

SESSION 2010

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : GÉNIE CIVIL

**ÉPREUVE DE MODÉLISATION
DES MATÉRIAUX ET DES OUVRAGES**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Cette épreuve est constituée de deux sujets indépendants :

- **modélisation des matériaux et patrimoine ;**
- **modélisation mécanique des ouvrages.**

Il est demandé aux candidats de traiter les deux sujets sur des copies séparées.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Epreuve de modélisation des matériaux et des ouvrages

Sujet matériaux et patrimoine

Le sujet proposé comprend deux parties indépendantes. Dans une première partie (partie A), un maître d'œuvre se propose d'évaluer les performances du matériau bois pour la réalisation d'un pont. La seconde partie (Partie B) porte sur le comportement des chaussées bitumineuses sous l'effet de la température.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. Pour chaque question, en complément des résultats de calculs proprement dits, il conviendra de justifier les choix effectués et calculs réalisés et de commenter les résultats obtenus.

Partie A – Evaluation structurelle et environnementale d'un tablier de pont

Un maître d'œuvre, se proposant de répondre à l'appel d'offre de conception d'un pont routier, s'interroge sur les matériaux les plus appropriés vis-à-vis de critères structurel et environnemental.

Choix du matériau pour la sollicitation de flexion

Sur le plan structurel, le problème posé est de minimiser la masse de l'ouvrage car celui-ci doit être préfabriqué. Le maître d'œuvre recourt alors à la méthode développée par Ashby pour son analyse.

Celle-ci permet de déterminer les matériaux adaptés à des performances données. Cette méthode est mise en application ici pour la flexion 3 points. On considère une poutre rectangulaire sur 2 appuis simples, de longueur L , de hauteur h et de largeur b , sollicitée en flexion dans son plan sous l'action d'une force F centrée. La force, la longueur et la largeur sont fixées. La hauteur h est variable. L'aire de la section vaut $S = b \cdot h$. Le matériau constitutif de la poutre a une masse volumique ρ . Le problème a pour objectif de chercher le matériau qui minimisera la masse de la poutre pour une flèche n'excédant pas δ_m .

A1) Exprimer S en fonction de la masse de la poutre, m , sa longueur, L , et la masse volumique, ρ , du matériau.

A2) A partir de la condition $\delta < \delta_m$ montrer que l'expression de la masse m peut s'écrire sous la forme de la fonction objectif suivante :

$$m > \frac{f(F, L, b, \delta_m)}{\frac{\sqrt[3]{E}}{\rho}}$$

A3) Traduire l'objectif en une condition sur les propriétés du matériau à sélectionner.

A4) Montrer à l'aide de l'abaque joint (fig. 1) que le matériau bois est le matériau le plus performant vis-à-vis de cet objectif.

A5) Le second objectif consiste à sélectionner le matériau qui donnera la masse minimale de la poutre pour résister à la même sollicitation de flexion que précédemment. A partir de la condition $\sigma < \sigma_f$, montrer que l'expression de la masse m peut s'écrire sous la forme de la fonction objectif suivante :

$$m > \frac{g(F, b, L)}{\frac{\sqrt{\sigma_f}}{\rho}}$$

A6) Traduire l'objectif en une condition sur les propriétés du matériau à sélectionner.

A7) Montrer à l'aide de l'abaque joint (fig. 2) que le bois est aussi performant que les composites de verre (notés GFRP) et plus performant que les alliages d'aluminium.

A8) Placer le point relatif au bois lamellé collé de classe GL 24 sur la fig. 2, et expliquer d'éventuelles différences avec les données de l'abaque.

Evaluation environnementale simplifiée de la solution proposée

Le maître d'œuvre décide de retenir le bois comme matériau principal du tablier mais souhaite connecter une dalle en béton armé sur les poutres en bois lamellé collé. Il s'interroge alors sur l'impact environnemental de la solution en limitant son analyse à l'impact sur l'environnement de la phase de production des matériaux et de la phase de fin de vie de la structure, et en limitant les indicateurs aux émissions de gaz à effet de serre (GES) et à l'énergie consommée. Les émissions de GES sont comptées ici en masse équivalente de CO₂. L'objectif de l'étude est d'évaluer les impacts pour plusieurs scénarios de fin de vie.

A9) Donner les étapes de la vie de la structure dont il faudrait tenir compte pour réaliser une analyse de cycle de vie complète.

A10) Les émissions de GES pendant la phase de production du bois lamellé collé sont de -0,48t/m³. La phase de production comprend le matériau, les opérations de sciage de l'arbre et toutes les étapes intermédiaires jusqu'à celle de l'encollage des lamelles et la réalisation des poutres. Expliquer la raison pour laquelle cette valeur est négative. Retrouve t'on approximativement cette valeur en considérant qu'une part représentant 49% du bois anhydre est constituée de carbone ? Données : on considère que la masse volumique d'un résineux à un taux d'humidité de 12% est de 450 kg/m³.

A11) Dans la phase de production du bois lamellé collé, le bilan de l'énergie totale est la somme de l'énergie non renouvelable et de celle renouvelable. L'énergie non renouvelable dépensée pour la production de bois lamellé collé est évaluée, dans la littérature, à 5500 MJ/m³, l'énergie totale à 19000 MJ/m³. La différence entre ces 2 valeurs étant l'énergie renouvelable. Expliquer les origines de l'énergie renouvelable prise en compte dans cette analyse.

A12) Dans la phase de fin de vie, le scénario 1 consiste à enfouir le bois dans une décharge spécialisée, le scénario 2 à utiliser le bois comme source d'énergie calorifique. Pour le scénario 1, les études montrent que, seule, une partie du bois se dégrade, ce qui conduit à une émission de CO₂ (masse équivalente) de 0,2 t/m³ de bois lamellé collé. Dans le scénario 2, on décide de tenir compte de l'économie d'énergie fossile réalisée en brûlant le bois dans une chaudière à la place du gaz naturel, ainsi que de la différence de gaz carbonique émise. Pour chacun de ces scénarios, déterminer le bilan des émissions de CO₂ et d'énergie totale pour les phases de production et de fin de vie d'un mètre cube de bois lamellé collé. Analyser les résultats.

Données numériques

Pouvoir calorifique du bois : 7452 MJ/m³

Emissions de CO₂ pour la combustion du gaz naturel : 61 g/MJ

Emissions de CO₂ pour la combustion du bois : 100 g/MJ

A13) Le maître d'œuvre envisage de faire le bilan des émissions de GES du tablier de pont mixte qu'il projette. Il s'agit d'un tablier de 25 m de portée, constitué de 14 poutres en bois lamellé collé de hauteur 1,20 m et de largeur 24 cm, sur lesquelles est connectée une dalle de béton en béton fibré ultra performant (BFUP) de 7 cm d'épaisseur et de 10 m de largeur. La production de BFUP entraîne des émissions de GES de 1t/m³, une dépense énergétique de 7500 MJ/m³. La phase de fin de vie (recyclage du BFUP) conduit à une émission de GES de 0,07 t/m³ et à une dépense énergétique de 825 MJ/m³. Calculer le bilan d'émission de GES et d'énergie du tablier de pont pour les 2 scénarios envisagés pour le bois. Commenter les résultats.

