

SESSION 2011

---

AGRÉGATION  
CONCOURS EXTERNE

Section : **SCIENCES PHYSIQUES**  
Option B : **CHIMIE**

**COMPOSITION DE PHYSIQUE**

Durée : 5 heures

---

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

# Atmosphère et mesures hygrométriques

---

## Introduction

Assurer la surveillance et la prévision du comportement de l'atmosphère concourt directement à la sécurité des personnes et des biens, à l'activité économique et à l'information du public. Des moyens scientifiques et technologiques de plus en plus perfectionnés sont mobilisés pour étudier notre atmosphère.

L'atmosphère est un système dont la dynamique est d'une complexité redoutable : ses constituants sont non seulement en interaction les uns avec les autres mais ils subissent aussi, entre autres, les effets des rayonnements solaires et cosmiques par le « haut » ainsi que l'influence de la Terre et des océans par le « bas ». Tout cela fait de l'atmosphère un système chaotique dont il est extrêmement difficile de prévoir l'évolution avec une grande précision.

Pour comprendre cette dynamique, il est nécessaire de commencer par étudier l'état d'équilibre (stationnaire) de l'atmosphère. Pour cela, on supposera qu'à l'exception de l'eau  $H_2O$ , de l'ozone  $O_3$  et dans une autre mesure du dioxyde de carbone  $CO_2$ , les constituants de l'atmosphère sont en quantité stable et homogène. En outre, on ne tiendra compte que des deux constituants les plus importants, à savoir le diazote  $N_2$  et le dioxygène  $O_2$ , qui forment un gaz supposé parfait.

Par ailleurs, la connaissance de la quantité d'eau présente dans l'atmosphère est capitale pour la pertinence des prévisions météorologiques. En effet, l'eau est la seule espèce présente dans l'atmosphère susceptible de changer d'état aux conditions de pression et de température rencontrées. Ces changements d'état s'accompagnent d'échanges d'énergie importants au sein de l'atmosphère, ce qui se traduit par des déplacements rapides et à grande échelle des masses d'air.



Dans ce sujet, nous allons aborder certains de ces aspects.

On commence par modéliser l'air avec le modèle du gaz parfait et la vapeur d'eau avec celui de Van der Waals afin de comprendre quelques caractéristiques du mélange eau-air dans l'atmosphère. L'effet du champ de pesanteur sur l'atmosphère permet ensuite d'aborder la question de sa stabilité. Le degré hygrométrique de l'air apparaissant central dans les prévisions météorologiques, deux capteurs sont étudiés. Le premier est basé sur la mesure de la température du point de rosée dans une tuyère. Le second est un dispositif électronique à sonde capacitive dont les propriétés diélectriques varient en fonction de l'humidité de l'air.

Les cinq parties sont indépendantes les unes des autres.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Quels modèles pour l'air et l'eau dans l'atmosphère ?</b>	<b>5</b>
1.1	Le modèle du gaz parfait pour l'air . . . . .	5
1.2	Le modèle de Van der Waals pour la vapeur d'eau . . . . .	8
<b>2</b>	<b>L'eau dans l'atmosphère</b>	<b>11</b>
2.1	Le taux hygrométrique . . . . .	11
2.2	Formation des nuages : la nucléation . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Effet du champ de gravitation sur l'atmosphère</b>	<b>15</b>
3.1	Le profil de l'atmosphère . . . . .	15
3.2	Stabilité de l'atmosphère . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Mesure thermodynamique du degré hygrométrique de l'air</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Mesure capacitive du degré hygrométrique de l'air</b>	<b>21</b>
5.1	Etude du capteur . . . . .	21
5.2	Mesure de $C_{RH}$ : premier montage . . . . .	23
5.3	Mesure de $C_{RH}$ : second montage . . . . .	24

## Formulaire et constantes physiques

Pour les applications numériques et quelques calculs, le candidat pourra utiliser le formulaire suivant.

### Formules utiles

1. Intégrales gaussiennes :

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}, \quad \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

2. Formule de Green-Ostrogradski et celle de Green du gradient :

$$\iiint \operatorname{div} \vec{J} d\tau = \oint \vec{J} \cdot \vec{n} dS \quad \text{et} \quad \iiint \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot d\vec{\tau} = \oint f \vec{n} dS$$

où  $\vec{n}$  est la normale sortante à la surface dans chacun des cas.

3. Analyse vectorielle en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

4. Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r J_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

### Constantes physiques et valeurs numériques

Constante de Newton :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Masse de la Terre :  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Rayon de la Terre :  $R_T = 6400 \text{ km}$

Nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante de Boltzman :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Masse molaire du  $N_2$  :  $M_{N_2} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masse molaire du  $O_2$  :  $M_{O_2} = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masse molaire de l'eau :  $M_{eau} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masse volumique de l'air :  $\rho(\text{air}) = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  à 273 K et 1 bar

Masse volumique de l'eau liquide :  $\rho_\ell = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Chaleur latente (ou enthalpie) de vaporisation de l'eau :  $L_{vap} = 2474 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

# 1 Quels modèles pour l'air et l'eau dans l'atmosphère ?

Les constituants de l'atmosphère sont nombreux et apparaissent sous diverses formes : poussières, gaz, liquides, solides etc... Cependant, sauf mention contraire, on supposera, comme cela a déjà été souligné dans l'introduction, qu'il est constitué à 80% de diazote  $N_2$ , à 20% de dioxygène  $O_2$  et contient de l'eau en quantité variable mais négligeable par rapport aux deux principaux constituants. Le mélange ( $N_2, O_2$ ) constitue l'air et est supposé former un gaz parfait. A contrario, l'eau qui est présente sous ses trois phases ne peut évidemment pas être assimilée à un gaz parfait.

