

SESSION 2010

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES
Option C : PHYSIQUE APPLIQUÉE**

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

Les référentiels considérés sont supposés galiléens dans tout le problème. Les vecteurs sont notés en gras. Les parties sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I porte sur des notions de cinématique et de dynamique newtoniennes du point matériel. La partie II porte sur l'étude d'un satellite artificiel pour une trajectoire circulaire. La partie III porte sur deux types d'utilisations de l'hydrazine. Dans la partie IV, les trois lois de Kepler relatives au mouvement d'une planète autour du Soleil sont établies à partir d'une méthode élémentaire. La partie V s'intéresse au calcul de l'avance du périhélie de la planète Mercure dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte (aucun pré-requis en relativité n'est demandé). La partie VI traite du rayonnement gravitationnel d'un pulsar binaire par une analyse dimensionnelle et des calculs classiques (sans formalisme relativiste). La dernière partie porte sur la modélisation, en optique géométrique, de la déviation des rayons lumineux par le Soleil (sans formalisme relativiste).

Données numériques

Constante de la gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$

Rayon de la Terre : $R_T = 6375 \text{ km}$

Masse de la Terre : $M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$

Vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Demi-grand axe de l'orbite de Mercure : $a_M = 5,8 \times 10^7 \text{ km}$

Nombre de révolutions effectuées par Mercure en un siècle : $N_M = 415$

Excentricité de l'orbite de Mercure : $e_M = 0,2$

Masse du Soleil : $M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$

Rayon du Soleil : $R_S = 7 \times 10^5 \text{ km}$

PSR 1913+16 : $m_1 = 1,44 M_S$, $m_2 = 1,38 M_S$, $T_0 = 7,8 \text{ h}$, $e = 0,617$.

Rappels concernant l'ellipse

e : excentricité

a : demi-grand axe

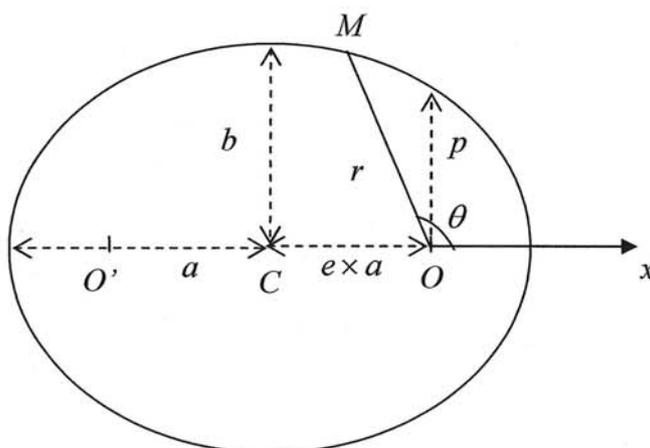
b : demi-petit axe défini par $b = a(1 - e^2)^{1/2}$

O et O' : foyers (symétriques) de l'ellipse

p : paramètre défini par $a = p(1 - e^2)^{-1}$ ou $b = p(1 - e^2)^{-1/2}$

La position du point M est repérée par les variables (r, θ) . L'équation d'une ellipse, dans ce

système de coordonnées polaires, est $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ avec $0 \leq e < 1$.



Soit T la période de révolution de M et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation. On pourra utiliser la troisième loi de Kepler (loi des périodes) sous la forme :

$$T = 2\pi\alpha^{-1/2}a^{3/2} \text{ ou encore } \omega^2 a^3 = \alpha.$$

α est une constante du problème considéré : $\alpha = GM_T$ pour un satellite terrestre, $\alpha = GM_S$ pour une planète du système solaire, $\alpha = G(m_1 + m_2)$ pour un système binaire.

I. Généralités.

Soit M un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse \mathbf{v} dans un référentiel d'étude galiléen \mathcal{R} . Sa position est repérée par le rayon vecteur $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$, dans un système de coordonnées polaires (r, θ) d'origine O . \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ désignent respectivement les vecteurs unitaires radial et orthoradial de la base locale des coordonnées polaires (figure 1).

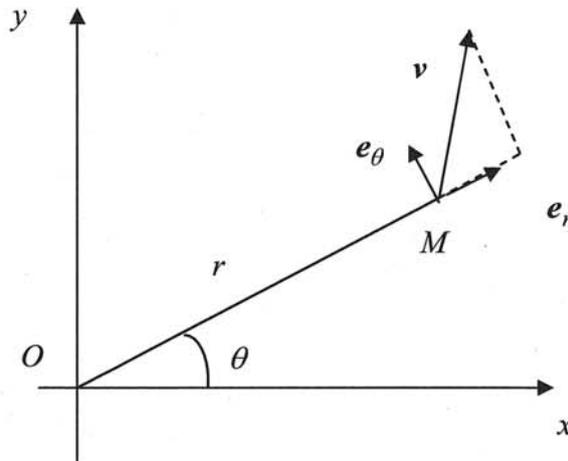


Figure 1.