A14) proposer un troisième scénario de fin de vie pour le bois lamellé collé en en précisant les avantages ou les inconvénients.

Partie B - Effets climatiques sur les matériaux de chaussées bitumineuses

Dans l'objectif d'évaluer la pérennité des infrastructures de transport routier, il est important d'analyser l'impact des variations de température ambiante sur le comportement des structures de chaussées.

Analyse d'une pathologie relevée *in-situ*

Lors de la canicule de 2003 une enquête a permis d'effectuer un bilan de l'impact, en France et en Europe, du pic de chaleur sur l'état de dégradation du réseau routier. Les observations et analyses ont conclu que ce seul évènement isolé n'avait pas nettement aggravé l'état des chaussées routières. Néanmoins, une exception s'est dégagée. Un type très particulier de pathologie a été observée sur le réseau secondaire correspondant à de la fissuration longitudinale, pouvant être en dehors des bandes de roulement (cf. figure 3).

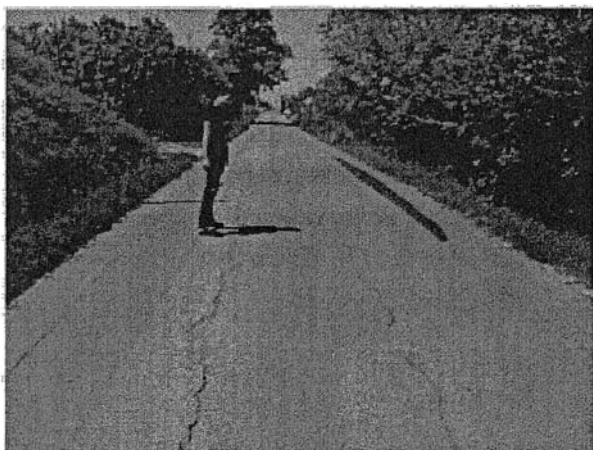


Figure 3. Exemple de dégradations observées sur des chaussées à faible trafic (Source BRGM, 2005)

Ce type de pathologie a été recensé pour des structures routières dont la couche bitumineuse est de faible épaisseur (5 à 6 cm) mise en œuvre sur une couche de grave non traitée (GNT). La tenue structurelle de ce type de chaussée est fortement dépendante du comportement du sol support et en particulier de sa portance qui peut être fortement affectée par les variations de sa teneur en eau.

B1) Expliquer quel mécanisme peut conduire au type de fissuration décrite figure 3. Quel matériau est en cause, donner des indices sur sa nature minéralogique ?

B2) L'effet de ce type de comportement peut-il affecter d'autres types de construction ?

B3) Quel type d'essai en laboratoire permettrait de prévenir ce type de désordre ?

Evolution des propriétés mécaniques des matériaux bitumineux avec la température

Pour les chaussées bitumineuses, l'étude de l'impact d'épisodes climatiques extrêmes sur leur pérennité est importante compte tenu de la forte dépendance du comportement de leurs matériaux avec la température. Le liant bitumineux qui assure la cohésion du squelette granulaire est fortement sensible à la température. Il est qualifié de thermo-susceptible. La suite des questions intéresse l'influence de la température sur le comportement mécanique des matériaux bitumineux.

Le module complexe d'un Enrobé bitumineux 0/14 mm pour couche d'assise au liant 35/50 (norme européenne EN 13108-1) de type grave bitume a été mesuré à différentes températures et différentes fréquences conformément à la norme européenne 12697-26. Les valeurs obtenues sur des éprouvettes trapézoïdales sont regroupées dans le tableau 1 ci-dessous.

Température (°C)	Fréquence (Hz)	E1 (MPa)	E2 (MPa)	E* (MPa)	Phi (°)
-10	40	29043	1048	29062	2.1
-10	30	28887	1082	28907	2.2
-10	25	28750	1105	28772	2.2
-10	10	28089	1241	28117	2.5
-10	3	27099	1434	27137	3.0
-10	1	26055	1595	26103	3.5
0	40	25622	1720	25680	3.9
0	30	25305	1752	25366	4.0
0	25	25085	1795	25149	4.1
0	10	24002	1966	24083	4.7
0	3	22442	2200	22550	5.6
0	1	20865	2363	20998	6.5
10	40	20252	2613	20420	7.4
10	30	19788	2644	19964	7.6
10	25	19474	2702	19661	7.9
10	10	17834	2862	18063	9.1
10	3	15608	3050	15904	11.1
10	1	13455	3105	13809	13.0
15	40	16965	3034	17234	10.2
15	30	16446	3060	16729	10.6
15	25	16068	3121	16369	11.0
15	10	14210	3223	14572	12.8
15	3	11728	3304	12186	15.8
15	1	9447	3190	9972	18.7
20	40	13681	3348	14085	13.8
20	30	13063	3340	13484	14.4
20	25	12650	3382	13095	15.0
20	10	10676	3383	11200	17.6
20	3	8115	3237	8738	21.8
20	1	5961	2890	6626	25.9
30	40	7460	3363	8184	24.3
30	30	6843	3254	7579	25.5
30	25	6430	3215	7190	26.6
30	10	4668	2818	5455	31.2
30	3	2810	2157	3545	37.7
30	1	1635	1498	2218	42.7

Tableau 1. Mesures de module complexe

On y retrouve pour chaque condition de fréquence et de température la partie réelle, la partie imaginaire, la norme et l'argument, respectivement dénommés E1, E2, |E*| et Phi du module complexe E* du matériau.

B4) Dans l'appellation du matériau (EN 13108-1), que signifient les termes suivants : enrobés bitumineux, 0-14 mm, couche d'assise, 35/50 ? Dans l'ancienne norme française (Tableau 2), les matériaux de type Grave Bitume (GB) étaient différenciés en plusieurs classes distinctes selon le niveau de leur performance. Entre autre la valeur de module à $|E^*(15^\circ C, 10 Hz)|$ doit respecter

certains seuils. Dans quelle classe se trouverait l'enrobé bitumineux étudié vis-à-vis du critère du module ?

type de mélange	Rapport r/R - Tenue à l'eau	Profondeur d'ornièrè (60°C-100 mm) * 10.000 cycles (%) ** 30.000 cycles (%)	Module de rigidité (15°C-10Hz) en MPa	Déformation admissible En fatigue (à 1 million de cycles)
G.B classe 2	≥ 0,65	≤ 10*	≥ 9 000	≥ 80.10 ⁻⁶
GB classe 3	≥ 0,7	≤ 10*	≥ 9 000	≥ 90.10 ⁻⁶
GB classe 4	≥ 0,7	≤ 10**	≥ 11 000	≥ 100.10 ⁻⁶

Tableau 2. Classification des matériaux grave bitume en fonction de leur performance

B5) En quoi consiste un essai de module complexe ? Afin de garantir que l'essai s'effectue dans le domaine linéaire de comportement du matériau, à quelle déformation maximale sollicite-t-on le matériau durant ces essais ?

B6) En utilisant les données expérimentales du tableau 1, quel impact (en %) aurait une variation de $\pm 2^\circ\text{C}$ autour de 10°C à la fréquence de 10 Hz, sur le module du matériau ?

