de dF/dS) le long de la paroi ? Est-il nécessaire de renforcer l'épaisseur vers la base comme pour un barrage ?

3.1.3

Calculer la résultante des forces de pression sur la porte.

3.1.4.

Déterminer la cote z_C du centre de poussée C .

3.2 Etude d'une éolienne

L'hélice d'une éolienne supposée plane d'axe horizontal xx' est immergée dans un fluide parfait incompressible, de masse volumique ρ . L'écoulement est permanent.

Pour modéliser le fonctionnement de l'hélice, on supposera que l'écoulement du fluide se fait dans un tube de courant, de symétrie de révolution autour de l'axe xx' de l'hélice, de section droite variable $S(x)$, la zone extérieure n'étant pas affectée par le mouvement de l'hélice.

On fait également les hypothèses suivantes :

- à l'extérieur du tube de courant la pression est uniforme et égale à P_{atm} ;
- en amont de l'hélice, et suffisamment loin d'elle, la pression vaut également P_{atm} , la vitesse moyenne du fluide valant V_1 et la section droite ayant une aire S_1 ;
- en aval de l'hélice, et suffisamment loin d'elle, la pression vaut encore P_{atm} , la vitesse moyenne du fluide valant V_2 et la section droite ayant une aire S_2 ;
- dans le plan de l'hélice, la vitesse moyenne du fluide vaut V et la section droite a une aire S ;

- les pressions ne sont pas égales de part et d'autre du plan de l'hélice et on note P_A en amont et P_B en aval.

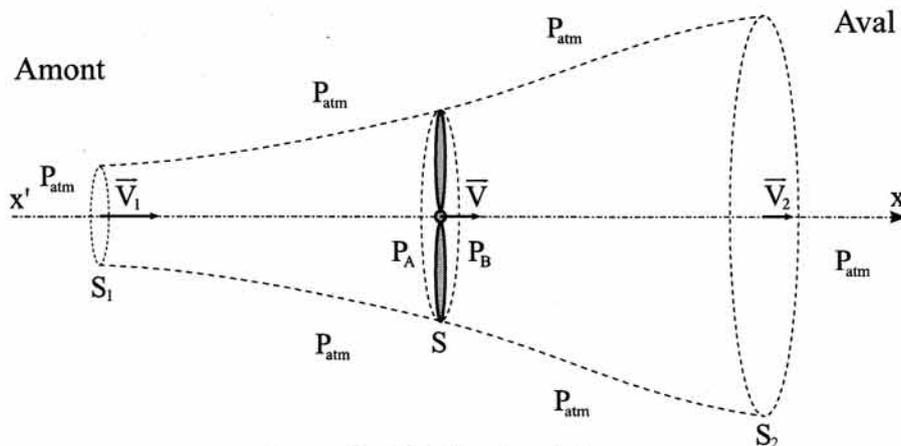


Figure 5 – Modélisation éolienne

3.2.1

Exprimer le débit volumique à travers l'hélice de trois façons différentes en utilisant les trois aires et les trois vitesses définies.

3.2.2

- En appliquant le théorème de Bernoulli entre les sections 1 et A, puis B et 2, donner l'expression de la différence de pression : $\Delta P = P_A - P_B$ en fonction de V_1 , V_2 et ρ .
- S'agissant d'une éolienne, comparer V_1 et V_2 .

3.2.3

- Appliquer le théorème de quantité de mouvement au volume de fluide délimité par le tube de courant et les sections droites S_1 et S_2 . Exprimer la force exercée par le fluide sur l'hélice en fonction de Q_v le débit volumique, V_1 , V_2 et ρ .
On néglige le poids du fluide.
- Appliquer ce même théorème à un volume supposé parfaitement plat entourant l'hélice de part et d'autre. En déduire une nouvelle expression des forces exercées par le fluide sur l'hélice en fonction de la différence de pression ΔP .
- Montrer enfin que la vitesse moyenne du fluide au niveau de l'hélice peut s'écrire :

$$V = (V_1 + V_2) / 2$$

3.2.4

Déterminer la puissance P fournie par le fluide à l'hélice.

3.2.5

Pour une vitesse V_1 donnée, montrer que la puissance P passe par un maximum P_m pour une valeur particulière de V_2 que l'on déterminera.

Application numérique : On s'intéresse à une éolienne dont l'hélice a un diamètre de 40 m. $V_1=15$ m.s⁻¹, $V_2=12,5$ m.s⁻¹, $\rho = 1,25$ kg.m⁻³.