1. Exprimer les dérivées par rapport à la variable angulaire θ des vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ en fonction de ces mêmes vecteurs.
2. Établir l'expression de la vitesse $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta$ de M en coordonnées polaires.
3. Établir l'expression de l'accélération de M : $\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right)\mathbf{e}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \right)\mathbf{e}_\theta$.
4. Donner l'expression de cette accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, en fonction de R et ω d'une part, puis en fonction de R et du module v de la vitesse de M d'autre part. Représenter \mathbf{a} et \mathbf{v} sur un schéma, en un point donné de la trajectoire.
5. Énoncer le principe d'inertie (première loi de Newton).
6. Définir la quantité de mouvement \mathbf{p} du point matériel M et exprimer la relation fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton) en fonction de \mathbf{p} .
7. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c du point matériel M .

8. M est soumis à l'action d'une force extérieure F . Établir à partir de 6 et 7 la relation $\frac{dE_c}{dt} = F \cdot v$ et exprimer le théorème de l'énergie cinétique qui en découle.
9. Le point M est soumis à l'action d'une force conservative F_c . Donner la relation entre F_c et l'énergie potentielle E_p qui lui est associée.
10. Définir l'énergie mécanique E du point matériel M dans un champ de force conservatif F_c . Quelle est alors la propriété de E ?
11. M est soumis à la résultante des forces $F = F_c + F_{nc}$ où F_{nc} est une force non conservative. Donner un exemple de force non conservative. Exprimer la variation de l'énergie mécanique du système dans l'intervalle de temps élémentaire dt en fonction de la puissance P_{nc} de F_{nc} .

II. Étude de satellites artificiels.

Un satellite M de masse m , assimilable à un point matériel, est en orbite circulaire autour de la Terre à une altitude h . On note T sa période de révolution. On suppose qu'il n'est soumis qu'au champ de pesanteur terrestre. La Terre est supposée sphérique, de centre O , de rayon R_T et de masse M_T . On notera Ω_T la pulsation du mouvement de rotation diurne de la Terre. L'étude du mouvement du satellite est menée dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen). On note $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$, où \mathbf{e}_r est le vecteur unitaire radial d'un système de coordonnées sphériques de centre O .

12. Définir le référentiel géocentrique.
13. Donner l'expression de la force de gravitation F exercée par la Terre sur le satellite en fonction de G , M_T , m , r et \mathbf{e}_r .
14. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme et exprimer le module v de sa vitesse en fonction de G , M_T , R_T et h .
15. Exprimer la période T du satellite en fonction de G , M_T , et r . Commentaire.
16. Applications numériques : les satellites de la famille SPOT observant la surface de la Terre évoluent à une altitude de 822 km. Quelle est leur vitesse ? Leur période de révolution T ?
17. Dans quel plan évolue nécessairement un satellite géostationnaire ? Établir l'expression de son altitude h_g en fonction de G , M_T , R_T , Ω_T et faire l'application numérique.

18. Exprimer l'énergie potentielle E_p du satellite en fonction de G , M_T , m , et r (on prendra $E_p = 0$ à l'infini).
19. Exprimer son énergie mécanique E en fonction de G , M_T , m et r (on pourra utiliser le résultat de la question 14.).
20. Quelle vitesse faudrait-il communiquer à un satellite de basse altitude pour le faire échapper à l'attraction terrestre ? Faire l'application numérique.

Un satellite d'observation, qui évolue sur une orbite circulaire de basse altitude, est soumis de la part des couches supérieures de l'atmosphère terrestre à une force de frottements proportionnelle au carré de la vitesse, de module $f = \gamma m v^2$.

21. Exprimer la variation élémentaire dE d'énergie mécanique du satellite pendant l'intervalle de temps dt . Quel est le signe de la variation d'altitude dr correspondante ?
22. En s'aidant des questions 19, 21 et 15, donner l'expression de la variation Δh de l'altitude du satellite après une révolution en fonction de γ et r . On supposera que $\Delta r \ll r$ de sorte que l'orbite sera toujours considérée comme circulaire en première approximation.
23. Application numérique : calculer Δh avec $\gamma = 5 \times 10^{-14}$ S.I.

III. Hydrazine : décomposition, piles.

L'hydrazine (N_2H_4), de formule semi développée H_2N-NH_2 , est un composé liquide instable, transparent (et toxique), qui appartient à la famille des monoergols. Outre son utilisation dans l'industrie chimique, l'hydrazine est aussi utilisée dans les moteurs de forte poussée des lanceurs de fusées, dans ceux de faible poussée assurant le contrôle d'altitude des satellites et pour la réalisation de piles à combustible.

Dans les moteurs à faible poussée des satellites, l'hydrazine est décomposée en diazote (N_2)_{gaz} et en dihydrogène (H_2)_{gaz} sous l'action de la lumière solaire.

24. Écrire l'équation de cette réaction de décomposition.
25. Calculer l'énergie E_r libérée lors de cette réaction. On donne les énergies de liaison (en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$) : $E_{N-N} = 163$; $E_{N-H} = 338$; $E_{H-H} = 436$; $E_{N=N} = 944$; et la chaleur latente molaire de vaporisation de N_2H_4 : $L_v = 41,8$.