B7) A quoi correspond l'équivalence temps température pour un matériau viscoélastique thermo-susceptible ? En supposant le principe d'équivalence temps/température, à quelle variation de température correspond le triplement de la fréquence de sollicitation à partir de (10°C , 10 Hz) ? Même question si, à 10°C , la fréquence est réduite au tiers de sa valeur passant de 10 Hz à 3 Hz.

B8) Vous êtes contacté par un bureau d'étude chargé de vérifier par un calcul qu'une structure bitumineuse va recevoir une charge exceptionnelle et très lourde pendant l'été. La température de la chaussée, pourrait alors atteindre une température de 30°C . Sortant du cadre habituel du calcul, basé sur la valeur classique obtenue pour 15°C et 10 Hz, comment pouvez vous renseigner votre interlocuteur sur la valeur de module à considérer ? Selon les données disponibles, quelle valeur informative lui communiqueriez-vous pour un matériau grave bitume ?

Evolution du comportement en fatigue en fonction de la température

Le matériau est soumis à des essais de fatigue sur éprouvettes console trapézoïdale, effectués à une fréquence de 25 Hz et à plusieurs températures situées entre -10°C et 30°C. L'influence de la température d'essai sur la performance en fatigue $\varepsilon_6(\theta)$, est présentée figure 4.

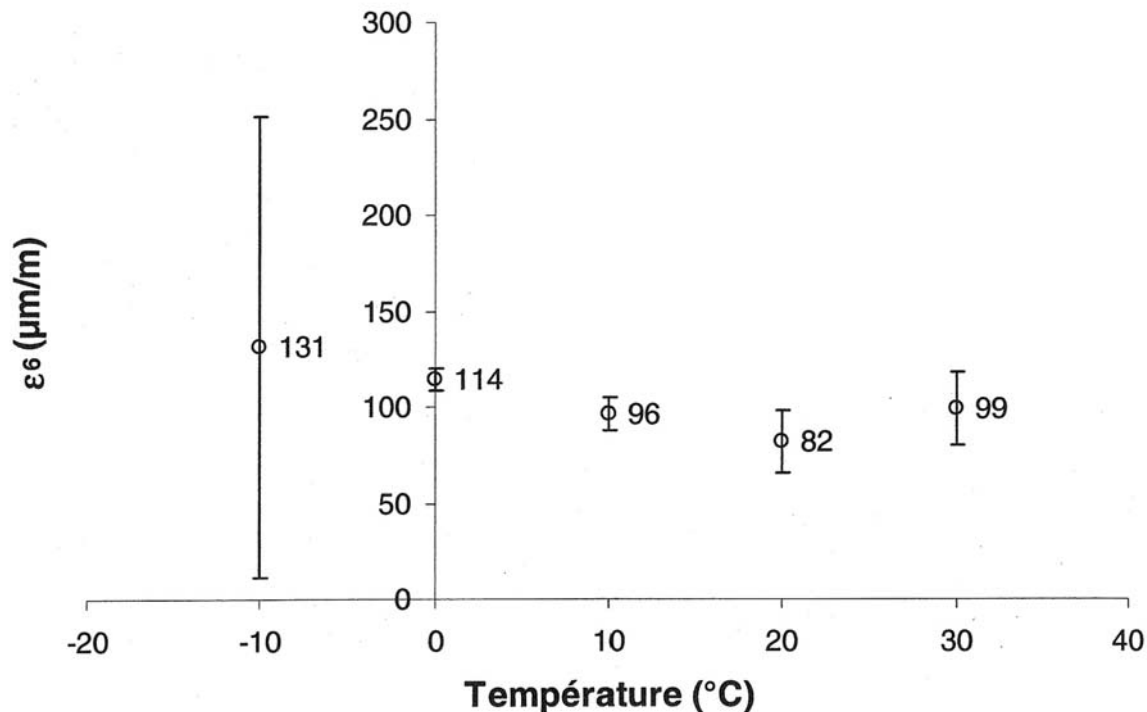


Figure 4. Influence de la température sur la performance en fatigue (25 Hz) d'un matériau Grave Bitume

B9) Pour une température donnée, à quoi correspond la performance ε_6 ? Quelle est sa définition ?

B10) Pour les calculs de dimensionnement de chaussée et à défaut d'essais de fatigue à différentes températures, la relation de passage de ε_6 entre une température de référence θ_0 et une température θ est classiquement approchée sous la forme suivante :

$$\varepsilon_6(\theta) E(\theta)^n = cst = \varepsilon_6(\theta_0) E(\theta_0)^n \quad \text{avec } n = 0,5$$

Partant de la température de référence de 10°C, à quelle variation conduit cette loi pour la fréquence de 25 Hz ? Est-elle en accord qualitatif avec les observations effectuées sur ce matériau (Figure 4) ?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : _____ Session : _____

Concours : _____

Spécialité/option : _____ Repère de l'épreuve : _____

Intitulé de l'épreuve : _____

NOM : _____

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : _____ N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

EAE GCI 1

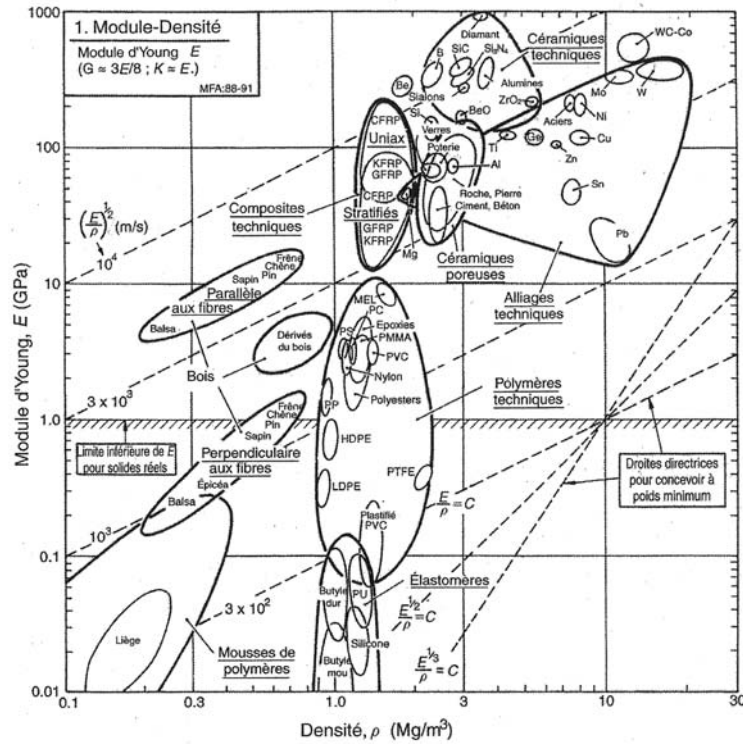


Figure 1. Module d'Young et densité d'après Ashby (à joindre aux copies)

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : _____ Session : _____

Concours : _____

Spécialité/option : _____ Repère de l'épreuve : _____

Intitulé de l'épreuve : _____

NOM : _____

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : _____ N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