Cette partie a pour but de comprendre certains aspects thermodynamiques de l'air et de l'eau pris séparément. On commencera par étudier l'air considéré comme un gaz parfait. On étudiera ensuite un modèle de gaz réel afin de comprendre certaines propriétés de l'eau présente sous les deux phases liquide et vapeur.

## 1.1 Le modèle du gaz parfait pour l'air

1. Connaissez vous l'élément le plus abondant dans l'atmosphère après  $N_2$  et  $O_2$  ?
2. On suppose que l'air forme un gaz parfait « classique ». On assimilera alors les molécules de l'air à un mélange de molécules de  $N_2$  indiscernables et de molécules de  $O_2$  indiscernables également. Quelles conditions doivent satisfaire ces molécules pour former un gaz parfait ?
3. En déduire qu'on peut considérer l'air comme un gaz parfait composé d'un seul type de molécules dont on donnera la masse  $m$  et la masse molaire  $M$  en fonction des données du formulaire. Faire l'application numérique. Par la suite, on fixera la valeur de  $M$  à  $29 \text{ g.mol}^{-1}$ .
4. On considère alors un gaz de molécules identiques et indiscernables de masse  $m$ . Ces molécules sont caractérisées par leur vitesse  $\vec{v}$ . Par ailleurs, ce gaz est enfermé dans une enceinte de volume  $V$  à une température  $T$  fixée. Dans ces conditions, les molécules sont sujettes à l'agitation thermique et leurs vitesses sont distribuées selon la statistique de Maxwell-Boltzmann,

$$\mathcal{P}(\vec{v}) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{-mv^2}{2k_B T} \right), \quad (1)$$

qui donne la densité de probabilité  $\mathcal{P}(\vec{v})$  de trouver une molécule du gaz avec une vitesse  $\vec{v}$ . On remarque que cette loi de probabilité ne dépend que de la norme de la vitesse via  $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ . Interpréter cette observation. Vérifier que la loi de probabilité est correctement normalisée, à savoir qu'elle satisfait la condition :

$$\int \mathcal{P}(\vec{v}) d^3\vec{v} = 1 \quad (2)$$

où l'intégrale porte sur les trois directions du vecteur vitesse et  $d^3\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$ . On pourra calculer cette intégrale soit en coordonnées cartésiennes soit en utilisant le système de coordonnées sphériques pour lequel on rappelle que  $d^3\vec{v} = v^2 dv \sin \theta d\theta d\phi$  où  $(v, \theta, \phi)$  sont les coordonnées de  $\vec{v}$  en coordonnées sphériques.

5. La statistique de Maxwell-Boltzmann permet d'accéder à la valeur moyenne  $\bar{f}$  de n'importe quelle grandeur  $f(\vec{v})$  qui dépend de la vitesse par la formule :

$$\bar{f} = \int \mathcal{P}(\vec{v}) f(\vec{v}) d^3\vec{v} . \quad (3)$$

En déduire que la valeur moyenne du vecteur vitesse  $\vec{v}$  est nulle. Interpréter ce résultat.

6. En utilisant le formulaire, calculer la vitesse quadratique moyenne  $\overline{v^2}$  définie comme la valeur moyenne du carré de la vitesse  $(\vec{v})^2$  et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\overline{v^2} = 3 \frac{k_B T}{m} . \quad (4)$$

Calculer la valeur numérique de  $\sqrt{\overline{v^2}}$  pour une température  $T = 270$  K. Commenter le résultat.

7. Définir l'énergie interne  $U$  d'un gaz dans cette approche statistique. En déduire l'expression de  $U$  pour un gaz monoatomique constitué de  $N$  molécules et montrer qu'elle se met sous la forme

$$U = \frac{D}{2} N k_B T \quad (5)$$

pour une certaine valeur de  $D$ , dont on précisera la valeur dans ce cas.

En pratique, on trouve  $D = 5$  pour un gaz de  $N_2$  ou de  $O_2$  et  $D = 6$  pour  $H_2O$  et  $CO_2$ . Expliquer pourquoi.