26. Quelle énergie libère la décomposition d'un gramme d'hydrazine ? On donne la masse molaire de l'azote $M_N = 14 \text{ g.mol}^{-1}$ et de l'hydrogène $M_H = 1 \text{ g.mol}^{-1}$

L'hydrazine peut aussi être utilisée pour la réalisation de piles à combustible hydrazine/oxygène pour l'industrie automobile notamment. Alors que les piles à hydrogène utilisent le platine comme catalyseur (très onéreux), les piles à hydrazine utilisent des métaux bon marché. Les couples oxydo-réducteurs en jeu sont $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ et $\text{N}_2/\text{N}_2\text{H}_4$. On donne les potentiels standards de ces couples : $E^0(\text{N}_2/\text{N}_2\text{H}_4) = -0.33 \text{ V}$, $E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$.

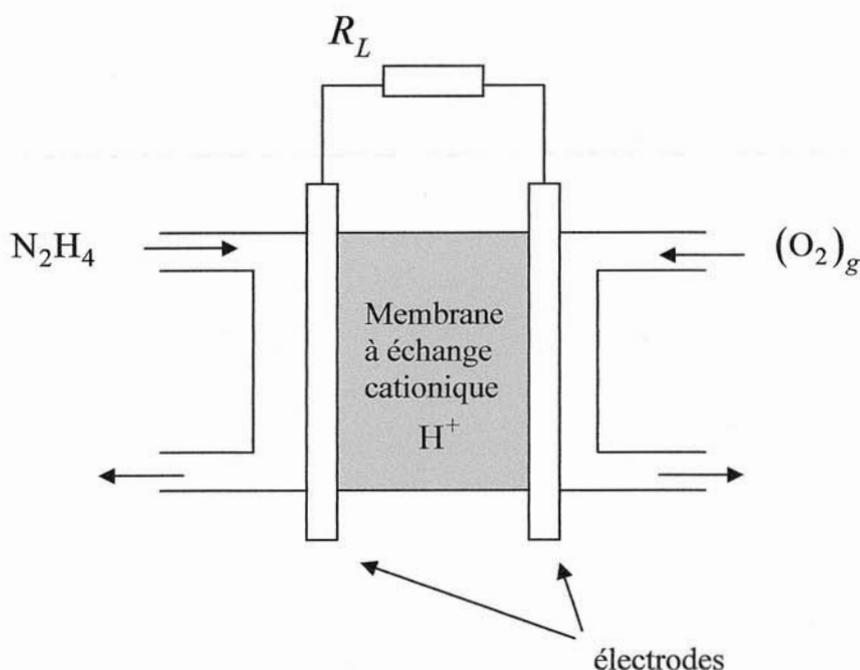
27. Par rapport à quelle référence ces potentiels sont-ils définis ?

28. Quel est, a priori, le sens spontané de la réaction dans une pile hydrazine/oxygène?

29. Écrire les demi-réactions rédox aux électrodes pour chaque couple.

30. Écrire l'équation bilan de la réaction qui se déroule dans la pile à combustible.

31. Recopier et compléter le schéma ci-dessous sur la copie, en précisant le sens de parcours des électrons et en identifiant anode et cathode (R_L est une résistance de charge).



IV. Trajectoires képlériennes.

Isaac Newton établit en 1684 dans le *De Motu corporum in gyrum* qu'une planète soumise à l'action d'une force inversement proportionnelle au carré de sa distance au Soleil décrit une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers (première loi de Kepler). Il établit également la loi

Tournez la page S.V.P.

des aires suivant laquelle des aires égales sont balayées en des durées égales par le segment joignant le Soleil à la planète (deuxième loi de Kepler) ainsi que la loi des périodes (troisième loi de Kepler). Cette partie vise à établir ces lois en s'inspirant de la démarche de Newton (mais sans la suivre pas à pas car celle-ci repose sur une connaissance approfondie des coniques). On se place dans la suite dans le référentiel héliocentrique, supposé galiléen. Soit S la position du Soleil.

32. Définir le référentiel héliocentrique.

La méthode algorithmique de Newton repose sur la discrétisation de la trajectoire. Soit A la position d'une planète du système solaire à un instant donné t_0 ; B, C etc. sont ses positions aux instants ultérieurs $t_1 = t_0 + \delta t$, $t_2 = t_1 + \delta t$ etc. L'intervalle δt est supposé suffisamment petit pour permettre un bon échantillonnage de la trajectoire (voir figure 2). Dans la suite, δt sera pris comme unité de temps : $\delta t = 1$.

33. À partir de la définition du vecteur vitesse \mathbf{v} en fonction de \mathbf{r} et t et de la définition de la dérivée comme limite des petites variations, montrer qu'avec la convention précédente pour δt , la vitesse entre les points A et B de la trajectoire est représentée par le vecteur \mathbf{AB} .

34. Le point c sur la figure 2 est tel que $\mathbf{Bc} = \mathbf{AB}$. À quel mouvement de la planète correspondrait la trajectoire ABc ?