EAE GCI 1

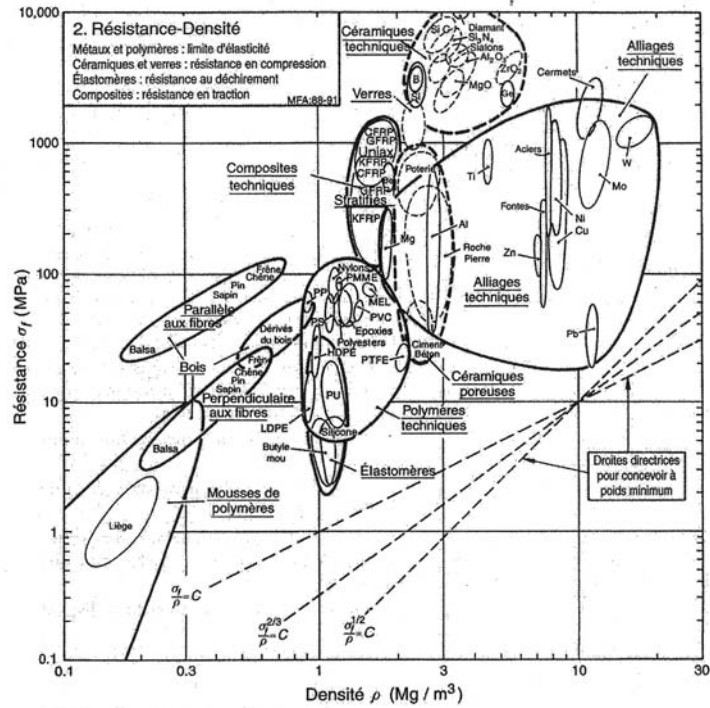
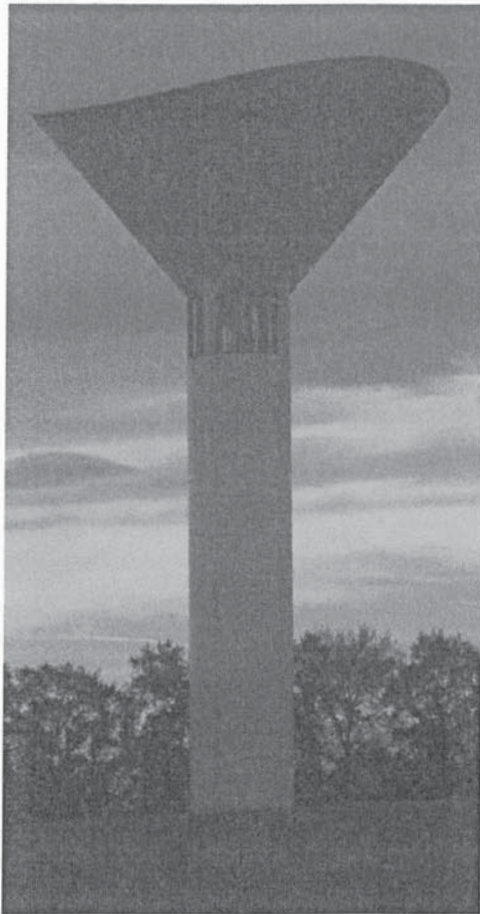


Figure 2. Résistance et densité d'après Ashby (à joindre aux copies)

D

Epreuve de modélisation des matériaux et des ouvrages

Sujet modélisation mécanique des ouvrages



- Le sujet porte sur l'étude d'un château d'eau et est composé de trois parties indépendantes.
- Lorsque c'est possible, nous demandons aux candidats d'exprimer dans un premier lieu les réponses sous forme littérale puis de faire les applications numériques.
- Le poids des trois parties est équitable et nous encourageons les candidats à toutes les aborder.

Partie I Mécanique des fluides

Les deux exercices sont indépendants.

1 Étude d'une installation hydraulique

Un château d'eau (réservoir sur tour) constitue un élément essentiel pour la régulation de la pression et du débit du réseau d'adduction d'eau potable. Situé entre la production et le réseau de distribution, il permet d'emmagasiner l'eau lorsque la consommation est inférieure à la production, et de la restituer lorsque la consommation devient supérieure à la production. Il assure également une réserve en cas de dysfonctionnement de la production ou pour les services de lutte contre les incendies.

On se propose d'étudier l'installation suivante afin de dimensionner la pompe de relevage permettant d'acheminer l'eau depuis la station de pompage jusqu'au réservoir situé en partie haute du château d'eau :

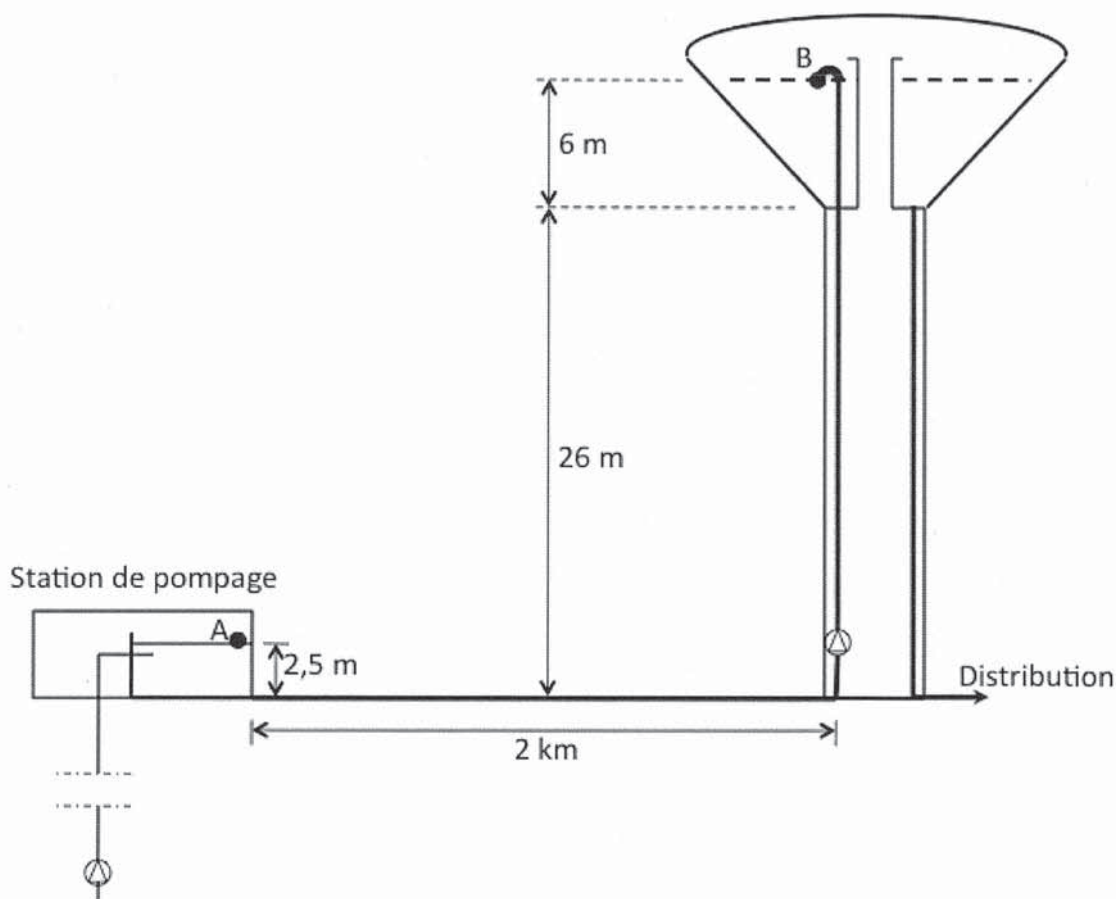


Figure 1: Description de l'installation

Le volume de stockage est communément pris comme 150% du volume de pointe journalier consommé dans le réseau de distribution. Le château d'eau est rempli durant les heures creuses, en 4h seulement. Enfin, le réseau est constitué d'une canalisation en acier de diamètre intérieur 250 mm et de rugosité moyenne 0,5 mm.

