

SESSION 2011

---

**AGRÉGATION  
CONCOURS EXTERNE**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES  
Option C : PHYSIQUE APPLIQUÉE**

**PROBLÈME DE PHYSIQUE APPLIQUÉE,  
DE TRAITEMENT DU SIGNAL ET D'AUTOMATIQUE**

Durée : 6 heures

---

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

Les **parties** du problème sont **relativement indépendantes** : il est donc possible de traiter séparément les parties. Il est cependant fortement conseillé de lire l'ensemble du sujet pour en voir le fil conducteur. Le candidat indiquera clairement et respectera la numérotation des questions. La plupart des questions sont indépendantes entre elles. Il sera possible de traiter les questions en reprenant les résultats indiqués dans les questions précédentes. Le candidat répondra **avec clarté et justifiera ses réponses**.

## PROBLÈME

### SYSTEMES HAPTQUES OU A RETOUR DE FORCE

Le terme « haptique », qui provient du grec *haptain* signifiant « toucher », désigne la science du toucher et la perception du corps dans l'environnement. Les systèmes haptiques ou interfaces haptiques reconstituent, généralement à base de moteurs générant un couple résistant, certaines sensations du toucher d'un environnement virtuel, ou réel, mais distant. Les applications sont nombreuses et de plus en plus répandues, parmi lesquelles: la téléopération en milieu hostile (nucléaire ou sous-marin par exemple); la micro-manipulation; la formation sur simulateur; les jeux vidéos; la téléchirurgie.

Un système haptique est typiquement composé d'un organe de commande, appelé *maître* et piloté par l'utilisateur, d'un organe *esclave* distant qui suit les mouvements indiqués par l'organe maître et d'un *système de communication* les reliant. Enfin le dernier composant d'un système haptique est l'*environnement* de l'organe esclave, qui, selon les applications peut être réel ou virtuel. La réaction due à l'environnement est transmise par l'esclave au maître via le système de communication et l'organe maître permet à l'utilisateur de ressentir une réaction. Un tel système peut être représenté par le schéma synoptique de la Figure 1.

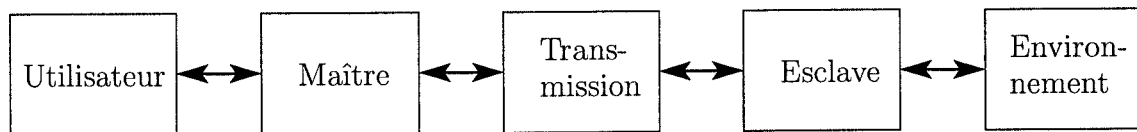


Figure 1: Structure synoptique d'un système haptique

Les nouvelles technologies de la transmission d'information présentent l'avantage majeur d'augmenter considérablement la distance entre les organes maître et esclave. Néanmoins la transmission d'information sur une grande distance engendre des retards de transmission qui peuvent rendre instable le système, s'il ne sont pas pris en compte dans la loi de commande des organes maître et esclave. Un enjeu essentiel est donc la prise en compte des retards de transmission d'une telle structure, afin de déterminer une classe de lois de commande qui garantisse la stabilité de la chaîne haptique.

Ce problème de physique appliquée, de traitement du signal et d'automatique a pour objectif d'étudier les systèmes haptiques, de proposer une modélisation adaptée, de mettre en évidence les différentes difficultés intrinsèques et aussi de proposer quelques techniques pour surmonter ces difficultés. L'application traitée est la téléchirurgie : l'utilisateur sera donc le chirurgien, l'environnement réel sera le patient à opérer et l'ensemble constitué des organes maître et esclave ainsi que le canal de transmission sera l'appareil chirurgical. Le sujet comporte plusieurs parties comme suit:

**Partie A** Le schéma synoptique indiqué sur la Figure 1 étant sous forme de chaîne, nous proposons une modélisation sous la forme de quadripôles. Cette première partie s'attachera à obtenir les principales propriétés des dipôles, quadripôles et plus généralement des multidipôles, en proposant des outils adaptés.

**Partie B** Cette partie modélisera les principaux éléments de la chaîne : transformateur parfait, gyrateur, moteurs maître et esclave, câble coaxial et l'environnement.

**Partie C** La partie C propose une loi de commande simple, qui fonctionne quand l'organe maître est directement connecté à l'organe esclave. Il est mis en évidence que cette loi de commande n'est pas adaptée à la présence d'un retard, qui déstabilise le système.

**Partie D** Une nouvelle notion, la passivité, fortement liée à l'étude de la stabilité des systèmes complexes est présentée dans cette partie. Plusieurs propriétés importantes sont démontrées. En particulier il est montré qu'en utilisant des variables d'onde, il est possible de stabiliser la chaîne haptique.

## PARTIE A: MULTIDIPÔLES ET CHAÎNE QUADRIPOLAIRE

Avant de traiter des cas particuliers d'un dipôle et d'un quadripôle, nous allons étudier des propriétés génériques des multidipôles. Nous allons démontrer tout d'abord le Théorème de Tellegen qui s'énonce comme suit :

**Théorème 1** *Considérons un circuit électrique quelconque possédant  $M$  mailles et un total de  $K$  branches. Chaque branche  $k = 1, \dots, K$  est individuellement soumise à une tension  $u_k(t)$  et est parcourue par un courant  $i_k(t)$ , en respectant la convention **générateur** pour chacune des branches. Le circuit a alors la propriété suivante :*

$$\sum_{k=1}^K u_k(t) i_k(t) = 0. \quad (1)$$

Vérifions tout d'abord ce théorème sur l'exemple du circuit linéaire de la Figure 2 avant de le démontrer. Ce circuit comporte  $K = 8$  branches qui forment  $M = 4$  mailles numérotées ①, ②, ③ et ④.

**Q.1)** Enoncer les lois de Kirchhoff des mailles pour ces 4 mailles vérifiées par les tensions  $u_k(t)$ .

**Q.2)** Enoncer les lois de Kirchhoff des noeuds reliant les courants  $i_k(t)$ .

**Q.3)** Vérifier que la relation (1) du théorème de Tellegen est bien satisfaite sur le circuit de la Figure 2.

Nous allons maintenant démontrer le théorème de Tellegen, dans le cas d'un circuit linéaire.

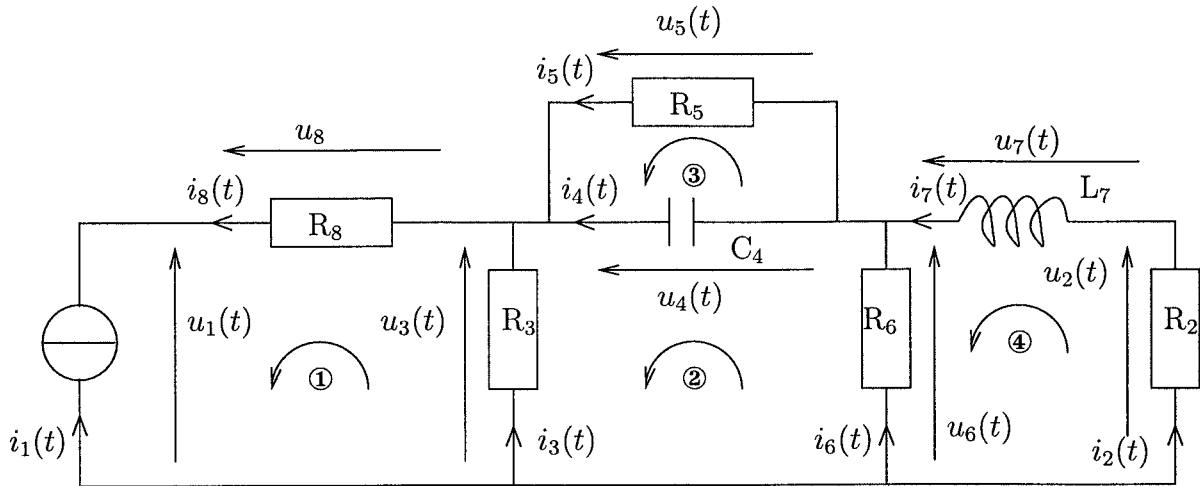


Figure 2: Circuit étudié pour vérifier le théorème de Tellegen.

**Q.4)** Dans le cas d'un circuit réduit à une seule maille *arbitraire*, montrer que la relation (1) est vérifiée.

**Q.5)** En déduire, à l'aide d'un principe que l'on précisera, que le théorème de Tellegen est vérifié pour un circuit linéaire comportant un nombre quelconque de mailles.

**Définition 1** *Considérons un réseau comportant un certain nombre de bornes, (ou pôle) de liaison avec des circuits extérieurs. Il s'agit d'un multipôle. On appelle un port un couple de bornes du réseau. Si le multipôle possède un nombre pair de pôles, on parle alors de multidipôle ou multiport. Un port est caractérisé par une tension appliquée entre ses bornes et le courant qui traverse une des bornes. La convention générateur sera utilisée pour un port en liaison avec l'extérieur. Quand le multidipôle possède un seul port, on parle de dipôle et quand le multidipôle possède deux ports on parle de quadripôle.*

Un composant électronique comme une résistance est un dipôle. Le circuit de la Figure 2 peut être vu comme un dipôle, représenté par  $\mathcal{D}$  sur la Figure 3, vis-à-vis uniquement du port  $(u_1(t), i_1(t))$ , relié au générateur de courant  $i_1(t)$ . Ce circuit peut aussi être vu comme un quadripôle, représenté par  $\mathcal{Q}$  sur la Figure 3, vis-à-vis des ports  $(u_1(t), i_1(t))$  et  $(u_2(t), i_2(t))$ . L'extérieur de ce quadripôle  $\mathcal{Q}$  étant relié au générateur de courant  $i_1(t)$  et à la résistance  $R_2$ .