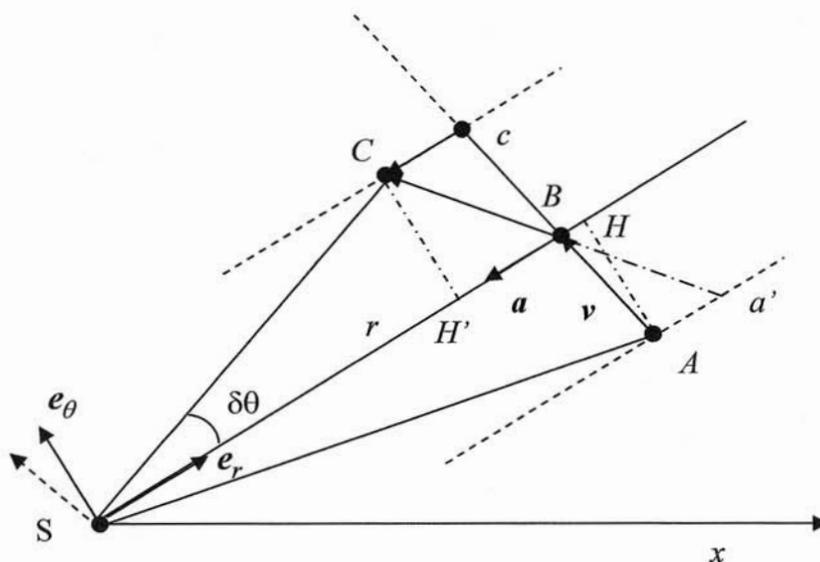


Figure 2.

35. En B , la planète subit l'effet d'une force attractive vers le centre S , sous la forme d'une impulsion (analogue à un choc). Soit \mathbf{a} l'accélération qu'elle subit. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question 33, appliqué à la définition de \mathbf{a} à partir de \mathbf{v} et t , montrer que le changement de vitesse de la planète en B est représenté sur la figure 2 par $\delta\mathbf{v} = \mathbf{a}$. En déduire que la planète atteint le point C défini par $\mathbf{BC} = \mathbf{Bc} + \mathbf{a}$.

En termes modernes, la construction de Newton correspond à l'algorithme $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{a}_{n+1}$, où \mathbf{r}_n est la position à l'instant t_n , \mathbf{v}_n la vitesse entre les instants t_n et t_{n+1} et \mathbf{a}_{n+1} l'accélération à la position \mathbf{r}_{n+1} . Seules les premières étapes ont été représentées sur la figure 2.

36. Montrer à partir de cette construction que la trajectoire est plane.

37. Démontrer (par une considération géométrique simple) que les aires des triangles SAB et SBC sont égales (sur la figure 2, H et H' désignent respectivement les projetés orthogonaux de A et C sur SB). Quelle loi établit-on ainsi ?

38. On note $SM = r$, où M est un point de la trajectoire identifié à A, B, C etc. (représenté pour $M \equiv B$ sur la figure 2) et $\delta\theta$ l'angle dont tourne SM pendant l'unité de temps. Déduire de 37 que $r^2\delta\theta = C_0$, où C_0 est une constante.

39. Dans le cas d'un mouvement képlérien, l'accélération est $\mathbf{a} = -\frac{\alpha}{r^2}\mathbf{e}_r$, où \mathbf{e}_r est le vecteur unitaire radial suivant SM et α une constante. En utilisant les questions précédentes et la question 1, en déduire l'expression de $\delta\mathbf{v}$ en fonction de $\alpha, C_0, \delta\theta$ et \mathbf{e}_r .

40. En déduire que $\mathbf{v} = \beta(\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e})$ où \mathbf{e} est un vecteur constant et où β est une constante que l'on explicitera.

41. Les axes Sx et Sy peuvent être choisis de manière à ce que θ soit l'angle entre \mathbf{e} et \mathbf{e}_θ . Montrer, en projetant convenablement la relation précédente et en utilisant 2 et 38, que l'on obtient l'équation de la trajectoire $r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$ avec $e = |\mathbf{e}|$. Déterminer p .

42. Pour quelles valeurs de e la trajectoire s'identifie-t-elle respectivement à une ellipse (première loi de Kepler), une parabole ou une hyperbole ?

43. Les résultats précédents sont-ils modifiés si δt n'est plus pris comme unité de temps ? Justifier.

44. On se place dans le cas d'une ellipse. Son aire est πab , où a désigne le demi-grand axe et b le demi-petit axe. En utilisant 38, en déduire l'expression de la période orbitale T en fonction de a , b et C_0 . En déduire la troisième loi de Kepler : $T = 2\pi\alpha^{-1/2}a^{3/2}$. (On rappelle que $a = p(1-e^2)^{-1}$ et $b = p(1-e^2)^{-1/2}$).

V. Précession du périhélie de Mercure.

En mécanique newtonienne, le grand axe de l'orbite elliptique d'une planète garde une direction fixe au cours du temps s'il n'y a pas de perturbation gravitationnelle (due à une autre planète par exemple). Dans le système solaire, l'orbite de la planète Mercure affiche une précession de 43 secondes d'arc par siècle (angle dont tourne le grand axe de l'orbite de Mercure en un siècle). Cet effet s'explique avec une grande précision dans le cadre de la relativité générale d'Einstein de 1915, dont il a constitué historiquement le premier test observationnel. Il s'agit dans cette partie de calculer la précession de périhélie prédite par la relativité restreinte (et non générale), en suivant les étapes classiques de la résolution de l'équation de la dynamique. On rappelle les formules relativistes donnant l'énergie et la quantité de mouvement d'une particule matérielle de masse m se déplaçant à la vitesse instantanée \mathbf{v} dans le référentiel de l'observateur :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

45. Que deviennent les expressions de E et \mathbf{p} ci-dessus dans le cas de vitesses petites devant la vitesse c de la lumière ? Commenter.