Approvisionnement du château d'eau

- Déterminer le volume de stockage nécessaire pour assurer la distribution d'eau auprès de 1700 habitants, sachant qu'un habitant consomme 200 l/jour en pointe.
- Déterminer le débit moyen dans le réseau reliant la station de pompage au château d'eau.
- En s'aidant du tableau des coefficients de pertes de charge singulières et du diagramme de Moody ci-joints, déterminer les pertes de charge sur le tronçon AB.
- Déterminer la hauteur manométrique et la puissance hydraulique de la pompe permettant d'assurer le remplissage du château d'eau.

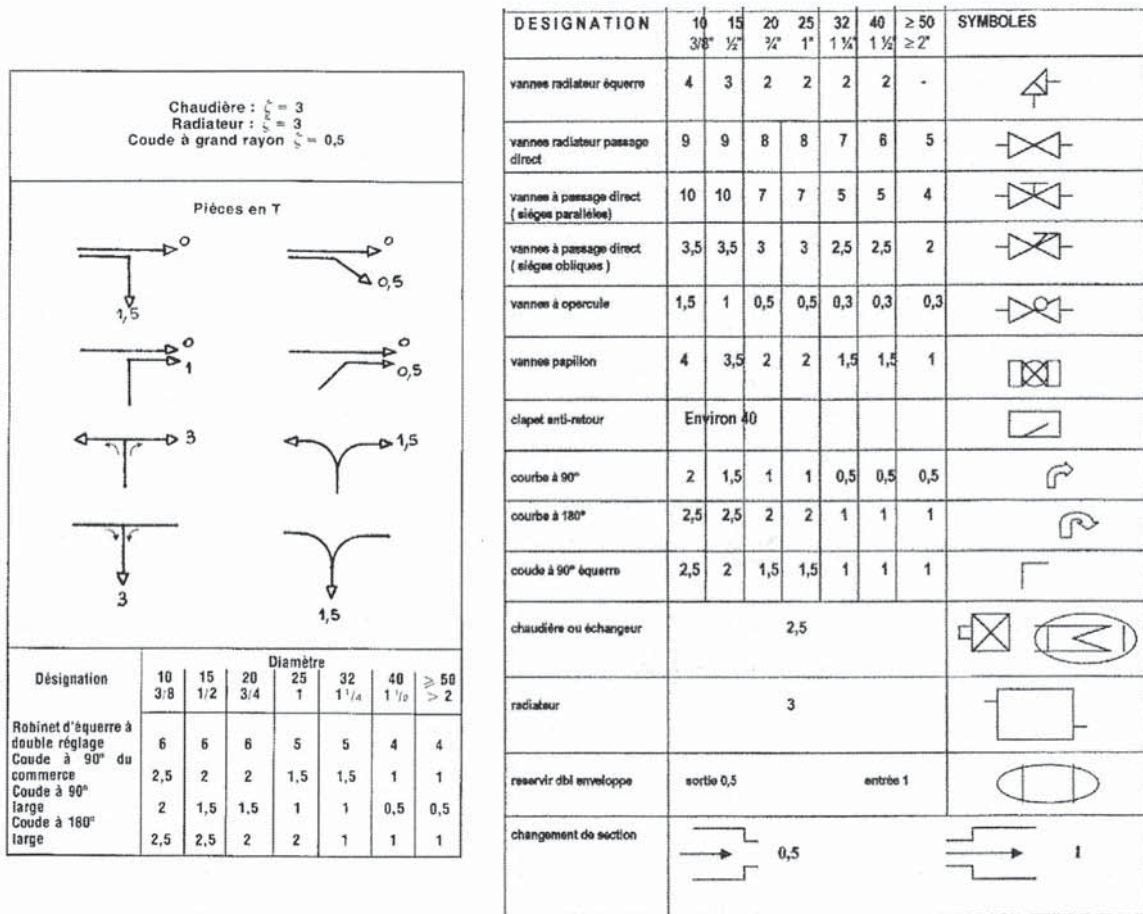


Figure 2: Coefficients de pertes de charges singulières

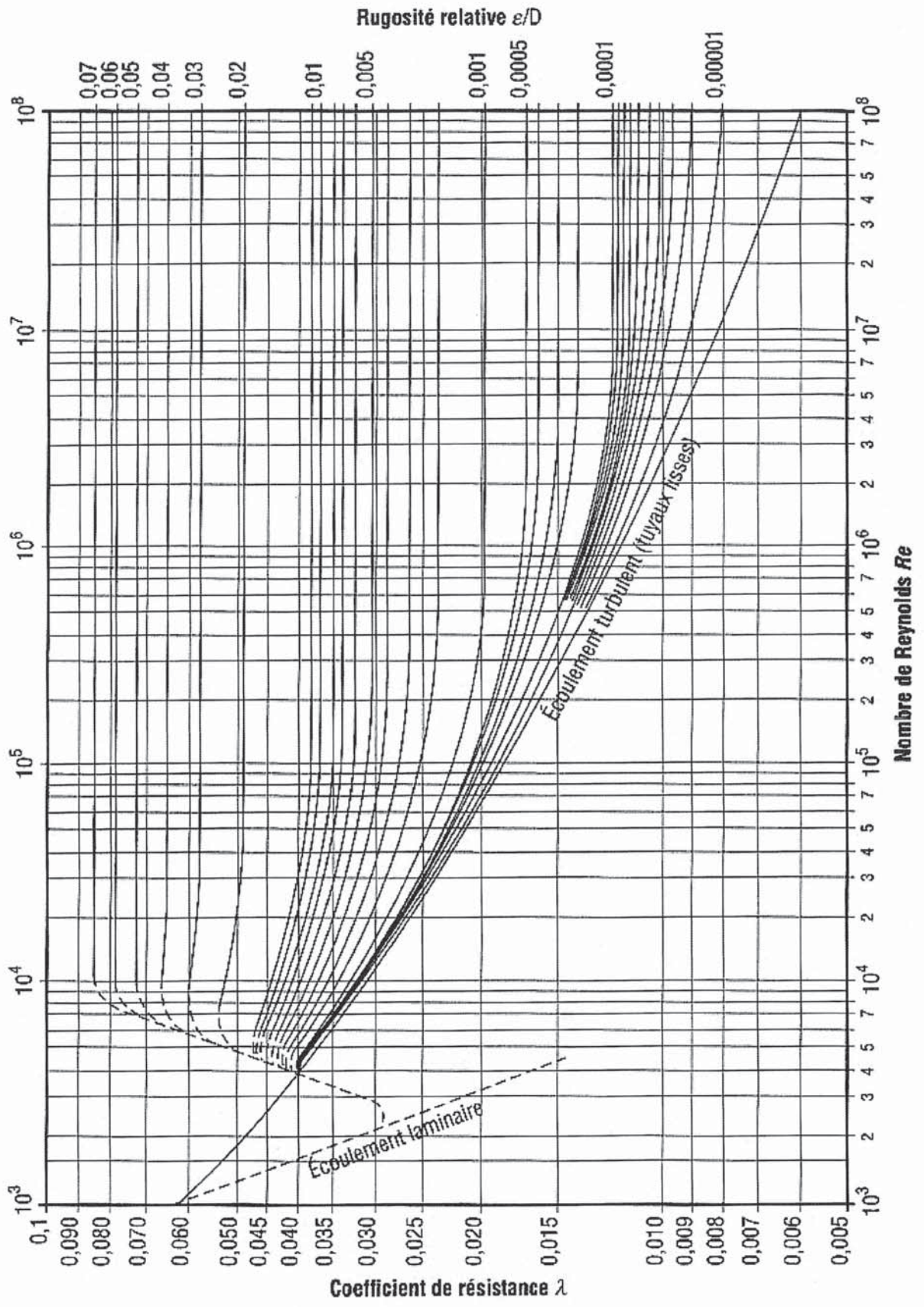


Figure 3: Diagramme de Moody

2 Étude de l'écoulement autour du fût du château d'eau

On se propose d'étudier l'écoulement dû au vent autour du fût du château d'eau. Pour cela, on considère dans le plan Oxy l'écoulement isovolume, irrotationnel et stationnaire d'un fluide parfait autour d'un cercle, trace du fût du château d'eau de rayon R , de telle sorte que la vitesse à l'infini soit parallèle à l'axe \vec{Ox} et de même sens.

L'écoulement considéré est avec circulation : il est obtenu par superposition d'un écoulement uniforme de vitesse complexe $\xi = V_0$ (V_0 réel positif), d'un doublet parallèle à l'axe Ox situé à l'origine de moment $K = -2 \pi V_0 R^2$ et d'un tourbillon ponctuel placé à l'origine, de circulation Γ .

- a. Expliciter le potentiel complexe f de l'écoulement en fonction de la variable $z = x + iy$ (avec $i^2 = -1$). Montrer qu'en coordonnées polaires r, θ du plan, celui-ci peut s'écrire :

$$f(z) = V_0 \left(r e^{i\theta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\theta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(r e^{i\theta})$$

- b. Exprimer en fonction de r, θ le potentiel des vitesses Φ et la fonction de courant Ψ de l'écoulement. En déduire que le cercle $(0, R)$ est bien ligne de courant de l'écoulement et donner les expressions des composantes radiales et tangentielles U_r et U_θ du vecteur vitesse en un point (r, θ) .