Dans un multidipôle représenté sur la Figure 4, composé de  $N$  ports, ne possédant pas de source interne de courant ou de tension et étant linéaire,  $N$  sources sinusoïdales extérieures, de même pulsation  $\omega$  imposent à chacun des  $N$  ports des tensions d'amplitude complexe  $\underline{U}_k = U_k \exp(j\phi_{u_k})$  et des courants d'intensité complexe  $\underline{I}_k = I_k \exp(j\phi_{i_k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ) pour lesquels on respectera la convention générateur. On notera  $B_{\text{int}}$  le nombre de branches individuelles internes au multidipôle dont les impédances sont notées  $\underline{Z}_k(j\omega)$ ,

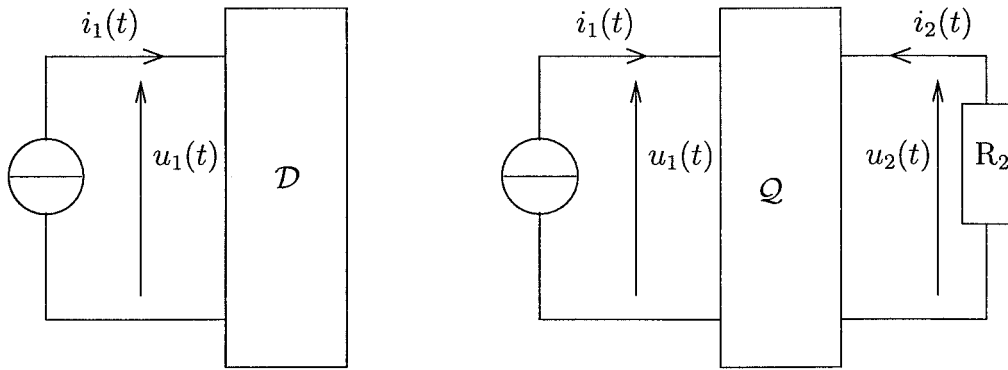


Figure 3: Circuit de la figure 2, vu comme un dipôle  $\mathcal{D}$  ou comme un quadripôle  $\mathcal{Q}$ .

avec  $k = (N + 1), \dots, (N + B_{\text{int}})$  et les tensions complexes  $\underline{U}_k = U_k \exp(j\phi_{u_k})$  et de courants d'intensités complexes  $\underline{I}_k = I_k \exp(j\phi_{i_k})$ . Par exemple, pour le schéma de la Figure 2, représenté par le quadripôle  $\mathcal{Q}$  de la Figure 3, on a deux ports, soit  $N = 2$  et  $B_{\text{int}} = K - N = 8 - 2 = 6$  branches internes.

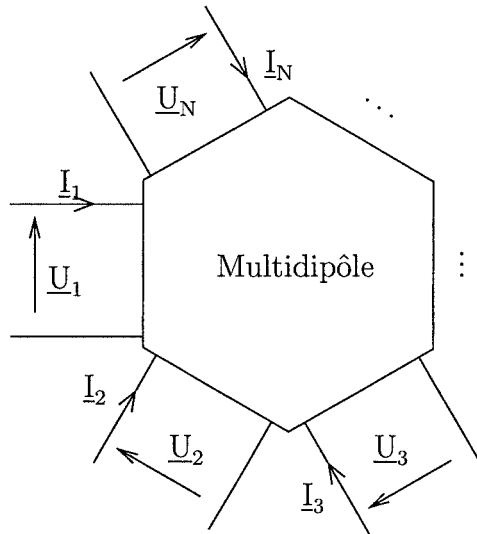


Figure 4: Représentation générique d'un multipôle.

**Q.6)** Exprimer la tension  $u_k(t)$  et l'intensité du courant  $i_k(t)$  en fonction de  $\underline{U}_k$ ,  $\underline{I}_k$ ,  $\omega$  et le temps  $t$ .

**Q.7)** Exprimer la quantité  $\sum_{k=1}^{N+B_{\text{int}}} \underline{U}_k \underline{I}_k$ .

**Q.8)** Pour les  $B_{\text{int}}$  branches internes ( $k = (N + 1), \dots, (N + B_{\text{int}})$ ), donner la relation vérifiée par  $\underline{U}_k$ ,  $\underline{I}_k$  et  $\underline{Z}_k(j\omega)$ .

On considère maintenant deux expérimentations distinctes, notées (a) et (b) de tensions et de courants appliquées aux  $N$  ports de ce multidipôle comportant  $B_{\text{int}}$  branches internes linéaires sans source de tension ou de courant (voir Figure 5). Dans la configuration (a), les grandeurs tensions et courants sont notées  $\underline{U}_k^{(a)}$  et  $\underline{I}_k^{(a)}$ , alors qu'elles sont notées  $\underline{U}_k^{(b)}$  et  $\underline{I}_k^{(b)}$  dans la configuration (b).

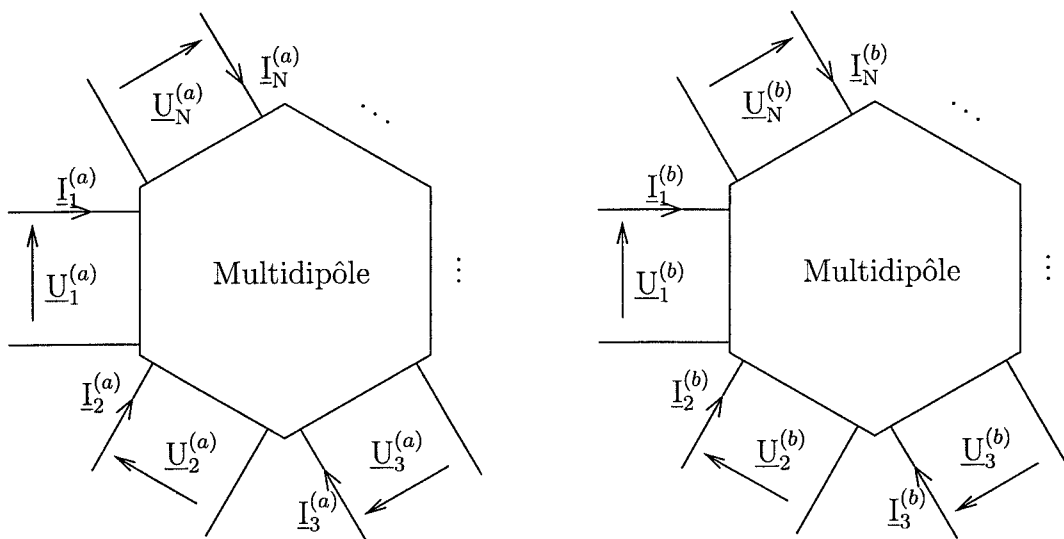


Figure 5: Deux expérimentations distinctes (a) et (b).

**Q.9)** En vous inspirant des arguments utilisés dans la démonstration du théorème de Tellegen, justifier que la relation suivante, portant sur toutes les branches du multidipôle, est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{N+B_{\text{int}}} \underline{U}_k^{(a)} \underline{I}_k^{(b)} = \sum_{k=1}^{N+B_{\text{int}}} \underline{U}_k^{(b)} \underline{I}_k^{(a)} = 0. \quad (2)$$

**Q.10)** Montrer la relation suivante, portant sur les branches internes du multidipôle :

$$\sum_{k=N+1}^{N+B_{\text{int}}} \underline{U}_k^{(a)} \underline{I}_k^{(b)} = \sum_{k=N+1}^{N+B_{\text{int}}} \underline{U}_k^{(b)} \underline{I}_k^{(a)}. \quad (3)$$

**Q.11)** En déduire la relation suivante, appelée *relation de réciprocité*, portant sur les  $N$  ports du multidipôle :

$$\sum_{k=1}^N \underline{U}_k^{(a)} \underline{I}_k^{(b)} = \sum_{k=1}^N \underline{U}_k^{(b)} \underline{I}_k^{(a)}. \quad (4)$$

On souhaite désormais caractériser le lien entre les vecteurs des tensions  $\underline{U}$  et des intensités des courants  $\underline{I}$ , définis par

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_N \end{bmatrix}.$$

Les branches internes du multidipôle étant linéaires, sans source de tension ou de courant, il existe généralement une matrice, appelée matrice impédance,

$$\underline{Z}(j\omega) = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{1,1}(j\omega) & \cdots & \underline{Z}_{1,N}(j\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}_{N,1}(j\omega) & \cdots & \underline{Z}_{N,N}(j\omega) \end{bmatrix},$$

telle que  $\underline{U} = \underline{Z}(j\omega)\underline{I}$ .

**Q.12)** Certaines configurations de multidipôles n'admettent pas de matrice impédance finie. Montrer que c'est le cas du dipôle "interrupteur ouvert".

On supposera maintenant que la matrice impédance du multidipôle existe et est finie, afin d'étudier ses propriétés.

**Q.13)** A partir de la relation de réciprocité, démontrer que la matrice impédance est symétrique, c'est-à-dire égale à sa transposée.

L'ensemble de propriétés génériques des multidipôles va désormais être complété dans le cas particulier des quadripôles, c'est-à-dire  $N = 2$ . C'est-à-dire que l'on considère le quadripôle représenté sur la Figure 6.

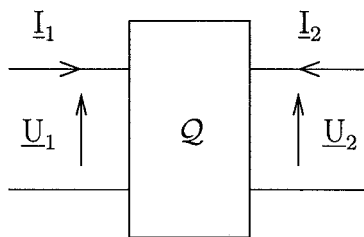


Figure 6: Quadripôle  $\mathcal{Q}$  et ses deux ports  $(\underline{U}_1, \underline{I}_1)$ ;  $(\underline{U}_2, \underline{I}_2)$ .

**Q.14)** Proposez un régime d'alimentation simple pour obtenir les valeurs  $\underline{Z}_{1,1}(j\omega)$  et  $\underline{Z}_{2,1}(j\omega)$ .

**Q.15)** Proposez un régime d'alimentation simple pour obtenir les valeurs  $\underline{Z}_{1,2}(j\omega)$  et  $\underline{Z}_{2,2}(j\omega)$ .



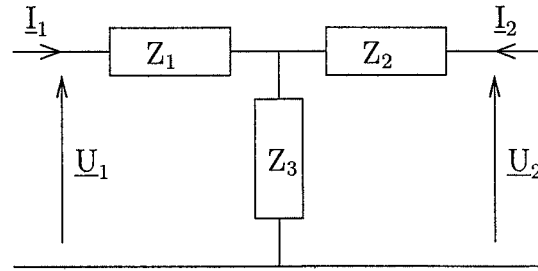


Figure 7: Exemple de quadripôle.