46. Établir les relations $\mathbf{v} = c^2 \frac{\mathbf{p}}{E}$, $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ et $v^2 = c^2 \left(1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}\right)$.

47. Démontrer de manière générale que $\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$ où $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ est la force s'exerçant sur la particule dans le référentiel galiléen de l'observateur. Quelle relation retrouve-t-on dans le cas de la mécanique newtonienne ?

On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Le rayon vecteur $\mathbf{SM} = r\mathbf{e}_r$ repère la position M de la planète. La force gravitationnelle exercée par le Soleil de masse

M_S sur la planète Mercure de masse m assimilée à un point matériel est notée $F = -\frac{\alpha m}{r^2} e_r$, où $\alpha = GM_S$.

48. Dédire de ce qui précède que $E - \frac{\alpha m}{r} = K$ est une constante. Quelle relation retrouve-t-on dans le cas de la mécanique newtonienne ?

49. Soit $L = r \wedge p$ le moment cinétique de M . Montrer que $\frac{dL}{dt} = 0$.

50. En déduire que la trajectoire est plane. On se place par la suite dans le plan de cette trajectoire.

51. En déduire également que $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, où C_0 est une constante. Que retrouve-t-on dans le cas $v^2/c^2 \ll 1$?

52. Soit $r(\theta)$ l'équation polaire de la trajectoire. On pose $u(\theta) = 1/r(\theta)$. Montrer que $v^2 = C_0^2 (1 - v^2/c^2) \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right)$. On pourra partir de l'expression de v^2 en coordonnées polaires et utiliser le résultat précédent.

53. En utilisant 46, 48 et 52, montrer que $C_0^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) = \frac{1}{m^2 c^2} [(K + \alpha m u)^2 - m^2 c^4]$.

54. En dérivant la relation ci-dessus par rapport à θ , mettre l'équation de la trajectoire sous la forme $\left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = \frac{1}{p} + \varepsilon u$ (p et ε étant des constantes positives à déterminer).

55. Montrer que dans la limite non relativiste $v^2/c^2 \ll 1$, εu est négligeable devant $1/p$.

56. Dédire, dans cette approximation, que par un choix convenable des axes l'équation de la trajectoire est $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ ($e \geq 0$). Commentaire.

57. Que devient l'équation précédente lorsque l'on ne peut plus négliger le terme εu ?

58. Au bout de quelle période angulaire $r(\theta)$ reprend-il alors la même valeur ?

60. Montrer qu'à chaque révolution de la planète, dans le cas $\varepsilon \ll 1$, le périhélie avance d'un angle $\Delta\theta = \frac{\pi \alpha}{p c^2}$.

61. Vérifier l'homogénéité de cette formule par un argument dimensionnel.

62. Application numérique : calculer l'avance de périhélie de Mercure, en secondes d'arc par siècle, en utilisant les données fournies en début d'énoncé.

63. Que peut-on en conclure ?

VI. Rayonnement gravitationnel.

Dans toute cette partie, on utilise des notions de mécanique newtoniennes (donc non relativistes) pour décrire un effet spécifique prédit par la théorie de la relativité générale : des masses accélérées rayonnent de l'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles se propageant à la vitesse de la lumière. Cette situation est semblable à celle rencontrée en électromagnétisme, où les charges accélérées émettent un rayonnement électromagnétique se propageant à la vitesse de la lumière dans le vide. (Le rayonnement gravitationnel, qui correspond à une onde de cisaillement de l'espace, provient des termes quadripolaires de la source d'ondes, et sa structure est très différente de celle du rayonnement électromagnétique ; nous n'examinerons pas ce point fondamental ici). L'existence d'ondes gravitationnelles a pu être confirmée indirectement par leur effet sur un système binaire stellaire : la perte d'énergie du système sous forme de rayonnement gravitationnel conduit à la décroissance de la période orbitale du système. L'effet, qui s'accorde à 0,4% près avec la prédiction théorique, fut détecté dans les années 1980 sur le pulsar binaire PSR 1913+16 découvert par R. Hulse et J. Taylor (prix Nobel de physique 1993).

PSR 1913+16 est composé de deux étoiles à neutrons de masses $m_1 = 1,44 M_S$ et $m_2 = 1,38 M_S$ (les masses sont exprimées en unités de masse solaire M_S). La période orbitale du système est $T_0 = 7,8 \text{ h}$. On supposera dans un premier temps que les orbites sont circulaires. On utilisera la description d'un système binaire par sa masse réduite, qui consiste à affecter la masse $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ à un corps ponctuel (la particule réduite) en orbite autour du centre de masse O du système. La vitesse de rotation, uniforme pour une orbite circulaire, est notée V , R est le rayon de l'orbite de la particule réduite et $T = 2\pi/\omega$ sa période de révolution. Elle obéit à la troisième loi de Kepler que l'on écrira $\frac{R^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{(2\pi)^2}$.

64. Analyse dimensionnelle : quelle est la dépendance, notée $[P]$, de la puissance d'une force en fonction des grandeurs M (masse), L (longueur) et V (vitesse) ? On écrira cette

dépendance sous la forme d'un produit $M^\alpha L^\beta V^\delta$ et l'on déterminera la valeur des exposants α , β et δ .