- c. Donner les expressions de U_r et U_θ sur le cercle et en déduire le module v de la vitesse en un point du cercle.
- d. On désigne par p_0 la pression à l'infini. Calculer la pression en un point du cercle en fonction de son azimut θ (on négligera les forces de pesanteur).
- e. En déduire par intégration les composantes F_x et F_y de la force exercée par le fluide sur une épaisseur unité du fût.

Partie II Mécanique des solides:

On se propose d'étudier le comportement du château d'eau représenté sur la figure 4 sous une action sismique.

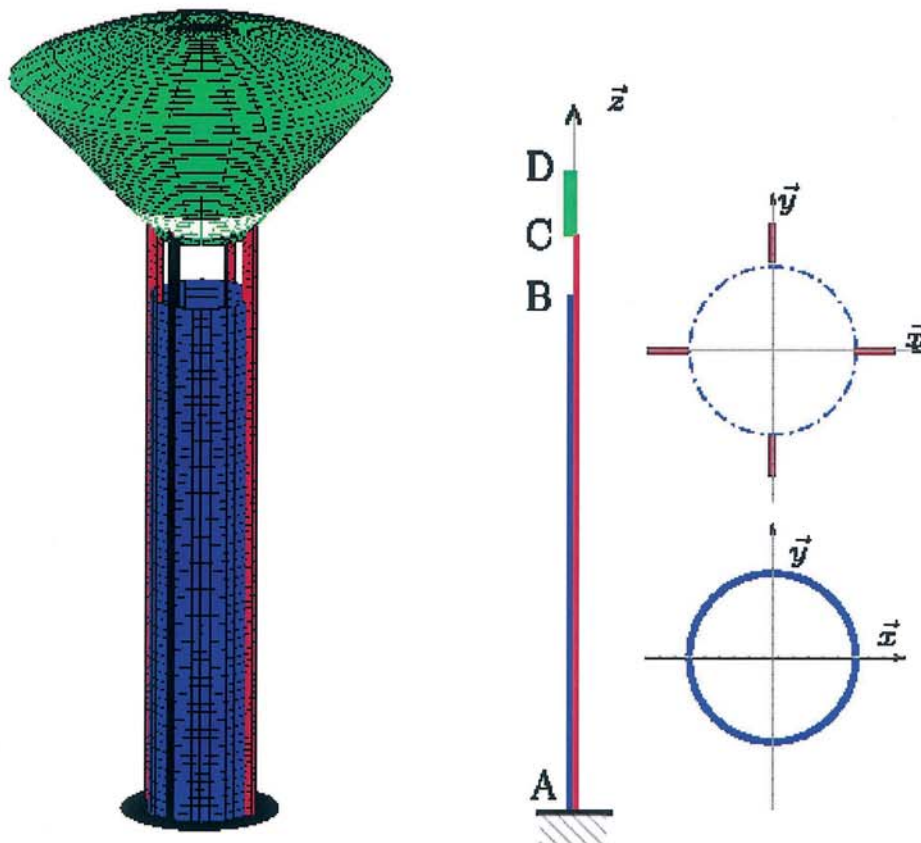


Figure 4: Château d'eau et sa modélisation

Le château est composé d'un fût AB cylindrique de rayon extérieur $R_e=3\text{m}$ et d'épaisseur $e=0,3\text{m}$, de nervures AC de largeur $h=1\text{m}$ d'épaisseur $b=0,5\text{m}$ situées à l'extérieur du fût et d'un réservoir que l'on supposera de raideur infinie dont le centre de gravité est matérialisé par le point D. L'ouvrage est réalisé en béton armé dont le module d'élasticité est $E=30\text{GPa}$, la limite élastique en compression est $f_c=25\text{MPa}$ et la masse volumique est $\rho_b=2500\text{kg/m}^3$. Les cotes des point A, B, C et D sont respectivement $z_a=0, z_b=26,5\text{m}, z_c=31\text{m}, z_d=38,5\text{m}$. La masse du réservoir plein est $M=1500\text{t}$.

Certains résultats intermédiaires sont donnés dans les questions. Nous indiquons aux candidats que ces résultats ne sont pas ceux qui doivent être obtenus dans les questions précédentes.

1 Calcul des charges statiques:

La structure ABCD est sollicitée par son poids propre (accélération de la gravité $\vec{g}=-g\vec{z}$ et $g=9,81\text{m/s}^2$) et par le poids du réservoir de masse M appliqué au point D. On se propose d'utiliser le modèle poutre indiqué sur la figure 4.

1.1 Compression:

- Tracer le diagramme de l'effort normal sur ABCD.

- b. Vérifier le dimensionnement des nervures et du fût.

1.2 Flambement des nervures:

Les nervures sont susceptibles de flamber entre B et C. Vérifier en faisant les hypothèses de liaisons qui vous semblent les plus raisonnables et en les justifiant que les nervures restent stables.