**Q.16)** Appliquez cette méthode pour déterminer la matrice impédance du quadripôle de la Figure 7.

On considère pour ces trois impédances trois résistances, de valeurs numériques :  $Z_1 = 1k\Omega$  et  $Z_2 = Z_3 = 10k\Omega$ .

**Q.17)** Donner l'expression numérique de la matrice d'impédance  $\underline{Z}(j\omega)$ .

Cette matrice d'impédance  $\underline{Z}(j\omega)$  relie pour un multidipôle le vecteur intensité  $\underline{I}$  et le vecteur tension  $\underline{U}$ , néanmoins elle n'est pas adaptée à l'association en chaîne de quadripôles. On définit la *matrice de transfert*  $\underline{T}(j\omega)$  par :

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{T}(j\omega) \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_{1,1}(j\omega) & \underline{T}_{1,2}(j\omega) \\ \underline{T}_{2,1}(j\omega) & \underline{T}_{2,2}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Le signe de  $\underline{I}_2$  correspond à la convention choisie sur la Figure 6.

**Q.18)** Donner les dimensions des termes  $\underline{T}_{1,1}(j\omega)$ ,  $\underline{T}_{1,2}(j\omega)$ ,  $\underline{T}_{2,1}(j\omega)$  et  $\underline{T}_{2,2}(j\omega)$ .

**Q.19)** En supposant que le coefficient  $\underline{T}_{1,2}(j\omega)$  soit non nul, exprimer les composantes de  $\underline{T}(j\omega)$  en fonction des composantes  $\underline{T}_{1,1}(j\omega)$ ,  $\underline{T}_{1,2}(j\omega)$ ,  $\underline{T}_{2,1}(j\omega)$  et  $\underline{T}_{2,2}(j\omega)$ .

**Q.20)** En reprenant les valeurs numériques de la question Q.17), donner la valeur numérique de la matrice de transfert  $\underline{T}(j\omega)$ .

La Figure 8 représente l'association en *chaîne* de deux quadripôles  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}'$  qui sont respectivement caractérisés par les matrices de transfert  $\underline{T}(j\omega)$  et  $\underline{T}'(j\omega)$ . Le port de sortie  $(\underline{U}_2; -\underline{I}_2)$  du quadripôle  $\mathcal{Q}$  est connecté au port d'entrée  $(\underline{U}'_1; \underline{I}'_1)$  du quadripôle  $\mathcal{Q}'$ .

**Q.21)** Déterminer la matrice de transfert équivalente  $\underline{T}_{eq}$  du quadripôle équivalent de ports  $(\underline{U}_1; \underline{I}_1)$  et  $(\underline{U}'_2; -\underline{I}'_2)$ .

Considérons le quadripôle  $\mathcal{Q}$  de la Figure 9, dont le port de sortie est relié à une charge résistive  $R_2$ . Ce quadripôle est caractérisé par la matrice de transfert

$$\underline{T}(j\omega) = \begin{bmatrix} \underline{T}_{1,1}(j\omega) & \underline{T}_{1,2}(j\omega) \\ \underline{T}_{2,1}(j\omega) & \underline{T}_{2,2}(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

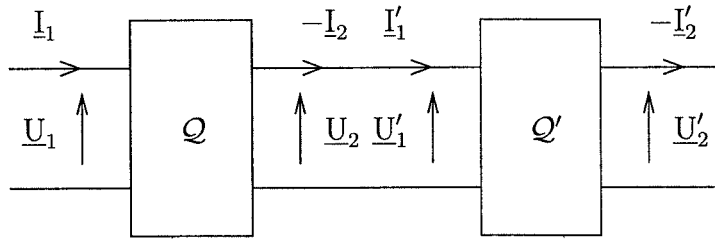


Figure 8: Association de deux quadripôles  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}'$ .

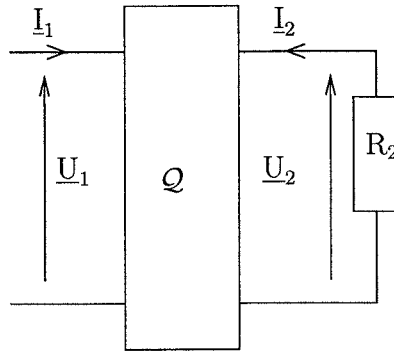


Figure 9: Quadripôles  $\mathcal{Q}$  dont le port de sortie est relié à une charge résistive  $R_2$ .

**Q.22)** Déterminer la fonction de transfert  $\frac{U_2}{U_1}$  en fonction de toutes les composantes de  $\underline{T}(j\omega)$  et de  $R_2$ .

Afin d'étudier les transferts caractéristiques d'un quadripôle, il existe une autre matrice, dite *matrice hybride*, ou matrice mixte,  $\underline{H}(j\omega)$  définie, pour le quadripôle représenté sur la Figure 6, par la relation :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \underline{H}(j\omega) \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(j\omega) & H_{12}(j\omega) \\ H_{21}(j\omega) & H_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

**Q.23)** Que représente physiquement le terme  $H_{11}(j\omega)$ ?

**Q.24)** Que représente physiquement le terme  $H_{22}(j\omega)$ ?

**Q.25)** Montrer que si  $H_{22}(j\omega) = 0$ , il n'est pas possible d'avoir une représentation du quadripôle par une matrice d'impédance.

**Q.26)** Dans le cas où  $H_{22}(j\omega) \neq 0$ , exprimer les quatre composantes de la matrice d'impédance  $\underline{Z}(j\omega)$  en fonction des composantes de la matrice de transfert  $\underline{H}(j\omega)$ .

## PARTIE B: DETERMINATION DES QUADRIPÔLES DE LA CHAÎNE

Dans la partie précédente, une introduction à l'association de quadripôles pour fabriquer une chaîne a été étudiée. On va désormais associer à chaque bloc du système haptique son quadripôle caractéristique. On considère l'application de téléchirurgie. L'opérateur est donc un être humain qui impose, en fonction du temps, l'angle de l'arbre d'un moteur électrique, qui sera le maître. L'esclave sera aussi un moteur. L'organe de transmission sera un câble coaxial. L'environnement complexe correspondant au corps du patient est aussi étudié et identifié.

**Transformateur parfait** : dans une chaîne, il est souvent utile d'insérer des transformateurs parfaits, comme convertisseurs de puissance. En considérant que le transformateur parfait de rapport  $m$ , dont le schéma est donné sur la Figure 10, peut se représenter sous la forme du quadripôle de la Figure 6, on a la relation :  $\underline{U}_2 = m\underline{U}_1$ . Ce rapport de transformation porte sur les grandeurs de même nature (ici des tensions), il s'agit donc d'un modulateur de rapport  $m$ .

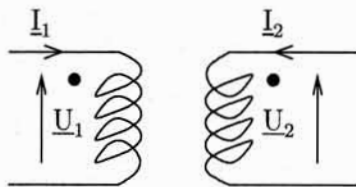


Figure 10: Schéma fonctionnel d'un transformateur parfait.

**Q.27)** Les points noirs sur la Figure 10 représentent les bornes homologues du transformateur. Définir les bornes homologues du transformateur.

**Q.28)** Préciser les deux hypothèses d'un transformateur parfait.

**Q.29)** On note  $n_1$  le nombre de spires du primaire (port  $(\underline{U}_1, \underline{I}_1)$ ) et  $n_2$  le nombre de spires du secondaire (port  $(\underline{U}_2, \underline{I}_2)$ ). Exprimer le rapport de transformation  $m$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .

**Q.30)** Donner la loi d'Hopkinson pour le circuit magnétique.

**Q.31)** Déterminer la relation entre les courants  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$ , en fonction de  $m$ .

**Q.32)** Déterminer la matrice de transfert  $\underline{T}(j\omega)$ , définie par la relation (5), de ce quadripôle en fonction du rapport  $m$ .

**Etude des moteurs** : depuis le début du sujet, seuls les ports de nature électrique (tension; courant) ont été présentés. Il est possible de généraliser la notion de multidipôle électrique à la notion de multidipôle dont certains ports sont de nature électrique et

d'autres de nature mécanique, en conservant toujours pour chaque port une grandeur potentielle (comme la tension) et une grandeur cinétique (comme le courant électrique).

**Q.33)** Pour le moteur maître, indiquer le port mécanique en précisant ses deux grandeurs potentielle et cinétique.

La partie mécanique du moteur maître (et du moteur esclave) fait intervenir l'inertie  $J$  et son coefficient de frottement visqueux  $f$ . La partie mobile du moteur maître a une vitesse angulaire  $\Omega_m(t)$ , une position angulaire  $\theta_m(t)$  qui sont imposées par le manipulateur, génère un couple moteur  $C_m(t)$  et est soumise au couple résistant ressenti par l'utilisateur  $C_h(t)$  (indice  $h$  pour homme).

**Q.34)** Donner l'équation différentielle régissant le comportement mécanique du moteur maître.

Pour un signal temporel  $s(t)$ , on notera la transformée de Laplace monolatérale (habituelle),  $S(p) = \mathcal{L}[s(t)](p)$ , en utilisant la notation  $p$  pour la variable complexe de Laplace.

**Q.35)** Donner l'équation mécanique du moteur maître dans le domaine de Laplace.

**Q.36)** Rappeler les conditions d'Heaviside.

**Q.37)** Sous les conditions d'Heaviside, simplifier l'équation mécanique du moteur maître obtenue à la question Q.35).

**Q.38)** Montrer que la partie mécanique du moteur peut se représenter graphiquement sous la forme d'un quadripôle indiqué sur la Figure 11.

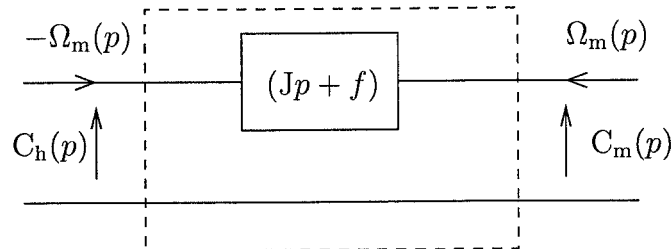


Figure 11: Quadripôle représentant la partie mécanique de la partie mobile du moteur maître.