65. Donner de même la dépendance $[G]$ de la constante de gravitation universelle en fonction de M , L et V .

On s'attend à ce que la puissance P_{circ} du rayonnement gravitationnel pour une orbite circulaire dépende *a priori* des paramètres μ , R , ω et des constantes G et c . L'amplitude de l'onde gravitationnelle est proportionnelle à μR^2 (moment d'inertie) et la puissance P_{circ} est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde, ce qui introduit une dépendance en $M^2 L^4$ dans P_{circ} . On écrira donc la dépendance de P_{circ} sous la forme $[P_{\text{circ}}] \equiv M^2 L^4 [G]^\gamma [\omega]^\eta [c]^\nu$ (γ , η et ν sont des exposants).

66. En utilisant les questions précédentes, montrer que l'analyse dimensionnelle conduit à l'expression $P_{\text{circ}} = AG\mu^2\omega^6 R^4 c^{-5}$, A étant une constante dont la théorie de la relativité générale donne la valeur exacte $32/5$, que l'on admettra dans la suite.

On considère que la trajectoire circulaire est peu perturbée par l'émission d'ondes gravitationnelles au cours d'une révolution. On écrit l'énergie mécanique du système à l'instant t sous la forme $E(t) = -\frac{1}{2} \frac{Gm_1 m_2}{R(t)}$ où $R(t)$ est le rayon instantané de la trajectoire circulaire (variant peu). La perte d'énergie du système des deux masses supposées ponctuelles m_1 et m_2 est attribuée entièrement à l'émission d'ondes gravitationnelles.

67. Exprimer dE/dt en fonction de G , m_1 , m_2 , R et $\frac{dR}{dt}$.

68. En utilisant le théorème de la puissance cinétique, en déduire l'expression de la variation instantanée du rayon de la trajectoire que l'on mettra sous la forme (en utilisant la troisième loi de Kepler) :

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{64}{5c^5} m_1 m_2 \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^2$$

69. Exprimer à partir de la troisième loi de Kepler $\frac{dT}{dR}$ en fonction de G , m_1 , m_2 et T .

70. En déduire l'expression de la variation instantanée de la période

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi}{5c^5} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{5/3}.$$

71. Quelle est la valeur de $\frac{dT}{dt}$ pour PSR 1913+16?

72. Déduire de 70 l'expression littérale de la durée $\Delta t = t - t_0$ mise par le système pour passer de sa trajectoire actuelle, de période T_0 à l'instant $t = t_0$, à la trajectoire de période T à une date t ultérieure.

73. Application numérique : quelle est la valeur Δt_{imp} , en années, qui sépare PSR 1913+16 de la coalescence (impact des étoiles à neutron)? On explicitera les approximations effectuées.

On tient désormais compte de l'excentricité (importante) $e = 0,617$ de l'orbite elliptique de PSR 1913+16. On obtient une approximation satisfaisante de la valeur de la puissance moyenne P_e émise sous forme de rayonnement gravitationnel par la méthode qui consiste à approximer localement un arc élémentaire de la trajectoire réelle par un arc de cercle de rayon R (le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré). On reprend l'étude de la particule réduite de masse μ .

74. La particule réduite décrivant sa trajectoire à la vitesse instantanée V , quelle est la vitesse angulaire instantanée ω de sa rotation sur l'arc de cercle de rayon R auquel on assimile la trajectoire au point M considéré, en fonction de V et R ?

75. En déduire, en utilisant 66, l'expression de la puissance instantanée P rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles en fonction de G , μ , R , V et c .

La position M de la particule réduite est repérée dans un système de coordonnées polaires (r, θ) de centre O (référentiel barycentrique), tel que $OM = r$. Le rayon de courbure R intervient dans l'expression de l'accélération normale $a_N = \frac{V^2}{R}$ de la particule. La force étant centrale (trajectoire képlérienne), l'accélération \mathbf{a} est dirigée vers O , comme l'indique la figure 3. φ désigne l'angle entre \mathbf{a} et sa projection a_N (c'est aussi l'angle entre V et sa projection sur la direction perpendiculaire à OM).

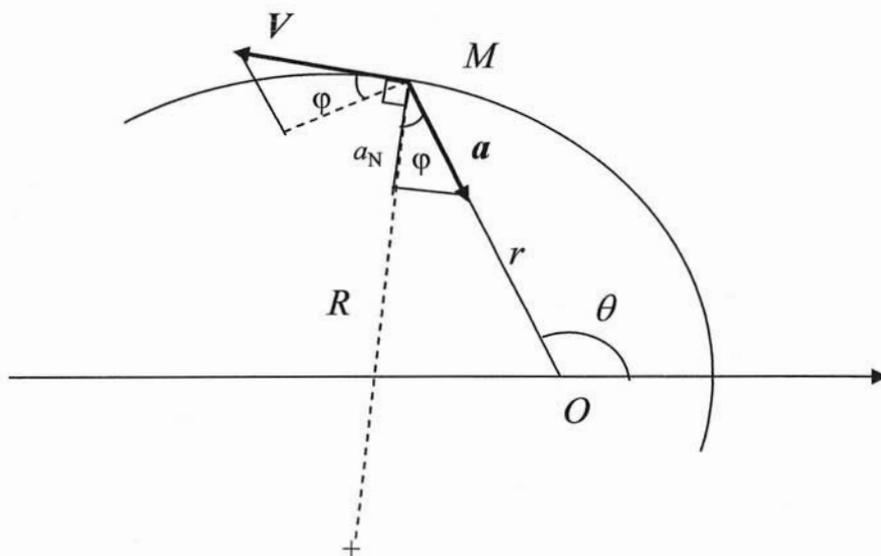


Figure 3.