8. En fait, si on s'intéresse aux problèmes atmosphériques, on ne peut pas négliger l'influence du champ de pesanteur sur le gaz et la statistique de Maxwell-Boltzmann précédente n'est plus valable. Pour comprendre cette influence, commencer tout d'abord par rappeler l'expression de la force subie par une molécule de masse  $m$  de la part de la Terre qui se trouve à une distance  $r$  du centre de la Terre. On notera  $R_T$  et  $M_T$  le rayon et la masse de la Terre. Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle  $E_p(r)$ . Donner l'expression de  $E_p(r)$  en supposant qu'elle s'annule lorsque la molécule se trouve sur la surface de la Terre.
9. On suppose maintenant que la molécule se trouve dans la troposphère dont l'épaisseur est de l'ordre de 10 km. Montrer alors que l'énergie potentielle varie linéairement avec l'altitude  $z = r - R_T$  dans une certaine approximation. On écrira cette énergie potentielle sous la forme  $E_p(z) = mg_0 z$  et on calculera la valeur numérique de  $g_0$ . En déduire l'énergie mécanique totale  $E(\vec{v}, z)$  de la molécule vue comme une fonction de  $\vec{v}$  et de  $z$ .
10. Enfin, on obtient la statistique de Maxwell-Boltzmann en présence d'un champ de pesanteur qui donne la densité de probabilité

$$\mathcal{Q}(\vec{v}, z) = \alpha \exp\left(-\frac{E(\vec{v}, z)}{k_B T}\right) \quad (6)$$

de trouver la molécule avec une vitesse  $\vec{v}$  à l'altitude  $z$ . L'altitude étant toujours positive, calculer le coefficient  $\alpha$  de telle sorte que la loi de probabilité précédente soit correctement normalisée avec  $0 < z < \infty$ . On note  $N(z)dz$  le nombre total de molécules situées entre  $z$  et  $z + dz$ . Montrer que  $N(z)$  est de la forme :

$$N(z) = N(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad (7)$$

où  $H$  est une grandeur dont on donnera l'expression, l'interprétation physique et la valeur numérique à  $T = 270\text{K}$ .

11. On néglige à nouveau l'effet du champ de pesanteur dans les questions qui suivent. Maintenant, on s'intéresse à la pression cinétique  $P$  qu'exerce le gaz sur les parois de l'enceinte de température égale à celle du gaz. Quelle est l'origine physique de la pression cinétique d'un gaz ?
12. On montre que la force élémentaire exercée par le gaz sur une portion élémentaire de la paroi de surface  $dS$  et de normale  $\vec{n}$  se met sous la forme  $d\vec{F} = PdS\vec{n}$  où la pression  $P$  est donnée par la relation :

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \overline{v^2}. \quad (8)$$

$N$  est le nombre total de molécules dans l'enceinte. Interpréter le facteur  $1/3$  présent dans cette formule. Dédire l'équation d'état du gaz parfait qui lie la pression  $P$ , la température  $T$ , le volume  $V$  et  $N$ .

13. On revient maintenant à l'expression de l'énergie interne  $U$  donnée à la relation (5) pour  $D = 3$ . En utilisant l'identité thermodynamique liant  $U$  et l'entropie  $S$ , déduire l'expression suivante de l'entropie comme fonction de la pression  $P$  et de la température  $T$  :

$$S(P, T) = S(P_0, T_0) + \frac{5}{2} nR \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{P}{P_0} \quad (9)$$

où  $n$  est le nombre de moles et  $(T_0, P_0)$  sont des grandeurs de référence. Par la suite, on posera  $S(P_0, T_0) = 0$ .

14. On dit que l'entropie est un potentiel thermodynamique pour un système isolé. Qu'est-ce-que cela signifie ? Quelle est le « bon » potentiel thermodynamique pour un système en contact avec un thermostat ? Et celui pour un système en contact avec un thermostat et soumis à une pression extérieure constante et uniforme ?
15. On s'intéresse maintenant à l'enthalpie libre de Gibbs  $G = U + PV - TS$ . Donner son expression comme fonction des variables  $T$  et  $P$ . Donner également l'expression de l'enthalpie libre de Gibbs massique  $g(T, P)$ .
16. Lorsque le gaz n'est pas homogène (mais dans un état voisin d'un état d'équilibre), sa pression n'est généralement pas homogène non plus et sa valeur  $P(\vec{r})$  dépend du point  $M$  repéré par  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ . On utilise alors les modèles de mécanique des fluides pour étudier ces systèmes non-homogènes : dans ces modèles, on regroupe les molécules en particules fluides qui exercent les unes sur les autres une pression similaire à la pression cinétique.
  - a. Quel est l'ordre de grandeur de la taille d'une particule fluide ? Quel est l'ordre de grandeur du nombre de molécules que contient une particule fluide ?
  - b. On munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes dont les vecteurs de base sont  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ . On suppose que les particules fluides sont des parallélépipèdes rectangles de longueurs  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  « petites » dans les directions  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  respectivement. Montrer alors que la force de pression  $\delta\vec{F}$  subie par une particule fluide, centrée autour du point de coordonnées  $(x, y, z)$ , de la part de ses voisines s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta\vec{F} = - \left( \frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z \right) dx dy dz. \quad (10)$$

On aura préalablement fait un schéma explicatif.

- c. Retrouver ce résultat directement en utilisant le théorème de Green du gradient rappelé dans le formulaire.
- d. On considère maintenant que le fluide, de masse volumique  $\rho$  a priori quelconque, est en équilibre dans le champ de pesanteur supposé uniforme dont l'accélération est notée  $\vec{g}_0$ . En appliquant le principe fondamental de la dynamique à une particule fluide, montrer alors que la pression  $P$  et la masse volumique  $\rho$  satisfont l'équation de l'hydrostatique :

$$\rho \vec{g}_0 = \overrightarrow{\text{grad}} P. \quad (11)$$

- e. Quelle est la nature de la force d'Archimède subie par un objet plongé dans un fluide de masse volumique  $\rho$  supposée uniforme ? Dédire alors l'énoncé du théorème d'Archimède.
- f. On suppose que la densité de la glace est de 0,9. Dédire du théorème précédent le rapport de la masse immergée d'un iceberg par rapport à sa masse totale si celui-ci est en équilibre dans l'eau liquide. Est-ce que la fonte des glaces des icebergs due au réchauffement climatique ferait monter le niveau de l'eau des océans ? Proposer une expérience simple pour illustrer ce fait.