**Q.39)** Donner la matrice de transfert  $\underline{T}_m(p)$  qui relie les ports mécaniques représentés sur la Figure 11 :  $(C_h(p); -\Omega_m(p))$  et  $(C_m(p); \Omega_m(p))$  :

$$\begin{pmatrix} C_m(p) \\ \Omega_m(p) \end{pmatrix} = \underline{T}_m(p) \begin{pmatrix} C_h(p) \\ -\Omega_m(p) \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on peut modéliser la partie mécanique du moteur esclave, de position angulaire  $\theta_e(t)$ , de vitesse angulaire  $\Omega_e(t)$ . L'arbre du moteur esclave est soumis

au couple moteur  $C_e(t)$  et au couple résistant dû à l'environnement  $C_{env}(t)$ . L'équation mécanique est alors :

$$J \frac{d\Omega_e(t)}{dt} + f\Omega_e(t) = C_e(t) - C_{env}(t). \quad (8)$$

**Gyrateur** : un *gyrateur* est un quadripôle qui présente une relation entre la grandeur cinétique d'un port et la grandeur potentielle de l'autre port. Ce type de quadripôle peut effectuer un changement de nature des ports, en particulier une conversion électromécanique. La machine à courant continu idéale est un gyrateur électromécanique par exemple. Considérons une machine à courant continu (MCC), à aimants permanents et sans perte, de force électromotrice  $e_{MCC}(t)$ , de courant électrique d'induit  $i_{MCC}(t)$ , de couple moteur  $C_{MCC}(t)$  et de vitesse angulaire  $\Omega_{MCC}(t)$ . On note  $\Gamma$  la constante de force électromotrice de cette machine, telle que  $e_{MCC}(t) = \Gamma\Omega_{MCC}(t)$ .

**Q.40)** A quelle grandeur physique la constante  $\Gamma$  est-elle homogène? Quelle est son unité?

**Q.41)** Donner la relation entre le courant électrique d'induit  $i_{MCC}(t)$  et le couple moteur  $C_{MCC}(t)$  en fonction de  $\Gamma$ . Justifier cette relation.

**Q.42)** Donner la matrice de transfert  $\underline{T}_{gyr}$  du gyrateur en fonction de la constante  $\Gamma$ , qui relie les ports électrique ( $e_{MCC}(t); i_{MCC}(t)$ ) et mécanique ( $C_{MCC}(t); \Omega_{MCC}(t)$ ) :

$$\begin{pmatrix} e_{MCC}(t) \\ i_{MCC}(t) \end{pmatrix} = \underline{T}_{gyr} \begin{pmatrix} C_{MCC}(t) \\ \Omega_{MCC}(t) \end{pmatrix}.$$

**Q.43)** Donner la matrice de transfert associée au changement de nature de port électrique en port mécanique.

**Q.44)** Commenter ce résultat.

Ce gyrateur, ou un autre composé de capteurs de couple et de vitesse permet de convertir un port mécanique en port électrique ou inversement. Dans la suite, on ne précisera plus la présence de ce gyrateur et on pourra connecter des ports mécaniques à des ports électriques.

**Le système de transmission** : de façon à faire communiquer l'organe maître et l'organe esclave, il faut introduire un système de transmission des grandeurs porteuses d'information entre eux. Du côté de l'organe maître, on dispose de l'information vitesse angulaire  $\Omega_m(p)$  qui est envoyée par le système de transmission. La donnée reçue par l'organe esclave après transmission sera  $\tilde{\Omega}_m(p)$ . A l'inverse, l'organe esclave enverra une consigne homogène à un couple  $C_c(p)$ , appelé couple coordonné, fonction des caractéristiques du moteur esclave que l'on étudiera par la suite. Cette consigne reçue par le moteur maître est notée  $\tilde{C}_c(p)$ . On note alors la matrice hybride de transmission  $\underline{H}_{trans}(p)$  vérifiant la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_c(p) \\ \tilde{\Omega}_m(p) \end{pmatrix} = \underline{H}_{trans}(p) \begin{pmatrix} \Omega_m(p) \\ C_c(p) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Dans le cas le plus simple, la distance entre les deux organes maître et esclave est très faible et une connection directe est possible, sans modification ou altération des signaux.

**Q.45)** Exprimer dans ce cas de connection directe les valeurs de  $\tilde{\Omega}_m(p)$  et  $\tilde{C}_c(p)$  en fonction de  $\Omega_m(p)$  et  $C_c(p)$ .

**Q.46)** Donner l'expression de la matrice hybride en transmission directe associée  $\underline{H}_{\text{trans directe}}(p)$ .

**Q.47)** A l'aide de la question Q.26), justifier qu'il n'existe pas de matrice d'impédance associée à ce quadripôle.

Cette situation est néanmoins peu réaliste. Une situation plus réaliste consiste à utiliser un câble coaxial. A l'aide d'un gyrateur, qui permet de transformer un port mécanique en un port électrique, il est possible de ne considérer que la tension et l'intensité électrique à transmettre par le câble coaxial. Un câble coaxial est constitué d'une paire de deux conducteurs isolés, représentés par une infinité de cellules élémentaires de longueur  $\Delta z$  où  $z$  est l'abscisse linéaire de la ligne de longueur fixe  $L_0$ . La résistance par unité de longueur (linéique), notée  $R$ , est responsable de la chute de tension en bout de ligne. La capacité linéique  $C$  et l'admittance linéique  $G$ , représentent les pertes en lignes par fuite de courant (isolation non-parfaite entre les deux conducteurs) et par effet capacitif dû à la constante diélectrique du même isolant. On considère la cellule élémentaire de la Figure 12.

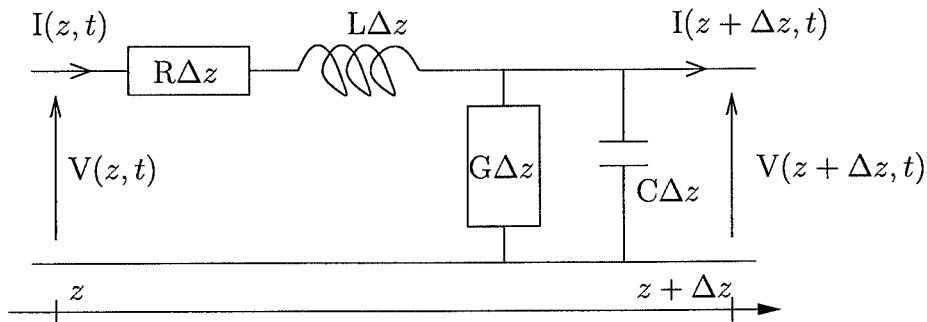


Figure 12: Cellule élémentaire du coaxial.

**Q.48)** Donner les unités des grandeurs  $R$ ,  $G$ ,  $L$  et  $C$ .

**Q.49)** Donner l'équation aux dérivées partielles, obtenue par la loi des mailles, associée à cette cellule élémentaire en prenant la limite  $\Delta z \rightarrow 0$ .

**Q.50)** Donner l'équation aux dérivées partielles, obtenue par la loi des noeuds, associée à cette cellule élémentaire en prenant la limite  $\Delta z \rightarrow 0$ .

**Q.51)** A partir de ces deux dernières équations, montrer que  $V(z, t)$  vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} - RGV(z, t) = 0. \quad (10)$$

**Q.52)** Quel est le nom de cette équation (10)?

**Q.53)** Montrer que  $I(z, t)$  vérifie la même équation de la forme (10).

On cherche maintenant les solutions de l'équation (10) en régime harmonique, de pulsation  $\omega$ , en posant :

$$V(z, t) = \operatorname{Re} \left( \tilde{V}(z) \exp(j\omega t) \right), \quad I(z, t) = \operatorname{Re} \left( \tilde{I}(z) \exp(j\omega t) \right).$$

**Q.54)** Donner l'équation que vérifie  $\tilde{V}(z)$ .

**Q.55)** Donner l'équation que vérifie  $\tilde{I}(z)$ .

Dans la suite, on posera  $\gamma(\omega) = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)} = \chi(\omega) + j\nu(\omega)$ , le nombre complexe appelé *constante de propagation*.  $\chi(\omega)$  et  $\nu(\omega)$  sont à valeur réelle et correspondent donc respectivement aux parties réelles et imaginaires du complexe  $\gamma(\omega)$ .

**Q.56)** Montrer que  $\tilde{V}(z)$  et  $\tilde{I}(z)$  sont de la forme

$$\tilde{V}(z) = \tilde{V}_a \exp(-\gamma(\omega)z) + \tilde{V}_b \exp(\gamma(\omega)z); \quad \tilde{I}(z) = \tilde{I}_a \exp(-\gamma(\omega)z) + \tilde{I}_b \exp(\gamma(\omega)z).$$

Les complexes  $\tilde{V}_a$ ,  $\tilde{V}_b$ ,  $\tilde{I}_a$  et  $\tilde{I}_b$  étant des constantes d'intégration.

On note  $Z_c(\omega) = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}}$  le nombre complexe appelé *impédance caractéristique*.

**Q.57)** Donner le rapport  $\frac{\tilde{V}_a}{\tilde{I}_a}$  en fonction de  $Z_c(\omega)$ .

**Q.58)** Donner le rapport  $\frac{\tilde{V}_b}{\tilde{I}_b}$  en fonction de  $Z_c(\omega)$ .

**Q.59)** Définir la vitesse de phase  $v_\varphi$  de l'onde et donner son expression en fonction des éléments  $\gamma(\omega)$  et  $\omega$ .

**Q.60)** Définir la vitesse de groupe  $v_g$  de l'onde et donner son expression en fonction des éléments  $\gamma(\omega)$  et  $\omega$ .

**Q.61)** Quel est l'effet de la partie réelle  $\chi(\omega)$  de la constante de propagation  $\gamma(\omega)$  sur l'onde?

On s'intéresse à l'impédance localisée  $Z(z)$ , pour  $z \in [0, L_0]$ , définie par le rapport  $Z(z) = \frac{\tilde{V}(z)}{\tilde{I}(z)}$ . On impose l'impédance de charge en  $z = L_0$  :  $Z(L_0) = Z_{\text{ch}}$ .