76. Le module de l'accélération est $\|a\| = \alpha r^{-2}$ (avec $\alpha = G(m_1 + m_2)$). Déduire de la relation entre $\|a\|$ et a_N une relation entre $R, r, V, \cos \varphi$ et α .

77. Déduire de la conservation du moment cinétique $L = r \wedge p$ une relation entre $r, V, \cos \varphi$ et

$$C_0 = \frac{L}{m}.$$

78. En éliminant $\cos \varphi$, en déduire l'expression de la puissance instantanée rayonnée sous

$$\text{forme d'ondes gravitationnelles } P = \frac{dW}{dt} = \frac{32G\mu^2\alpha^2C_0^2c^{-5}}{5r^6}.$$

79. En utilisant la relation $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C_0$ (deuxième loi de Kepler), en déduire l'énergie

$$\text{élémentaire } dW \text{ rayonnée sur un arc } d\theta \text{ de la trajectoire : } dW = \frac{32G\mu^2\alpha^2C_0^2c^{-5}}{5r^4} d\theta.$$

80. Quel est le rapport de l'énergie élémentaire dW rayonnée sur un arc $d\theta$ au périastre ($\theta = 0$) et à l'apoastre ($\theta = \pi$) en fonction de l'excentricité e de l'ellipse? (On utilisera l'expression de r donnée pour une ellipse). Que vaut ce rapport dans le cas de PSR 1913+16 ? Dans le cas d'une excentricité de 0,9 ?

81. Une trajectoire elliptique a tendance à se circulariser. Expliquer qualitativement pourquoi en fonction de ce qui précède.

82. La puissance moyenne rayonnée au cours d'une révolution est définie par

$$P_e = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} dW(\theta) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} dW(\theta). \text{ Exprimer } P_e \text{ en fonction de } G, \mu, \omega, a, c \text{ et } e. \text{ On éliminera}$$

d'abord C_0 , puis α et p des expressions intermédiaires. On rappelle que

$$p = C_0^2 / \alpha = a(1 - e^2), \text{ où } a \text{ est le demi-grand axe de l'orbite. On utilisera la troisième loi de}$$

Kepler sous la forme $T = 2\pi a^{3/2} \alpha^{-1/2}$ (ou encore $\omega^2 a^3 = \alpha$).

83. Mettre P_e sous la forme $P_e = P_{\text{circ}} \times f(e)$ où $f(e)$ est une fonction de l'excentricité à

$$\text{déterminer. (On donne la valeur de l'intégrale } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \theta)^4 d\theta = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4 \text{).}$$

84. Quelle est l'interprétation de P_{circ} dans ce contexte ?

85. Quelle est la valeur de $f(e)$ pour PSR 1913+16 ? Quelle est sa valeur pour une excentricité de 0,9 ? Commentaire.

86. La formule exacte pour $f(e)$, donnée par la théorie de la relativité générale, est

$$f(e) = (1 - e^2)^{-7/2} \times \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right). \text{ Quelle est l'erreur relative commise par la méthode}$$

approchée, qui conduit à l'expression obtenue en 83, par rapport au calcul exact ?

VII. Déviation des rayons lumineux.

Un test historique (1919) de la théorie de la relativité générale dans le système solaire consiste à mettre en évidence la déviation des rayons lumineux par le Soleil. Pour ce faire, il faut comparer les positions d'une sélection d'étoiles brillantes dans une zone déterminée du ciel à la position qu'elles occupent à la faveur d'une éclipse solaire qui se produit dans cette zone, et comparer ensuite le déplacement angulaire apparent des étoiles à la prédiction de la théorie.

87. Comment définit-on une surface d'onde en optique ? Quelle est la propriété des rayons lumineux par rapport aux surfaces d'ondes dans un milieu isotrope ?

88. Les étoiles sont supposées ponctuelles à l'infini. Quelle est la forme des surfaces d'ondes émises par ces sources lumineuses pour un observateur terrestre ?

89. Donner l'expression du chemin optique parcouru par un rayon lumineux dans un milieu d'indice variable n entre deux points A et B de son trajet.

Le Soleil, ainsi que l'observateur terrestre et l'étoile lointaine appartiennent à un même plan, représenté figure 4. On utilise un système de coordonnées cartésiennes (S,x,y) centré sur le Soleil. La lumière d'une étoile atteignant l'observateur passe au voisinage de S , à la distance x . La trajectoire de la lumière en l'absence du Soleil est rectiligne : $x = \text{cste}$. On considère dans la suite que la déviation produite par le Soleil sur la lumière est suffisamment faible pour que le trajet effectivement suivi par la lumière s'éloigne peu de cette droite. On fait également l'hypothèse que l'influence du Soleil est limitée à une zone $-L \leq y \leq L$. On s'intéresse à des rayons passant au voisinage du Soleil, pour lesquels $0 < x \ll L$.