## 1.2 Le modèle de Van der Waals pour la vapeur d'eau

Le modèle du gaz parfait est intéressant pour comprendre le comportement des gaz à faible densité ou à faible pression. Lorsque la densité devient plus importante, on ne peut plus négliger en particulier les interactions intermoléculaires dans le gaz et le modèle du gaz parfait est mis en défaut. On doit alors considérer des modèles de gaz dits réels.

1. Un des modèles les plus simples de gaz réel est celui proposé par Van der Waals dont l'équation d'état pour une mole s'écrit :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (12)$$

Il dépend des deux constantes positives  $a$  et  $b$ . Interpréter physiquement ces deux constantes et justifier leur signe. En utilisant des arguments d'homogénéité, écrire l'équation de Van der Waals pour un nombre de moles  $n$  quelconque.

2. Afin de mieux comprendre les effets de  $a$  et  $b$ , on se propose de tracer les isothermes d'**une mole** de gaz de Van der Waals. Pour cela, on cherche les extrema de la fonction  $P(V)$  à température  $T$  constante. Montrer que les valeurs  $V_0$  pour lesquelles  $P(V)$  est extrémale doivent satisfaire l'équation :

$$\frac{(V_0 - b)^2}{V_0^3} = \frac{RT}{2a}. \quad (13)$$

3. Tracer schématiquement le graphe de la fonction  $f(x) = (x - b)^2/x^3$  pour  $x \in [b, +\infty[$ . En déduire que l'équation (13) admet au moins une solution seulement si  $T \leq T_c$  où la température critique  $T_c$  a pour expression :

$$T_c = \frac{8a}{27bR}. \quad (14)$$

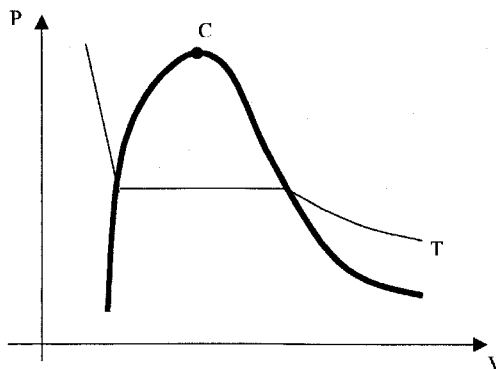


4. Montrer en outre que si  $T < T_c$ , l'équation (13) admet deux solutions distinctes alors qu'elle admet une unique solution pour  $T = T_c$ .
5. Lorsque  $T = T_c$ , on montre en fait que la courbe  $P(V)$  n'admet pas d'extremum mais elle présente un point d'inflexion  $(P_c, V_c)$  défini par les équations :

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0 \quad (15)$$

où les dérivées sont faites à la température constante  $T_c$ . Calculer  $P_c$  et  $V_c$ . Ecrire l'équation de Van der Waals toujours pour une mole en fonction des variables réduites sans dimension  $\pi = P/P_c$ ,  $\tau = T/T_c$  et  $\nu = V/V_c$ . Quel est l'intérêt d'une telle équation ?

6. Tracer schématiquement sur un même diagramme trois isothermes  $P(V)$  associées aux températures  $T_1 > T_c$ ,  $T_2 = T_c$  et  $T_3 < T_c$ .
7. Les coefficients thermodynamiques  $\alpha$  et  $\chi_T$  sont définis à partir de la différentielle du volume  $V(T, P)$  par la relation  $dV = V(\alpha dT - \chi_T dP)$ . Le gaz est thermodynamiquement stable en contexte isotherme monobare seulement lorsque le coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$  est positif. Interpréter cette propriété. En déduire que, dans le cas de  $T_3$ , le gaz peut être instable.
8. On interprète cette instabilité comme la signature d'un changement d'état. En particulier, le gaz de Van der Waals modélise très bien la transition de phase liquide-vapeur de l'eau. Ainsi, pour les températures  $T < T_c$ , l'eau peut exister sous deux phases et il existe une pression  $P_s(T)$ , dite de vapeur saturante, pour laquelle les deux phases coexistent. Quelle est la phase stable de l'eau lorsque  $P > P_s(T)$ ? Justifier la réponse.
9. Enoncer la règle du « levier de Maxwell » qui permet de déterminer la pression de vapeur saturante  $P_s(T)$  à partir des courbes isothermes du gaz de Van der Waals. Cette règle permet de déterminer  $P_s(T)$  et de remplacer une partie de l'isotherme (en particulier dans les zones instables) par des paliers de coexistence de phases à la pression  $P_s(T)$  et on aboutit au diagramme de changement d'état représenté sur le schéma suivant.