**Q.62)** Démontrer la relation  $\frac{\tilde{I}_b}{\tilde{I}_a} = \frac{Z_c(\omega) - Z(0)}{Z_c(\omega) + Z(0)}$ .

**Q.63)** Démontrer aussi la relation  $\frac{\tilde{I}_b}{\tilde{I}_a} = \exp(-2\gamma(\omega)L_0) \frac{Z_c(\omega) - Z_{\text{ch}}}{Z_c(\omega) + Z_{\text{ch}}}$ .

**Q.64)** En déduire que l'impédance d'entrée  $Z(0)$  peut se mettre sous la forme :

$$Z(0) = Z_c \frac{Z_{\text{ch}} + Z_c(\omega) \tanh(\gamma L_0)}{Z_c(\omega) + Z_{\text{ch}} \tanh(\gamma L_0)},$$

où  $\tanh(\cdot)$  est la fonction tangente hyperbolique.

**Q.65)** Exprimer  $\tilde{V}_a$ ,  $\tilde{V}_b$ ,  $\tilde{I}_a$  et  $\tilde{I}_b$  en fonction de  $\tilde{V}(0)$ ,  $\tilde{I}(0)$  et  $Z_c(\omega)$ .

**Q.66)** Pour quelle valeur d'impédance de charge  $Z_{\text{ch}}$ , seule une onde progressive existe?

**Q.67)** Dans le cas sans perte, c'est-à-dire,  $R = 0$  et  $G = 0$ , donner les valeurs de  $\gamma(\omega)$ ,  $\chi(\omega)$ ,  $\nu(\omega)$ ,  $Z_c$  et des vitesses de groupe  $v_g$  et de phase  $v_\varphi$ .

**Q.68)** A quelle célérité se propage l'onde?

**Q.69)** La propagation se fait-elle avec ou sans dispersion? Justifier votre réponse.

**Q.70)** Justifier que la matrice hybride reliant le port  $(\tilde{C}_c(p), \Omega_m(p))$  et le port  $(C_c(p), \tilde{\Omega}_m(p))$  vérifie

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_c(p) \\ \tilde{\Omega}_m(p) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\tau p} \\ e^{-\tau p} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_m(p) \\ C_c(p) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

**Q.71)** Exprimer le retard de propagation  $\tau$  en fonction de  $L$ ,  $C$  et la longueur  $L_0$ .

Dans le cas où l'information est transmise sur de très longues distances, il n'est plus possible d'utiliser un câble coaxial et il est nécessaire d'utiliser un réseau de télécommunication (internet ou téléphonique par exemple).

**Q.72)** Justifier brièvement que les retards constatés peuvent être fonction du temps et que le retard aller peut être différent du retard retour.

Dans la suite, on considèrera, sauf mention spécifique, que le retard aller est identique au retard retour et qu'ils sont indépendants du temps.

**L'environnement** : en restant dans le cadre de l'analogie électricité-mécanique proposée précédemment, on peut définir une quantité analogue à une impédance, l'impédance mécanique qui permet de caractériser le contact entre l'organe esclave et son environnement. Cette impédance mécanique est définie par la relation  $Z_{\text{env}}(p) = \frac{C_{\text{env}}(p)}{\Omega_e(p)}$ . L'objectif est de modéliser le dipôle terminant la chaîne de port  $(\Omega_e(p); C_{\text{env}}(p))$ .

On considère le cas idéal qui comporte deux possibilités : soit il y a contact où le couple  $C_{\text{env}}(p)$  peut prendre toute valeur, soit il n'y a pas contact avec un solide de rigidité infinie, où la vitesse  $\Omega_e(p)$  est quelconque.

**Q.73)** Dans le cas du contact, précisez la valeur de la vitesse  $\Omega_e(p)$ .

**Q.74)** En déduire l'impédance mécanique  $Z_{\text{env}}(p)$  du port en cas de contact.



**Q.75)** Dans le cas où il n'y a pas contact, précisez la valeur du couple  $C_{\text{env}}(p)$ .

**Q.76)** En déduire l'impédance mécanique  $Z_{\text{env}}(p)$  du port, quand il n'y a pas de contact.

Pour être plus réaliste, il faut affiner davantage le modèle de l'impédance mécanique de l'environnement. On pourra prendre le modèle *ressort-amortisseur*, donné en transformation de Laplace de variable  $p$  :

$$Z_{\text{env}}(p) = \frac{C_{\text{env}}(p)}{\Omega_e(p)} = \frac{mp^2 + f_v p + k_r}{p}, \quad (12)$$

où  $m$  est la masse en mouvement,  $f_v$  le coefficient d'élasticité et  $k_r$  le coefficient de rigidité de l'environnement.

Ce modèle d'impédance mécanique, bien qu'évolué ne reflète pas toujours le comportement complexe d'environnements particuliers. Dans l'application d'une téléopération chirurgicale, l'organe esclave est en contact avec la peau humaine, qui est connue pour avoir un comportement mécanique complexe. Il est effectivement non-linéaire, visco-élastique, avec hystérésis, non homogène et anisotrope. La peau est constituée de deux couches : l'épiderme et le derme. L'épiderme, constitué de cellules rigides est responsable de la résistance mécanique de la peau et le derme, constitué de fibres de collagène est responsable de l'élasticité de la peau. L'élasticité et la rigidité dépendent beaucoup de la déformation de la peau et de l'âge du patient. L'objectif est donc d'effectuer des essais mécaniques sur une population donnée et d'obtenir un comportement moyen du type (12), en utilisant la méthode des moindres carrés. Posons le vecteur de paramètres  $\xi = \begin{pmatrix} m \\ f_v \\ k_r \end{pmatrix}$ . L'impédance  $Z_{\text{env}}$  s'exprime donc par

$$Z_{\text{env}}(j\omega, \xi) = \begin{bmatrix} j\omega & 1 & \frac{1}{j\omega} \end{bmatrix} \xi = A(\omega)\xi. \quad (13)$$

En effectuant des essais avec des couples et vitesses sinusoïdales, de pulsations  $\omega_h > 0$ ,  $h = 1; \dots; H$ , il est possible de déterminer expérimentalement par un capteur de vitesse et une jauge de contrainte l'impédance  $Z_{\text{mes}}(j\omega_h)$ .

On pose le vecteur des mesures  $\underline{Z}_{\text{mes}} = \begin{bmatrix} Z_{\text{mes}}(j\omega_1) \\ \vdots \\ Z_{\text{mes}}(j\omega_H) \end{bmatrix}$  et la matrice  $\underline{A} = \begin{bmatrix} A(\omega_1) \\ \vdots \\ A(\omega_H) \end{bmatrix}$

On souhaite minimiser le critère

$$J(\xi) = \sum_{h=1}^H \frac{1}{\sigma_h^2} \|Z_{\text{mes}}(j\omega_h) - Z_{\text{env}}(j\omega_h, \xi)\|^2, \quad (14)$$

où  $\sigma_h^2$  sont des pondérations strictement positives. On posera, pour simplifier l'écriture, la matrice diagonale  $D = \text{diag}(\sigma_1^2; \sigma_2^2; \dots; \sigma_H^2)$ .

**Q.77)** Préciser les dimensions du vecteur  $\underline{Z}_{\text{mes}}$  et de la matrice  $\underline{A}$ .

**Q.78)** Exprimer le critère  $J(\xi)$  en fonction des vecteurs  $\underline{Z}_{\text{mes}}$  et  $\xi$  ainsi que des matrices  $\underline{A}$  et  $D$ .

**Q.79)** Exprimer le gradient  $\nabla_{\xi} J(\xi)$  du critère  $J(\xi)$  par rapport au vecteur  $\xi$ .

**Q.80)** Donner les dimensions de la matrice  $\underline{A}^T D^{-1} \underline{A}$ .

**Q.81)** Préciser la condition sur la matrice  $\underline{A}^T D^{-1} \underline{A}$  qui autorise l'existence et l'unicité de la solution  $\xi^*$  au problème d'optimisation  $\min_{\xi \in \mathbb{R}^3} J(\xi)$ .

**Q.82)** Exprimer cette solution unique  $\xi^*$  en fonction de  $\underline{Z}_{\text{mes}}$ ,  $\underline{A}$  et  $D$ .

Nous allons désormais discuter du choix des pondérations  $\sigma_h^2$ . On considère deux cas : toutes les pondérations sont identiques, ou bien elles peuvent être différentes.

**Q.83)** Dans le cas où les pondérations  $\sigma_h^2$  sont identiques, comment est qualifiée cette méthode des moindres carrés?

**Q.84)** Toujours dans le cas où les pondérations  $\sigma_h^2$  sont identiques, donner l'expression simplifiée de la solution unique  $\xi^*$ .

**Q.85)** Commentez cette expression sur la dépense de  $\xi^*$  par rapport à  $D$ .

Les mesures à certaines pulsations sont plus importantes que celles à d'autres pulsations, car il s'agit d'un comportement plus courant dans les applications et le modèle doit être plus fidèle à ces données.

**Q.86)** Comment choisir qualitativement les pondérations  $\sigma_h^2 > 0$  pour ces pulsations de données plus importantes, par rapport aux autres pondérations?

## PARTIE C: PROPOSITION D'UNE COMMANDE SIMPLE

En première approche, on souhaite obtenir une commande simple pour piloter les organes maître et esclave. Pour cela on souhaite donner une consigne en couple pour chacun des deux moteurs. On rappelle que  $C_m(p)$  est le couple du moteur maître,  $\Omega_m(p)$  sa vitesse de rotation,  $\Omega_e(p)$ , la vitesse du moteur esclave et  $C_e(p)$  son couple, avec  $p$  la variable complexe de Laplace. La vitesse du moteur maître  $\Omega_m(p)$ , reçue par l'esclave après transmission est notée  $\tilde{\Omega}_m(p)$ . Le couple coordonné  $C_c$  du moteur esclave, reçu par le moteur maître après transmission est noté  $\tilde{C}_c(p)$ . On pose alors les deux consignes en couples suivantes :

$$C_m(p) = -f_m \Omega_m(p) - \tilde{C}_c(p); \quad (15)$$

$$C_e(p) = -f_e \Omega_e(p) + C_c(p) - \mu C_{\text{env}}(p). \quad (16)$$

Les paramètres de commande  $f_m$  et  $f_e$  sont respectivement les amortissements en vitesse du maître et de l'esclave.  $\mu$  est le gain scalaire de couple. Le couple  $C_c$  est appelé couple coordonné et est défini par la relation suivante :

$$C_c(p) = \left( \frac{K_I}{p} + K_P \right) \left( \tilde{\Omega}_m(p) - \Omega_e(p) \right), \quad (17)$$

où  $K_I$  et  $K_P$  sont des constantes réelles.