On rappelle que la longueur de flambement L_f pour une poutre de longueur L dépend des liaisons:

- $L_f = L$ pour deux appuis simples ou un encastrement et une glissière d'axe perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre .
- $L_f = L/2$ pour deux encastrements.
- $L_f \approx 0,7 L$ pour un appui simple et un encastrement.
- $L_f = 2L$ pour un encastrement et une extrémité libre.

2 Vibrations libres de flexion :

2.1 Calcul des moments d'inerties.

- Calculer l'inertie de flexion I_{AB_x} de la poutre AB (composée uniquement du fût cylindrique) par rapport à l'axe $G_{\bar{x}}$.
- Calculer l'inertie de flexion I_{AC_x} de la poutre AC (composée uniquement des 4 nervures) par rapport à l'axe $G_{\bar{x}}$.

2.2 Raideur à la flexion.

On considère une charge horizontale $\vec{F}_y = F_y \vec{y}$ appliquée au point D.

- Calculer le déplacement δ_y du point D correspondant, ainsi que la raideur $K_y = \frac{F_y}{\delta_y}$.

- Que se passe-t-il pour une charge horizontale d'orientation quelconque ?

2.3 Vibrations libres.

On adopte le modèle suivant (Figure 5) pour calculer les vibrations libres du château d'eau en flexion. Un solide de centre de gravité D et de masse $M=1500t$ est en liaison glissière d'axe \vec{x} avec le sol. Le solide est également lié au sol par un ressort de raideur $K_x=50MN/m$ et un amortisseur de constante d'amortissement c .

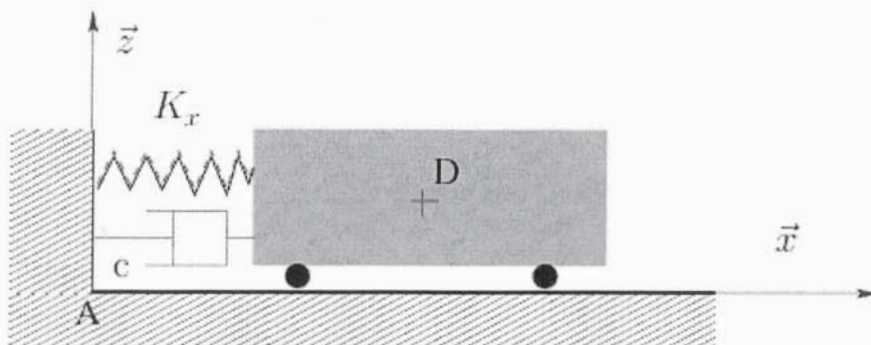


Figure 5: Modèle vibrations libres

Le repère $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est supposé galiléen.

- Indiquez les hypothèses prises pour justifier ce modèle et, éventuellement, critiquez les.
- On appelle u_x le déplacement du point D par rapport à sa position d'équilibre, écrire l'équation d'équilibre dynamique du système.
- Calculer la pulsation propre ω_0 du système.
- Discuter de la nature de la solution en fonction de l'amortissement réduit $\xi = \frac{C}{2M\omega_0}$. Tracer l'allure de la solution pour $\xi = 5\%$.

3 Vibrations forcées:

On suppose que le sol a maintenant un mouvement horizontal d'axe \vec{x} $u_s = a \sin(\omega_0 t)$, ω_0 est la pulsation propre du système et a l'amplitude du mouvement. On supposera pour la suite que la pulsation propre du système est $\omega_0 = 6\text{Hz}$.

- Faire un schéma pour modéliser le problème posé.
- Calculer l'amplitude de l'accélération du sol déterminée à l'aide du spectre de dimensionnement donné sur la figure 6 pour la pulsation propre du système étudié. En déduire l'amplitude a du mouvement du sol.

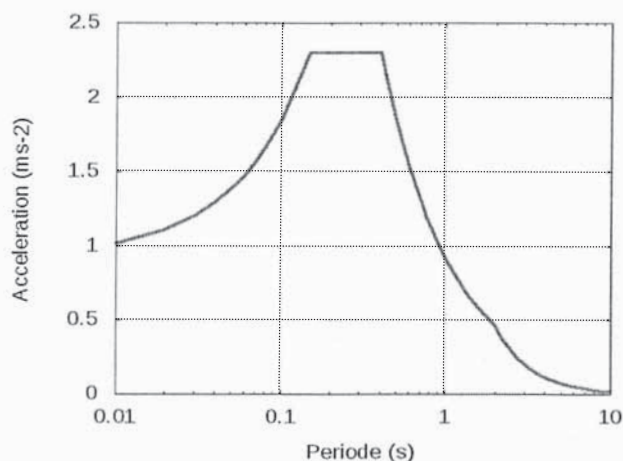


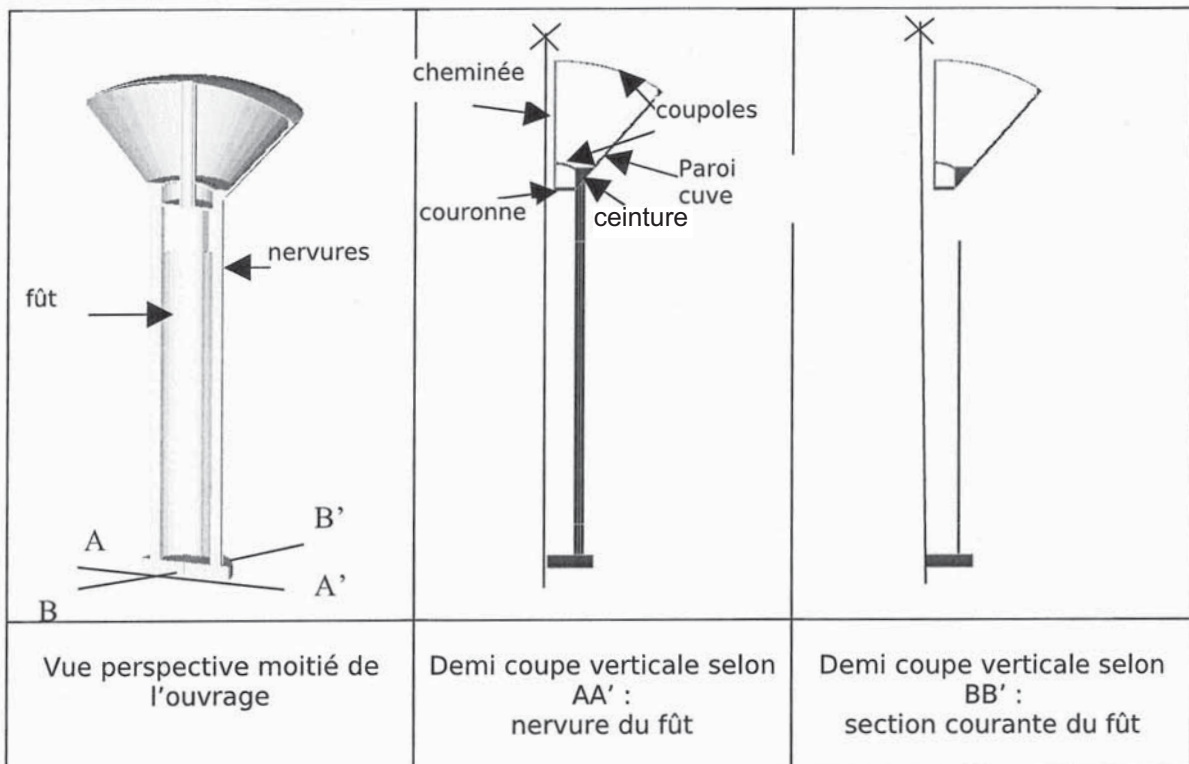
Figure 6: Spectre de dimensionnement

- Écrire l'équation du mouvement du système étudié sans la résoudre.