10. On observe parfois de la vapeur d'eau à une température  $T < T_c$  et à une pression  $P$  supérieure à  $P_s(T)$  dans des conditions où on devrait observer théoriquement un équilibre liquide-vapeur. Quel est ce phénomène? En donner une explication à partir du tracé des isothermes du gaz de Van der Waals.
11. Quelle est la phase de l'eau lorsque  $T > T_c$ ? Que devient le coefficient de compressibilité isotherme au voisinage de la température  $T_c$ ? Comment se manifeste physiquement cette propriété?

12. On admet que la pression de vapeur saturante satisfait l'équation de Clausius-Clapeyron :

$$\frac{dP_s}{dT} = \frac{L_{vap}}{T(v_g - v_\ell)} \quad (16)$$

où  $L_{vap}$  est la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau (supposée constante),  $v_g$  est le volume massique de la vapeur d'eau et  $v_\ell$  est le volume massique de l'eau liquide. Le volume massique est l'inverse de la masse volumique. En négligeant  $v_\ell$  devant  $v_g$  (ce que l'on justifiera en citant des ordres de grandeur de ces quantités) et en assimilant la vapeur d'eau à un gaz parfait, montrer que la pression de vapeur saturante est donnée par l'équation :

$$\ln \left( \frac{P_s(T)}{P_s(T_0)} \right) = C \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \quad (17)$$

où  $C$  est une constante que l'on déterminera et  $T_0$  est une température de référence.

13. On considère que l'eau existe dans l'atmosphère sous les deux formes  $H_2O^{16}$  et  $H_2O^{18}$ , respectivement formées avec les isotopes 16 et 18 de l'oxygène. Ces deux isotopes sont stables du point de vue de la radioactivité. En raison de la différence de masse de ces deux isotopes, les chaleurs latentes et les pressions de vapeur saturante de l'eau  $H_2O^{16}$  et de l'eau  $H_2O^{18}$  sont différentes. Connaissez-vous une application de cet effet pour la climatologie ?

## 2 L'eau dans l'atmosphère

Maintenant, on s'intéresse au mélange eau-air dans l'atmosphère. Même en quantité infime par rapport à l'air, l'eau joue un rôle fondamental dans la dynamique de l'atmosphère, en particulier pour la météorologie. Lorsque de la vapeur d'eau est présente dans l'atmosphère, on dit que l'air est humide ; dans le cas contraire, on dit que l'air est sec.

### 2.1 Le taux hygrométrique

On suppose que l'air sec est un gaz parfait, de quantité de matière constante, de pression partielle  $P_{sec}$ , de température  $T$ , de masse molaire  $M$  et de masse volumique  $\rho$ . La vapeur d'eau est aussi supposée être un gaz parfait dont la température est celle de l'air et dont la pression partielle est  $p_{eau}$  et la masse volumique est  $\rho_v$ . Sa masse molaire est notée  $M_{eau}$ .

1. La pression totale  $P$  de l'air humide est légèrement supérieure à la pression partielle de l'air sec. Quelle est son expression en fonction de  $p_{eau}$  et de  $P_{sec}$  ? En déduire que l'air humide satisfait à l'équation d'état :

$$P = \frac{R}{M} \rho_{totale} T_v \quad (18)$$

avec  $\rho_{totale} = \rho + \rho_v$  et :

$$T_v = \frac{1 + \frac{M}{M_{eau}} w}{1 + w} T \quad (19)$$

où  $w = \rho_v / \rho$  est le rapport entre la masse volumique de la vapeur d'eau par celle de l'air dans l'atmosphère.

2. En faisant une approximation qu'on justifiera, montrer que l'expression de  $T_v$  se simplifie et devient :

$$T_v \simeq (1 + 0.60w) T \quad (20)$$

Dans la suite, on suppose que les conditions de validité de cette approximation sont vérifiées.

Ainsi, lorsque l'air est humide, les météorologistes continuent à considérer l'air comme un gaz parfait dans leurs calculs de prédiction mais ils remplacent sa température réelle  $T$  par la température virtuelle  $T_v$ . Les questions suivantes ont pour but de mieux comprendre le rapport  $w$  qui joue un rôle essentiel en météorologie.

3. Montrer tout d'abord que

$$w = \frac{M_{eau} p_{eau}}{M P_{sec}} \quad (21)$$

Justifier qu'il est légitime de remplacer la pression de l'air sec  $P_{sec}$  par la pression de l'air humide  $P$  dans l'expression précédente.

4. Lorsque l'air est saturé d'humidité, c'est à dire lorsque l'eau est à la pression de vapeur saturante  $p_{eau} = P_s(T)$ , la proportion massique d'eau dans l'air est notée  $w_s$ . On définit alors le taux hygrométrique de l'air par la grandeur  $r = w/w_s$ , à valeur donnée de  $P_{sec}$ . Donner l'expression de  $r$  en fonction de la pression partielle de la vapeur d'eau et de la pression de vapeur saturante  $P_s(T)$ .