**Q.87)** A quelle catégorie de correcteur appartient ce couple coordonné?

**Q.88)** Reproduire et compléter le schéma du quadripôle de commande du moteur esclave proposé à la Figure 13.

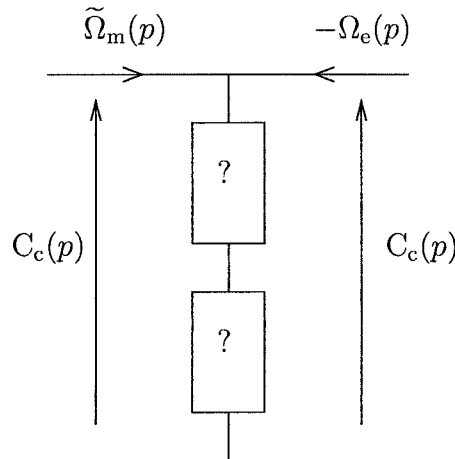


Figure 13: Structure de l'organe de commande du moteur esclave.

**Q.89)** En combinant les relations (8), (12) et (16), montrer que l'on a la relation :

$$C_c(p) = \left( 1 + \mu + \frac{(Jp + f + f_e)}{Z_{\text{env}}(p)} \right) C_{\text{env}}(p). \quad (18)$$

**Q.90)** Pour un gain de couple  $\mu$  suffisamment grand (on précisera par rapport à quoi), montrer que  $C_c(p)$  peut-être approché par  $C_c(p) \approx \mu C_{\text{env}}(p)$ .

Dans le cas d'une transmission directe, sans retard, on rappelle que l'on a les relations  $\tilde{C}_c(p) = C_c(p)$  et  $\tilde{\Omega}_m(p) = \Omega_m(p)$ . Les paramètres des correcteurs sont réglés. Leur détermination ne fait pas partie du sujet. Nous allons cependant analyser le comportement expérimental. Pour cela, nous réalisons deux essais : un essai avec contact solide et un essai sans contact en pilotage inverse.

Nous considérons d'abord l'essai en contact. Le manipulateur impose un angle  $\theta_m(t)$  au moteur maître. Cet angle augmente, puis diminue jusqu'à ce que le contact soit perdu. Le processus est répété deux fois en vingt secondes. Le rotor esclave est bloqué si son angle atteint l'angle normalisé de valeur  $\theta_e = 14$ . Hors contact, l'angle du robot esclave  $\theta_e(t)$  doit suivre l'angle du robot maître  $\theta_m(t)$ . Quand il y a contact, le couple ressenti par le manipulateur  $C_h(t)$  doit suivre le couple environnement  $C_{\text{env}}(t)$ . Les positions angulaires de cet essai sont représentées en fonction du temps sur la Figure 14. Les couples manipulateur  $C_h(t)$  et moteur maître  $C_m(t)$  sont représentés sur la Figure 15.

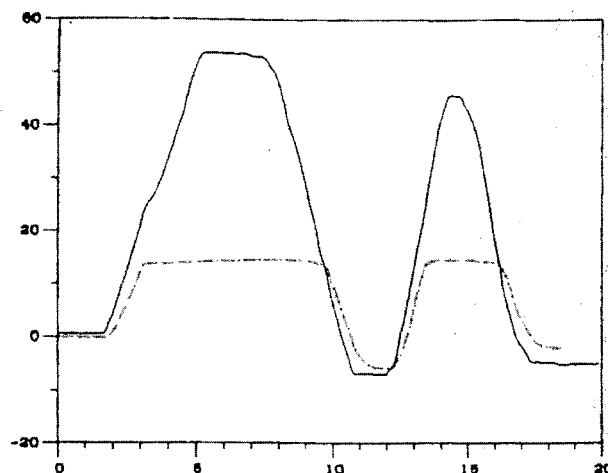


Figure 14: Essai de contact solide sans délai de transmission. En trait plein est représenté l'angle du moteur maître  $\theta_m(t)$ , et en pointillés l'angle du moteur esclave  $\theta_e(t)$ , en fonction du temps en secondes. Les ordonnées sont normalisées et les abscisses sont le temps en secondes.

**Q.91)** Préciser les deux intervalles de temps où le contact est réalisé.

**Q.92)** Donner la valeur du couple résistant subi par le manipulateur  $C_h(t)$ , quand il n'y a pas contact.

**Q.93)** Sur la Figure 14, hors contact, l'angle du moteur esclave  $\theta_e(t)$  est en retard par rapport à l'angle du moteur maître  $\theta_m(t)$ . Expliquer l'origine de ce phénomène.

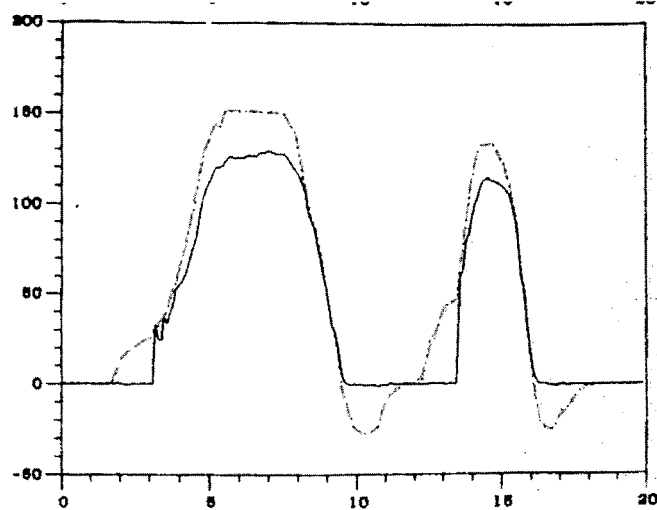


Figure 15: Essai de contact solide sans délai de transmission. En trait plein est représenté le couple manipulateur  $C_h(t)$  et en traits pointillés le couple moteur maître  $C_m(t)$  en fonction du temps en secondes. Les ordonnées sont normalisées et les abscisses sont le temps en secondes.

L'essai sans contact, en pilotage inverse correspond à laisser le moteur maître libre de son mouvement, c'est-à-dire par exemple que le manipulateur ne touche pas le moteur maître, alors qu'un mouvement de rotation est imposé au moteur esclave. Ce mouvement est alternatif. Idéalement l'angle du moteur maître  $\theta_m(t)$  doit suivre l'angle du moteur esclave  $\theta_e(t)$ , sans instabilité. Les deux positions  $\theta_m(t)$  et  $\theta_e(t)$  sont représentées sur la Figure 16.

**Q.94)** Sur la Figure 16, associer aux grandeurs  $\theta_m(t)$  et  $\theta_e(t)$ , les traits pleins et pointillés. Justifier votre réponse.

L'objectif est atteint pour un système de communication sans délai. Nous nous proposons d'introduire un délai constant dû à la transmission par un câble coaxial. Ce délai est de 40ms. Le test en pilotage inverse est alors effectué dans ces nouvelles conditions, avec retard. Les angles des moteurs  $\theta_m$  et  $\theta_e$  sont représentés sur la Figure 17.

**Q.95)** Le comportement est-il celui désiré? Justifier votre réponse.

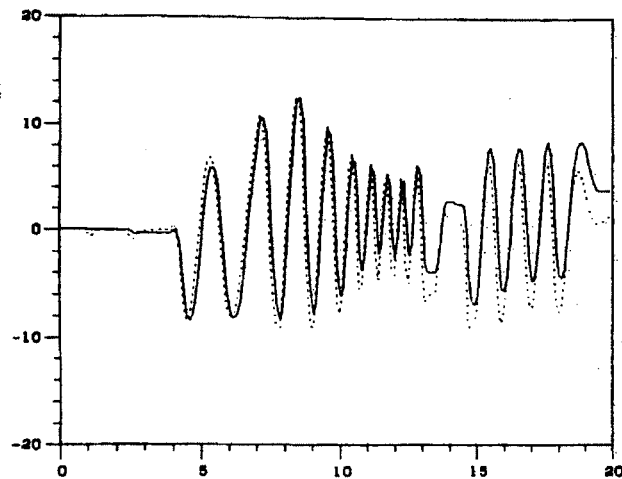


Figure 16: Essai sans contact, en pilotage inverse sans délai de transmission. L'angle du moteur maître  $\theta_m(t)$  et l'angle du moteur esclave  $\theta_e(t)$  sont représentés en fonction du temps en secondes. Les ordonnées sont normalisées.

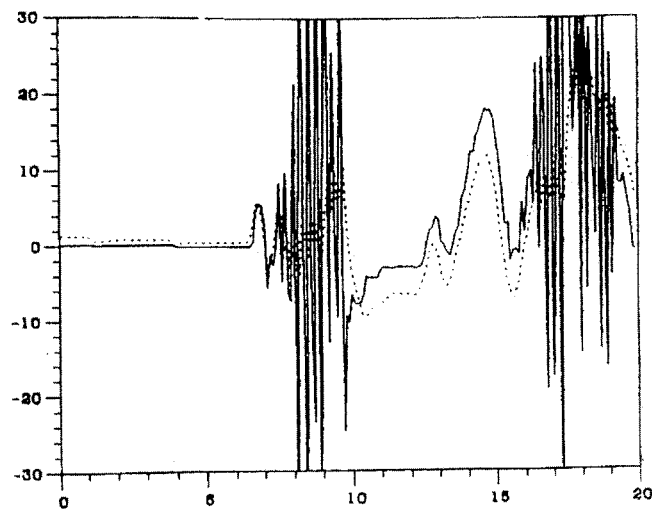


Figure 17: Essai sans contact, en pilotage inverse avec délai de transmission de 40ms. L'angle du moteur maître  $\theta_m(t)$  est représenté en trait plein et l'angle du moteur esclave  $\theta_e(t)$  est représenté en traits pointillés en fonction du temps en secondes. Les ordonnées sont normalisées.