Partie III Modélisation Numérique

On se propose de modéliser numériquement, et plus précisément par la méthode des éléments finis, le comportement en service de la structure décrite précédemment. Le château d'eau en béton armé est composé, du bas vers le haut, de :

- une base circulaire de 4,3m de rayon et 1,2m d'épaisseur
- un fût cylindrique d'épaisseur 0,30m de 26,5m de hauteur, de rayon moyen 2,85m
- de 4 nervures verticales rigidifiant ce fût de hauteur 31,0m, réparties uniformément autour du fût
- d'une cuve tronconique composée elle-même d'une couronne circulaire constituant la base de la cuve, d'une ceinture inférieure reposant sur les nervures, d'une coupole inférieure reliant la ceinture à la cheminée, d'une cheminée (partie interne de la cuve), d'une paroi latérale de cuve et d'une coupole supérieure.



1 Modélisation sous poids propre en service

On se propose de modéliser le comportement global du château d'eau sous son propre poids et en service (cuve remplie d'eau) en considérant la partie inférieure de la base comme rigide.

1.1 Domaine, maillage

Il est demandé de définir un domaine d'étude et une discrétisation de ce domaine en précisant un type d'éléments pour chaque partie de l'ouvrage, sachant que les armatures acier ne sont pas prises en compte dans cette modélisation. Proposer 2 types d'éléments pour certaines de ces parties, en indiquant les avantages et inconvénients (mise en œuvre, précision, informations fournies par le calcul élément finis) de ces différents types d'éléments.

1.2 Propriétés de matériaux

En supposant que vous ne disposez pas des propriétés mécaniques du béton utilisé sur cet ouvrage, proposez et justifiez une valeur conventionnelle du module d'Young et du coefficient de Poisson pour ce type de chargement.

1.3 Conditions aux limites

Préciser les conditions aux limites du domaine pris en compte. Les justifier.

1.4 Chargement

Indiquer comment sont appliqués les chargements mentionnés plus haut : directions, valeurs

1.5 Résultats

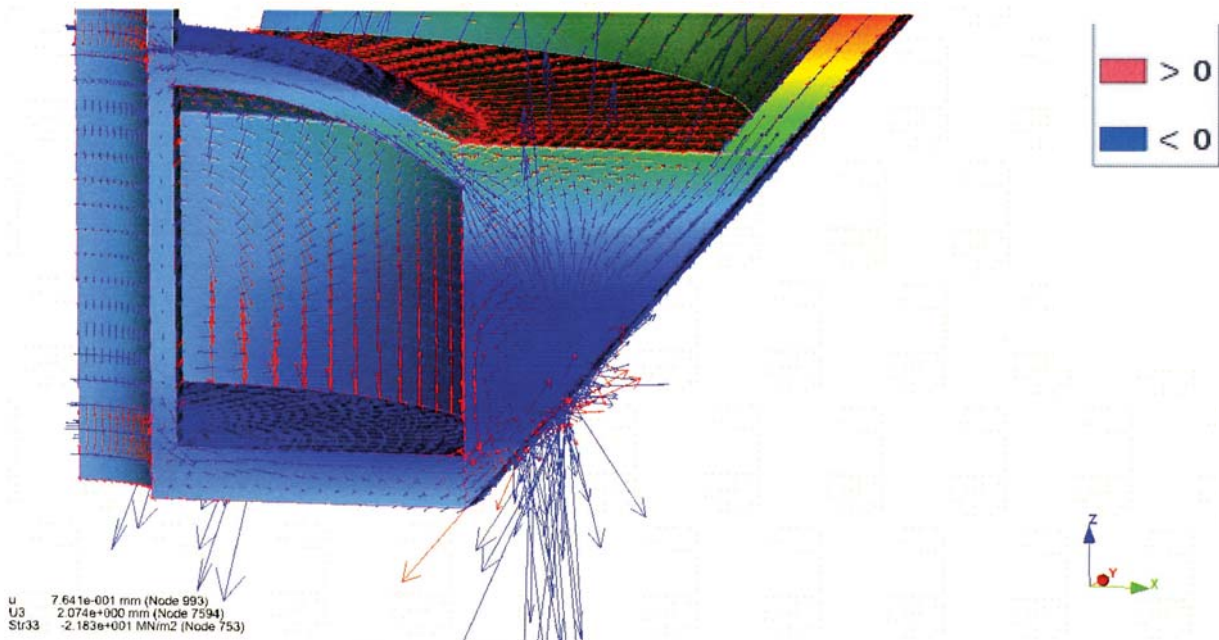
1.5.1 Déformée

Représenter sur la demi coupe AA', de manière graphique et qualitative, la déformée de l'ouvrage.

En supposant les éléments volumiques, quels sont ceux, linéaires ou quadratiques, qui donneront des résultats plus réalistes ? Lesquels donneront le plus de souplesse à la structure.

1.5.2 Contraintes

- Afin de définir les sections d'acier nécessaires dans la partie tronconique de la cuve, nous devons déterminer les efforts normaux et les moments en certains points. Comment procéder à partir des résultats fournis par chaque type d'éléments utilisé dans le maillage.
- Commenter les signes et les directions des contraintes principales dans la couronne inférieure au droit des nervures (voir figure ci-dessous).



- Les nervures comportent un risque de flambement (voir calcul analytique). Quelles sont les 2 particularités d'un calcul en éléments finis qu'il conviendra de prendre en compte pour simuler ce phénomène.

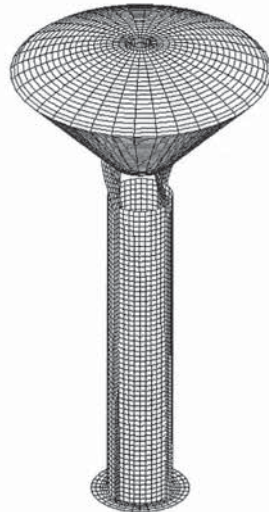
2 Modélisation sous l'action du vent

Définir dans le cas présent le domaine d'étude, en considérant par ailleurs que l'on souhaite s'assurer de la stabilité des fondations.

3 Modélisation du comportement dynamique

Sans réaliser un calcul dynamique temporel, comment à l'aide de la MEF, s'assurer que les actions dynamiques liées au vent n'auront aucune incidence sur la stabilité de la structure.

Le premier mode calculé est un mode de torsion de fréquence sensiblement égale à 1Hz : voir figure ci-dessous.



- a. Indiquer quelles sont la sollicitation et la particularité de l'ouvrage, susceptibles de provoquer le déclenchement de ce mode.
- b. Quel dispositif mettre en œuvre pour éviter ce phénomène ?