5. Il existe plusieurs méthodes pour mesurer  $w$ . La première consiste à mesurer la température  $T_R$ , dite de point de rosée, définie comme la température pour laquelle la vapeur d'eau correspondante à  $w$  serait saturante. En utilisant la formule (17), écrire la relation entre  $w$  et  $T_R$  en fonction des données du problème.
6. Est-ce que  $T_R$  est plus petite ou plus grande que la température de l'air  $T$ ? Justifier votre réponse. Comment peut-on mesurer  $T_R$  expérimentalement?
7. En fait, il n'est souvent pas très simple de mesurer  $T_R$ . Pour accéder à la valeur de  $w$ , on préfère utiliser un autre indicateur appelé la température humide de l'air  $T_H$ . Il s'agit de la température enregistrée par un thermomètre dont le bulbe est recouvert d'une mèche imprégnée d'eau. Si l'air ambiant n'est pas saturé en humidité, la température du bulbe va diminuer jusqu'à atteindre une valeur d'équilibre qui est précisément  $T_H$ . Expliquer brièvement pourquoi la température du bulbe baisse.
8. Cette question a pour but d'établir une relation entre  $T_H$  et  $w$ . Pour cela, on suppose que le bulbe du thermomètre est une sphère de rayon  $R_0$  saturée en molécules d'eau liquide. On munit l'espace d'un système de coordonnées sphériques dont l'origine  $O$  est le centre du bulbe et  $r$  est la variable radiale. Pour cette partie seulement, on notera  $T_\infty$  la température de l'air loin du bulbe. Le bulbe est le siège de deux phénomènes : la diffusion de l'eau gazeuse qui se vaporise et le transfert de chaleur entre la surface du bulbe et l'air ambiant.

- a. Rappeler la loi de Fick pour la diffusion de la vapeur d'eau et la loi de Fourier pour la conduction thermique. On notera  $n_v$  le nombre de molécules d'eau gazeuse par unité de volume,  $D$  le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air et  $\kappa$  le coefficient de conduction thermique dans l'air.
- b. Comme la vapeur d'eau diffuse dans l'air, son nombre de molécules  $n_v$  par unité de volume satisfait une équation de conservation qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\partial n_v}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_n = 0 \quad (22)$$

où  $\vec{j}_n$  est la densité surfacique de flux dans la loi de Fick. En quoi cette équation est une équation de conservation? En utilisant la loi de Fick, en déduire l'équation de diffusion pour  $n_v$ .

- c. En outre, l'air au voisinage du bulbe est le siège d'un phénomène de conduction thermique et donc son énergie interne satisfait une loi de conservation très similaire à la précédente, à savoir :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{th} = 0 \quad (23)$$

où  $\vec{j}_{th}$  est la densité surfacique de flux dans la loi de Fourier et  $u$  est l'énergie interne de l'air par unité de volume. Commenter cette équation. Après avoir déterminé  $u$  en fonction de  $T$ , déduire de la loi de Fourier l'équation de la conduction thermique. On notera  $c$  la capacité calorifique massique de l'air à pression constante dans cette question.

- d. On considère maintenant le régime stationnaire. Justifier que  $n_v$  et  $T$  ne dépendent que de  $r$ . En déduire que ces deux fonctions satisfont les relations :

$$-D 4\pi r^2 \frac{dn_v}{dr} = F_0 \quad \text{et} \quad \kappa 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} = H_0 \quad (24)$$

où  $F_0$  et  $H_0$  sont des constantes positives dont on donnera la dimension.

e. Interpréter ces deux constantes. Justifier qu'elles satisfont la relation suivante

$$H_0 = \frac{L_{vap} M_{eau}}{N_A} F_0 \quad (25)$$

où  $L_{vap}$  est la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau.

f. Intégrer l'équation pour la température et en déduire une relation entre la température de l'air  $T_\infty$  loin du bulbe et la température humide de l'air  $T_H$ .

g. Intégrer l'équation pour la densité  $n_v$  et en déduire la relation suivante :

$$n_v(r = \infty) - n_v(r = R_0) = -\frac{F_0}{4\pi R_0 D} \quad (26)$$

h. La masse volumique de la vapeur d'eau  $\rho_v(r)$  s'obtient à partir du nombre de molécules par unité de volume  $n_v(r)$  par la relation  $\rho_v(r) = n_v(r) M_{eau} / N_A$ . En déduire alors l'équation suivante :

$$w(T_\infty) - w_s(T_H) = -\frac{F_0 M_{eau}}{N_A 4\pi R_0 D \rho} \quad (27)$$

i. Déduire finalement en combinant les équations (25) et (27) avec l'équation obtenue dans la question (f) l'expression du taux hygrométrique de l'air loin du bulbe en fonction de la température humide :

$$r = \frac{w_s(T_H)}{w_s(T_\infty)} - \frac{\kappa}{DL_{vap}\rho} \frac{T_\infty - T_H}{w_s(T_\infty)} \quad (28)$$

Discuter le fait que  $R_0$  n'apparaît pas dans cette équation. Ainsi, la mesure de la température humide  $T_H$  et de  $T_\infty$  permet d'accéder au taux hygrométrique de l'air ou de manière équivalente à  $w(T_\infty)$ . Ce modèle est en fait rudimentaire et les météorologues utilisent plutôt des tables de valeurs pré-établies. La mesure de  $T_H$  est essentielle pour prévoir la formation de nuages : selon sa valeur, on saura dire s'il y aura formation de cirrus, de brouillard ou de cumulonimbus par exemple...