## PARTIE D: ASPECT ENERGETIQUE, PASSIVITE ET STABILITE

La partie précédente a mis en avant le fait que la présence d'un retard de transmission peut déstabiliser un système. L'étude de la stabilité des systèmes incluant des retards est délicate.

**Q.96)** Justifier que le critère de stabilité de Routh ne peut pas s'appliquer à un système incluant un retard constant.

**Q.97)** Justifier que le critère de stabilité de Nyquist ne peut pas s'appliquer à un système incluant un retard variant dans le temps.

Cette partie est consacrée à une étude énergétique des quadripôles et à l'introduction de la notion de passivité et de certaines de ses propriétés, liées à la stabilité.

Le formalisme de la passivité représente une description mathématique du concept physique d'énergie et de puissance. Il fournit un outil simple et robuste pour l'analyse de stabilité d'un système en n'utilisant que ses propriétés entrée-sortie. La puissance instantanée disponible au port  $k$  d'un quadripôle est définie par la relation

$$\mathcal{P}_k(t) = u_k(t)i_k(t), \quad (19)$$

On définit alors la puissance disponible du multidipôle comme la somme des puissances disponibles de chaque port  $k$ .

$$\mathcal{P}(t) = \sum_{k=1}^N \mathcal{P}_k(t). \quad (20)$$

**Définition 2** Un multidipôle est dit passif si cette énergie disponible, due à la puissance disponible  $\mathcal{P}(t)$  ne peut être qu'emmagasinée ou dissipée, c'est-à-dire que le multidipôle ne peut pas produire d'énergie. Ainsi un multidipôle est passif si et seulement s'il existe une fonction énergie emmagasinée  $E_{emm}(t)$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- A chaque instant  $t$ ,  $E_{emm}(t)$  est toujours supérieure ou égale à une énergie minimale :

$$E_{emm}(t) \geq E_{min}. \quad (21)$$

- A chaque instant  $t$  et pour toutes tensions  $u_i(t)$  et tous courants  $i_i(t)$  appliqués aux ports du multidipôle et vérifiant les lois du multidipôle, la puissance dissipée  $\mathcal{P}_{dis}(t)$  définie par

$$\mathcal{P}(t) = \frac{dE_{emm}(t)}{dt} + \mathcal{P}_{dis}(t), \quad (22)$$

est toujours positive ou nulle :  $\mathcal{P}_{dis}(t) \geq 0$ .

Un multidipôle de puissance dissipée nulle ( $\mathcal{P}_{dis} = 0$ ) est appelé *sans perte* et un multidipôle de puissance dissipée positive ( $\mathcal{P}_{dis} > 0$ ) est appelé *dissipatif*. A partir de cette définition de la passivité, on a la proposition suivante :

**Proposition 1** *Un multidipôle est passif si et seulement s'il existe une constante  $\beta \geq 0$ , telle que pour tout instant  $t$  et pour toutes tensions  $u_k(t)$  et tous courants  $i_k(t)$  appliqués aux ports du multidipôle et vérifiant les lois du multidipôle, on a la relation :*

$$\int_{s=0}^{s=t} \mathcal{P}(s) ds \geq -\beta. \quad (23)$$

On appellera  $\beta$  la *constante de passivité* du multidipôle. L'inégalité (23) peut physiquement s'interpréter de la façon suivante. L'énergie  $\left(-\int_{s=0}^{s=t} \mathcal{P}(s) ds\right)$  que le multidipôle peut fournir à son extérieur ne peut pas dépasser la quantité  $\beta \geq 0$ , qui peut être vue comme la réserve d'énergie, présente initialement dans le système.

Etablissons que la définition implique la relation (23) de la proposition. En revanche, nous ne traiterons pas la réciproque, qui sera admise dans la suite.

**Q.98)** Considérons un multidipôle passif. En intégrant la relation (22), montrer qu'il existe un scalaire  $\beta \geq 0$  vérifiant (23). On pourra exprimer une valeur  $\beta$  en fonction de  $E_{\text{emm}}(0)$  et  $E_{\text{min}}$ .

**Q.99)** Pour un multidipôle qui initialement ne possède pas d'énergie stockée, montrer que la constante de passivité est nulle ( $\beta = 0$ ).

On considère maintenant l'association de deux quadripôles  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}'$  comme indiquée sur la Figure 8. Le quadripôle  $\mathcal{Q}$  a une puissance disponible  $\mathcal{P}(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t)$  et une constante de passivité  $\beta$ . Le quadripôle  $\mathcal{Q}'$  de puissance disponible  $\mathcal{P}'(t) = u'_1(t)i'_1(t) + u'_2(t)i'_2(t)$  a une constante de passivité  $\beta'$ .

**Q.100)** Montrer que le quadripôle équivalent à l'association  $\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'$ , de ports  $(u_1(t); i_1(t))$  et  $(u'_2(t); -i'_2)$  est passif.

**Q.101)** Préciser une constante de passivité de ce quadripôle.

**Q.102)** Sous quelle condition sur les quadripôles  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}'$  ce quadripôle associé est-il sans perte?

**Q.103)** Sous quelle condition sur les quadripôles  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}'$  ce quadripôle associé est-il dissipatif?

La principale propriété des multidipôles dissipatifs est indiquée dans la proposition suivante.

**Proposition 2** *Un multidipôle dissipatif est asymptotiquement stable. En revanche, tout système stable n'est pas nécessairement passif.*

Considérons un quadripôle représenté sur la Figure 6, composé de  $N = 2$  ports, ne possédant pas de source interne de courant ou de tension et étant linéaire. On se place en régime harmonique de pulsation  $\omega$ . On note pour chacun des 2 ports les tensions d'amplitude complexe  $\underline{U}_k = U_k \exp(j\phi_{u_k})$  et les courants d'intensité complexe



$\underline{I}_k = I_k \exp(j\phi_{i_k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ) pour lesquels on respectera la convention générateur. La puissance à chaque port s'écrit alors  $\mathcal{P}_k = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{U}_k^* \underline{I}_k)$ , où  $\text{Re}(\cdot)$  représente la partie réelle d'un nombre complexe.

L'idée majeure de l'approche par passivité est de séparer la puissance de chaque port  $k$  en une puissance entrante d'amplitude  $\frac{1}{2} \|a_k\|^2 = \frac{1}{2} a_k^* a_k$  et une puissance sortante  $\frac{1}{2} \|b_k\|^2 = \frac{1}{2} b_k^* b_k$ , sous la forme :

$$\mathcal{P}_k = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{U}_k^* \underline{I}_k) = \frac{1}{2} \|a_k\|^2 - \frac{1}{2} \|b_k\|^2. \quad (24)$$

Le terme  $a_k$  correspond à l'amplitude de l'onde incidente et le terme complexe  $b_k$  à l'amplitude de l'onde réfléchi au port  $k$ . On pose  $Z_{c,k}$  un nombre complexe arbitraire, homogène à une impédance et appelé *impédance caractéristique* du port  $k$ , dont on impose la partie réelle strictement positive :  $R_{c,k} = \text{Re}(Z_{c,k}) > 0$ .

**Q.104)** Donner les unités des amplitudes  $a_k$  et  $b_k$ .

**Q.105)** Montrer que les amplitudes

$$a_1 = \frac{\underline{U}_1 + Z_{c,1} \underline{I}_1}{2\sqrt{R_{c,1}}} \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{\underline{U}_1 - Z_{c,1}^* \underline{I}_1}{2\sqrt{R_{c,1}}} \quad (25)$$

$$a_2 = \frac{\underline{U}_2 + Z_{c,2} \underline{I}_2}{2\sqrt{R_{c,2}}} \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{\underline{U}_2 - Z_{c,2}^* \underline{I}_2}{2\sqrt{R_{c,2}}} \quad (26)$$

sont solutions de la décomposition (24).

**Q.106)** Exprimer  $\underline{U}_k$  et  $\underline{I}_k$  en fonction de  $a_k$  et  $b_k$ .

**Q.107)** Quelle doit-être la valeur de l'impédance d'entrée du port  $k$  pour que l'onde réfléchi  $b_k$  soit nulle?

On pose, pour le quadripôle, le vecteur des ondes incidentes  $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  et le vecteur des ondes réfléchies  $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ . La *matrice de répartition*  $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$  se définit comme le lien entre ces deux vecteurs par :  $\underline{b} = S \underline{a}$ .

Par souci de clarté, on pose les matrices suivantes :

$$W = \begin{bmatrix} Z_{c,1} & 0 \\ 0 & Z_{c,2} \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 2\sqrt{R_{c,1}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{R_{c,2}} \end{bmatrix};$$

**Q.108)** Quelle impédance faut-il imposer au port 2, afin de mesurer simplement  $S_{11}$ ?

**Q.109)** Quelle impédance faut-il imposer au port 1, afin de mesurer simplement  $S_{12}$ ?

**Q.110)** Exprimer le vecteur  $\underline{a}$  en fonction des matrices  $F$  et  $W$ , ainsi que de la matrice impédance  $\underline{Z}$  (telle que  $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$ ) et du vecteur intensité  $\underline{I}$ .

**Q.111)** Exprimer le vecteur  $\underline{b}$  en fonction des matrices  $F$  et  $W$ , ainsi que de la matrice impédance  $\underline{Z}$  et du vecteur intensité  $\underline{I}$ .

**Q.112)** Montrer que la matrice de répartition  $S$  s'exprime de la façon suivante :

$$S = F^{-1}(\underline{Z} - W^*)(W + \underline{Z})^{-1}F. \quad (27)$$

On peut aussi exprimer la matrice de répartition  $S$  en fonction de la matrice hybride, si c'est elle qui caractérise le quadripôle. On donne sans démonstration :

$$S = F^{-1} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_{c2}^* \end{bmatrix} \underline{H} + \begin{bmatrix} -Z_{c1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Z_{c2} \end{bmatrix} \underline{H} + \begin{bmatrix} Z_{c1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} F. \quad (28)$$

**Q.113)** Exprimer  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$  en fonction du vecteur  $\underline{a}$  et de la matrice de répartition  $S$ .