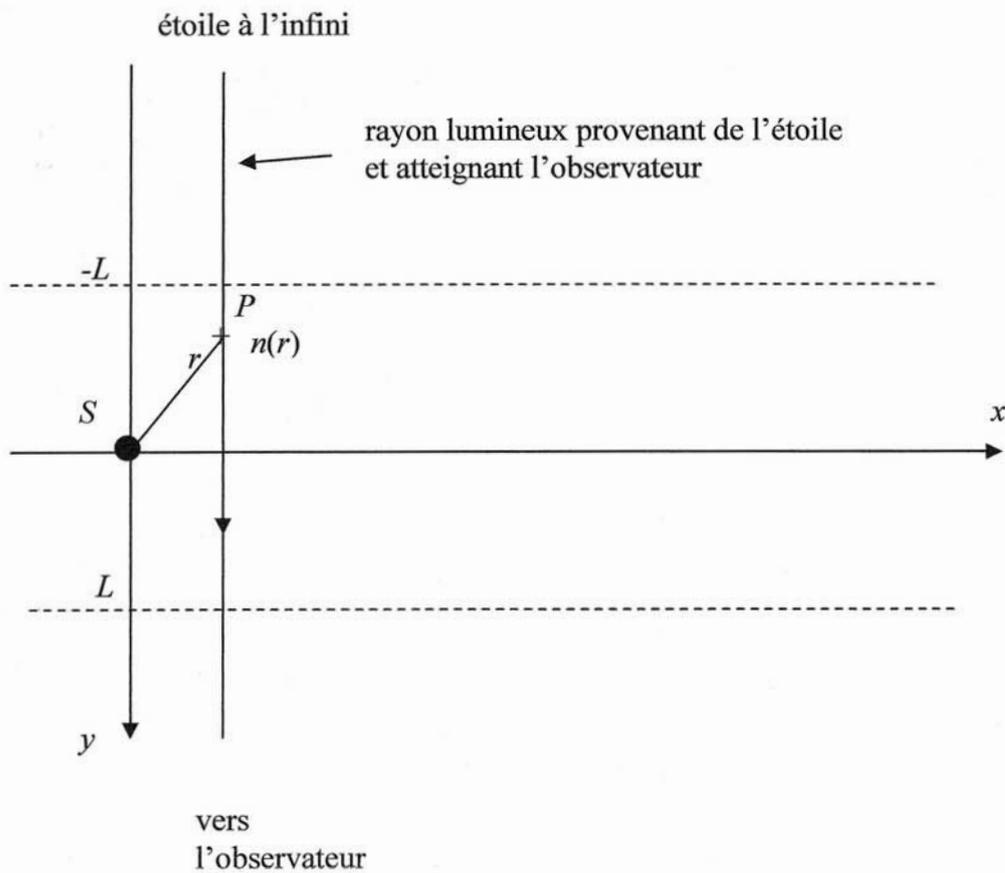


Figure 4.

Les effets relativistes engendrés par la masse statique M_S du Soleil sur la lumière peuvent être modélisés par une modification de l'indice de réfraction du vide, qui devient $n(r) = 1 + n^{(1)}(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance du Soleil à un point P du rayon lumineux (voir figure 4). La perturbation $n^{(1)}(r)$ est reliée au potentiel gravitationnel newtonien

$U(r) = -\frac{GM_S}{r}$ du Soleil par $n^{(1)}(r) = -\frac{2U(r)}{c^2}$, c désignant la vitesse de la lumière dans le vide. La masse M_S est supposée à symétrie sphérique, de rayon R_S et l'on se place évidemment dans une situation où $r \geq R_S$.

90. Exprimer $n^{(1)}(r)$ en fonction de $R_{\text{schw}} = \frac{2GM_S}{c^2}$, appelé rayon de Schwarzschild (du Soleil). Calculer la valeur de R_{schw} .

91. On note $\delta^{(1)}(x)$ la perturbation du chemin optique associée à $n^{(1)}(r)$. $\delta^{(1)}(x)$ est calculée à partir de $y = -L$ (entrée dans la zone de perturbation). Montrer que $\delta^{(1)}(x)$ a pour expression, à la sortie de la zone de perturbation : $\delta^{(1)}(x) = 2R_{\text{schw}} \left[\ln \left(L + \sqrt{x^2 + L^2} \right) - \ln x \right]$.

(On donne $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \ln \left(|u| + \sqrt{u^2 + v^2} \right)$).

92. La fonction $\delta^{(1)}(x)$ caractérise la déformation, représentée dans le plan de la figure 4, d'un front d'onde optique qui a traversé la zone de perturbation. Comment obtenir à partir de $\delta^{(1)}(x)$ la déviation $\alpha(x)$ des rayons lumineux par rapport à la trajectoire $x = \text{cste}$? On pourra s'aider d'un schéma.

93. Calculer $\alpha(x)$ pour la fonction $\delta^{(1)}(x)$ de la question 91. On utilisera l'approximation $x \ll L$. Quel est le sens du décalage?

94. Application numérique : un observateur reçoit la lumière provenant d'une étoile passant au voisinage immédiat du bord du Soleil (lors d'une éclipse). Quelle est la valeur de α correspondante, en secondes d'arc? Les observations réalisées par la suite ont confirmé cette valeur.