## 2.2 Formation des nuages : la nucléation

Pour expliquer la formation des nuages, on va étudier le phénomène de nucléation homogène. La nucléation homogène est un processus qui permet de comprendre la formation d'une goutte d'eau spontanément à partir de la vapeur d'eau. Pour cela, il est nécessaire d'introduire la tension superficielle  $\gamma$  : elle est telle que l'énergie nécessaire à température constante pour combattre les effets de tension superficielle et créer une goutte d'eau de rayon  $a$  à partir de vapeur d'eau est donnée par  $\gamma S(a)$  où  $S(a) = 4\pi a^2$  est la surface de la goutte, supposée sphérique.

1. Donner la dimension de  $\gamma$ . Décrire succinctement un phénomène où la tension superficielle se manifeste.

2. On considère le système constitué d'une masse  $M_0$  de vapeur d'eau à la pression partielle  $P_{vap}$ , contenue dans une certaine quantité d'air. La température  $T$  et la pression  $P$  sont supposées constantes.

Spontanément, il se crée une goutte d'eau de rayon  $a$  et de masse  $M_\ell$  au milieu de la vapeur d'eau : ceci est l'état final du système. On désire savoir si la goutte d'eau sera stable ou pas. Pour cela, on considère l'enthalpie libre de Gibbs  $G$  du système. Pourquoi ? Quel doit être le signe de  $\Delta G = G_{final} - G_{initial}$  pour que la goutte soit stable ? On notera par la suite  $g_v$  et  $g_\ell$  respectivement les enthalpies libres massiques de la vapeur et de l'eau liquide, supposées constantes ici.

3. Quelle est l'expression de  $G_{initial}$  en fonction de la masse initiale de vapeur d'eau  $M_0$  et de  $g_v$  ? Justifier que l'expression de  $G_{final}$  est donnée par :

$$G_{final} = g_v M_0 + (g_\ell - g_v) M_\ell + \gamma 4\pi a^2 . \quad (29)$$

4. En déduire alors que si  $g_v - g_\ell < 0$ , la goutte d'eau n'est jamais stable et disparaît. Dans ce cas, il ne se formera pas de nuages.
5. En outre, montrer que si  $g_v - g_\ell > 0$ , le signe de  $\Delta G$  n'est pas déterminé, ce qui signifie que dans certaines conditions la bulle peut être stable. Pour comprendre ces conditions, commencer par écrire  $\Delta G$  sous la forme :

$$\Delta G = 4\pi \left( -\alpha \frac{a^3}{3} + \gamma a^2 \right) \quad (30)$$

où  $\alpha$  ne dépend que de  $g_v$ , de  $g_\ell$  et de la masse volumique de l'eau liquide  $\rho_\ell$  supposée constante. Tracer schématiquement la courbe  $\Delta G(a)$  vue comme une fonction de  $a$  et montrer l'existence d'un maximum pour une certaine valeur de  $a$  que l'on notera  $a_{crit}$  et que l'on déterminera.

6. Que se passe-t-il si la goutte a un rayon  $a < a_{crit}$  et si  $a > a_{crit}$  ? Dans quel cas verra-t-on la formation de nuages dans l'atmosphère ?
7. Montrer que

$$\alpha = \rho_\ell \frac{RT}{M_{eau}} \ln \left( \frac{P}{P_s(T)} \right) \quad (31)$$

où  $P_s(T)$  est à nouveau la pression de vapeur saturante. Pour cela, on utilisera l'expression de l'enthalpie libre établie dans la première partie à la question 15 pour la vapeur d'eau.

8. En déduire que, pour que des nuages se forment, l'air doit être sur-saturé en humidité. Comment cela est-il possible ?
9. On suppose que les gouttes d'un nuage ont une taille caractéristique  $a = 0,01 \mu m$ . Calculer alors le taux  $P/P_s(T)$  minimal pour former une telle goutte à  $T = 278 K$  sachant que  $\gamma = 0,076 J.m^{-2}$ . Or, dans les nuages, on observe que ce rapport excède rarement la valeur de 1,01. Comment pouvez-vous expliquer la différence entre les prédictions du modèle et la réalité ?

### 3 Effet du champ de gravitation sur l'atmosphère

Dans cette partie, on s'intéresse aux effets du champ de gravitation sur l'atmosphère. On considère un air humide sans se soucier toutefois des phénomènes de condensation. On supposera alors qu'il s'agit d'un gaz parfait qui a les mêmes caractéristiques que l'air sec avec une température virtuelle  $T_v$  qui tient compte de l'humidité :

$$P = \frac{R}{M} \rho_{totale} T_v. \quad (32)$$

Sauf mention contraire, on oubliera l'indice  $v$  et on notera  $T$  la température virtuelle. De plus,  $\rho_{totale}$  sera notée  $\rho$ .

#### 3.1 Le profil de l'atmosphère

On reprend et complète l'étude commencée dans la partie 1.1. (questions 8 et 9) pour comprendre l'effet du champ de pesanteur sur l'atmosphère. Cette étude se basait sur l'hypothèse d'une atmosphère isotherme et dans ce sens était très limitée. On se propose ici de la reprendre dans le cas où la température de l'atmosphère n'est pas nécessairement uniforme.