**Q.114)** Pour un multidipôle linéaire et passif, on admettra que l'on peut choisir une constante de passivité nulle ( $\beta = 0$ ). Dans ces conditions montrer qu'un quadripôle passif sans perte vérifie  $(S^T)^*S = I_2$ , avec  $I_2$  la matrice identité de dimension 2 et  $S^T$  la transposée de la matrice  $S$ .

**Q.115)** Montrer qu'un quadripôle dissipatif vérifie  $(S^T)^*S < I_2$ , c'est-à-dire que la plus grande valeur singulière de la matrice  $S$  est inférieure strictement à 1, quelque soit la pulsation  $\omega$ .

En considérant le cas de la ligne de transmission, on prendra les impédances caractéristiques des ports purement résistives et identiques, c'est-à-dire  $Z_{c1} = Z_{c2} = R_{c1} = R_{c2} = \alpha$ . On rappelle que la matrice hybride de la ligne de transmission est donnée par la relation (11).

**Q.116)** Montrer que la matrice de répartition  $S$  pour une telle communication retardée vaut :

$$S = \frac{1}{\cosh(p\tau)} \begin{bmatrix} -\sinh(p\tau) & 1 \\ 1 & \sinh(p\tau) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

avec les fonctions  $\cosh(p\tau) = \frac{e^{\tau p} + e^{-\tau p}}{2}$  et  $\sinh(p\tau) = \frac{e^{\tau p} - e^{-\tau p}}{2}$ . On notera que cette matrice de répartition est indépendante de l'impédance caractéristique  $\alpha$ . En prenant  $p = j\omega$ , les valeurs propres de  $(S^T)^*S$  sont toujours supérieures ou égales à 1, quelque soit  $\omega$  et  $\tau > 0$ . Nous avons ainsi mis en avant que la méthode standard de transmission des tensions et intensités par un câble coaxial mène à la non-passivité du système, quelque soit le retard non nul. L'idée est de transmettre différemment l'information et de rendre ce multidipôle de communication passif, quelque soit le délai temporel. Pour cela une loi de commande va être mise en place pour rendre le bloc de communication passif sans perte. On modifie les expressions de  $\tilde{C}_c(t)$  et  $\tilde{\Omega}_m(t)$  de la façon suivante, en rajoutant des

termes correctifs :

$$\tilde{C}_c(t) = C_c(t - \tau) + \alpha \left( \Omega_m(t) - \tilde{\Omega}_m(t - \tau) \right); \quad (30)$$

$$\tilde{\Omega}_m(t) = \Omega_m(t - \tau) + \frac{1}{\alpha} \left( \tilde{C}_c(t - \tau) - C_c(t) \right). \quad (31)$$

On utilise le formalisme des variables d'onde. Au lieu de transmettre la vitesse du moteur maître  $\Omega_m$  pour le maître et le couple coordonné  $C_c$  pour l'esclave, ce seront les variables d'onde normalisées :

$$a'_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left( \tilde{C}_c(t) + \alpha \Omega_m(t) \right), \quad (32)$$

$$a'_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left( C_c(t) - \alpha \tilde{\Omega}_m(t) \right), \quad (33)$$

$$b'_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left( \tilde{C}_c(t) - \alpha \Omega_m(t) \right), \quad (34)$$

$$b'_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left( C_c(t) + \alpha \tilde{\Omega}_m(t) \right). \quad (35)$$

**Q.117)** Représenter graphiquement le quadripôle permettant de passer du port  $(\Omega_m; \tilde{C}_c)$  au port  $(a'_1; b'_1)$  en fonction du paramètre  $\alpha$ .

**Q.118)** Représenter graphiquement le quadripôle permettant de passer du port  $(\tilde{\Omega}_m; C_c)$  au port  $(a'_2; b'_2)$  en fonction du paramètre  $\alpha$ .

**Q.119)** En utilisant la définition (30), donner la relation entre les fonctions  $b'_1(\cdot)$  et  $a'_2(\cdot)$  et le retard  $\tau$ .

**Q.120)** En utilisant la définition (31), donner la relation entre les fonctions  $b'_2(\cdot)$  et  $a'_1(\cdot)$  et le retard  $\tau$ .

**Q.121)** En déduire la matrice de répartition  $S$  associée.

**Q.122)** Montrer que le quadripôle associé à cette matrice de répartition  $S$  est passif sans perte, on prendra la restriction  $p = j\omega$ .

En appliquant cette loi de commande, les tests de contact et en pilotage inverse sont à nouveau effectués pour un délai de transmission de 40ms. Les résultats du test avec contact sont représentés sur les Figures 18 et 19.

**Q.123)** Vérifier que les deux points du cahier des charges sont vérifiés. Justifier votre réponse.

Le test en pilotage inverse avec un délai de transmission de 40ms est à nouveau effectué. Les résultats sont représentés sur la Figure 20.

**Q.124)** Jusqu'à quel instant, le suivi de trajectoire est-il convenable?

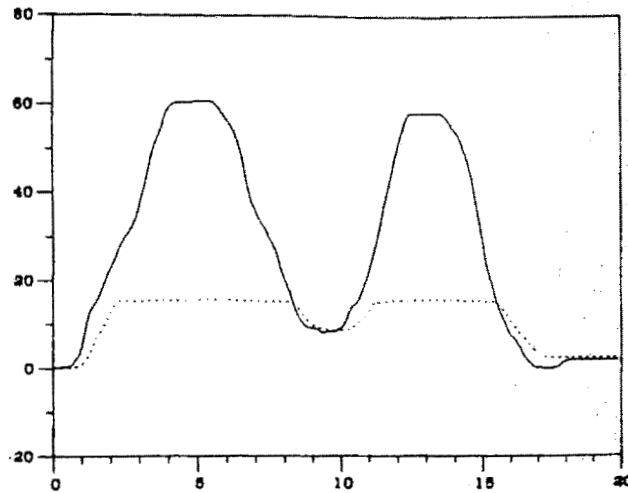


Figure 18: Essai avec contact rigide, avec délai de transmission de 40ms. L'angle du moteur maître  $\theta_m(t)$  est représenté en trait plein et l'angle du moteur esclave  $\theta_e(t)$  est représenté en traits pointillés en fonction du temps en secondes. Les ordonnées sont normalisées.

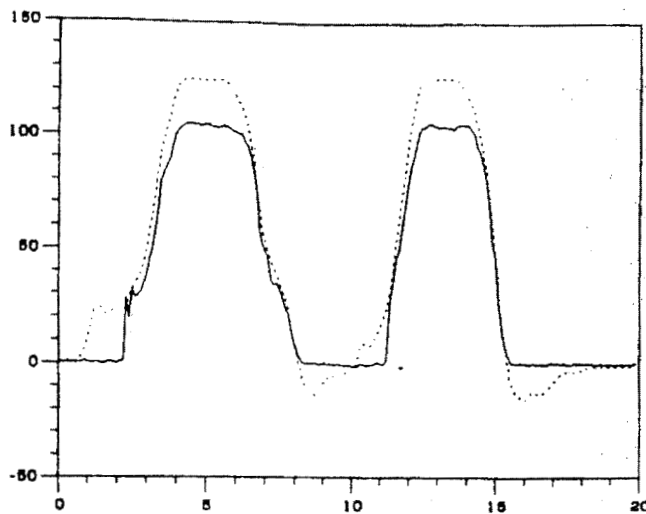


Figure 19: Essai avec contact rigide, avec délai de transmission de 40ms. En trait plein est représenté le couple manipulateur  $C_h(t)$  et en traits pointillés le couple moteur maître  $C_m(t)$  en fonction du temps en secondes. Les ordonnées sont normalisées.

L'étude s'est jusqu'à présent faite en considérant le retard aller constant et identique au retard retour. Désormais on suppose que le retard constant aller  $\tau_1$  peut être distinct du retard constant retour  $\tau_2$ .

**Q.125)** Exprimer la matrice de répartition  $S$  en fonction de  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

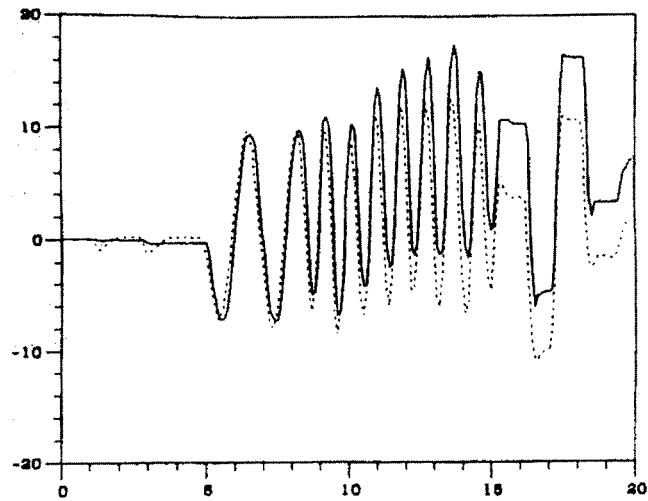


Figure 20: Essai sans contact, en pilotage inverse avec délai de transmission de 40ms. L'angle du moteur maître  $\theta_m(t)$  est représenté en trait plein et l'angle du moteur esclave  $\theta_e(t)$  est représenté en traits pointillés en fonction du temps en secondes. Les ordonnées sont normalisées.

**Q.126)** Le quadripôle associé à cette matrice de répartition  $S$  est-il passif?

**Q.127)** En conservant les définitions des variables d'onde normalisées (32) à (35), modifier l'expression (30) de  $\tilde{C}_c(t)$  à l'aide de  $\tau_1$  et/ou  $\tau_2$ .

**Q.128)** En conservant les définitions des variables d'onde normalisées (32) à (35), modifier l'expression (31) de  $\tilde{\Omega}_m(t)$  à l'aide de  $\tau_1$  et/ou  $\tau_2$ .