1. La vitesse de libération d'un objet massif soumis à l'attraction d'un astre est définie comme la vitesse minimale  $v_\ell$  que doit avoir cet objet pour s'extraire totalement du champ de gravitation de l'astre. Afin de déterminer  $v_\ell$  pour un objet de masse  $m$  posé sur le sol de la Terre, commencer par donner l'énergie mécanique  $E(r, \vec{v})$  de ce point lorsqu'il se trouve à une distance  $r$  du centre de la Terre avec une vitesse  $\vec{v}$ . En déduire que sa vitesse de libération est donnée par :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}. \quad (33)$$

Expliquer physiquement pourquoi cette vitesse est indépendante de la masse  $m$ .

2. Calculer numériquement  $v_\ell$ . La comparer à la vitesse  $\sqrt{v^2}$  des molécules de l'atmosphère calculée dans la question 1.1.6. et commenter.
3. On étudie l'atmosphère à une échelle où on peut négliger la courbure de la Terre. Dans ce cas, la surface de la Terre peut être supposée plane et est munie d'un système de coordonnées cartésiennes  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  dont l'axe des  $z$  est vertical ascendant. En outre, on supposera que  $\vec{g}_0 = -g_0 \vec{e}_z$ . En utilisant l'équation de l'hydrostatique (11), en déduire que  $P$  et  $\rho$  ne dépendent que de  $z$  et écrire l'équation différentielle entre  $P(z)$  et  $\rho(z)$ .
4. Comment est définie la verticale d'un point? Donner deux raisons pour lesquelles la verticale d'un point ne passe pas par le centre de la Terre.
5. Déterminer à partir de l'équation de l'hydrostatique et de l'équation des gaz parfaits les fonctions  $P(z)$  et  $\rho(z)$  pour une température  $T(z)$  quelconque. On notera  $\rho(0)$ ,  $T(0)$  et  $P(0)$  la masse volumique, la température et la pression atmosphérique au niveau de la surface et on exprimera  $P(z)$  et  $\rho(z)$  en fonction de l'intégrale :

$$\int_0^z \frac{dz'}{T(z')}. \quad (34)$$

6. Déterminer  $P(z)$  explicitement dans le cas d'une atmosphère isotherme à la température  $T_0$ . Commenter le résultat.
7. On veut maintenant déterminer  $P(z)$  pour un air sec adiabatique. Un tel air est caractérisé par le fait que son entropie massique  $S$  est constante. Quel est le sens physique de cette hypothèse ? En utilisant l'équation de Laplace  $PV^\gamma = \text{cste}$  dans l'atmosphère, déduire que la température satisfait une équation de la forme :

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma_d \quad (35)$$

où  $\Gamma_d$  est une constante positive dont on donnera la valeur numérique. Pour cela, on prendra  $\gamma = 7/5$ .

8. En déduire  $T(z)$  et  $P(z)$  pour un air sec adiabatique en fonction des données du problème. Commenter les résultats.
9. Il est rare d'observer des vitesses verticales pour l'atmosphère supérieure à  $0.01 \text{ m.s}^{-1}$ . L'hypothèse hydrostatique est-elle donc valable ?

### 3.2 Stabilité de l'atmosphère

L'atmosphère ne peut pas toujours être modélisée par un air sec adiabatique. Pour caractériser l'atmosphère, les météorologues introduisent le potentiel de température  $\theta$  défini par :

$$\theta = T \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (36)$$

où  $P_0$  est une température de référence souvent choisie à  $P_0 = 1 \text{ bar}$ . Dans le cas d'un air sec adiabatique  $\theta$  est constant, sinon il ne l'est pas. Nous allons montrer que  $\theta$  permet d'établir un critère simple pour dire si l'atmosphère est stable ou non.

1. On commence par définir la notion de stabilité pour l'atmosphère : on dit que l'atmosphère est stable lorsque les particules fluides la constituant restent localisées au voisinage d'une position d'équilibre suite à une légère perturbation. Autrement, elle est instable. On considère alors une particule fluide à l'altitude  $z_0$  dans une atmosphère caractérisée par un profil de température  $T(z)$ . En  $z = z_0$ , la température  $T_p(z_0)$  de la particule est identique à la température  $T(z_0)$  de l'atmosphère.
  - a. Lorsque la particule bouge dans l'atmosphère, elle n'a pas le temps d'échanger d'énergie par transfert de chaleur avec l'atmosphère environnant : elle évolue alors de façon adiabatique et réversible. Montrer que sa température en un point  $z$  proche de  $z_0$  s'écrit :

$$T_p(z) = T(z_0) - \Gamma_d(z - z_0) \quad (37)$$

où  $\Gamma_d$  a été introduit dans la relation (35). On supposera par la suite que la pression de la particule fluide  $P_p(z)$  est confondue avec la pression  $P(z)$  de l'atmosphère environnant. D'où vient cette hypothèse sur l'égalité des pressions de l'air et de la particule fluide ?



- b. On suppose que la température de l'atmosphère environnant est caractérisée par

$$T(z) = T(z_0) - \Gamma_e(z - z_0) \quad (38)$$

au voisinage de  $z_0$ . En utilisant le théorème d'Archimède, montrer que la particule fluide subit une accélération  $\vec{a} = a\vec{e}_z$  au point d'altitude  $z$  donnée par :

$$a = \frac{T_p(z) - T(z)}{T(z)} g_0. \quad (39)$$

- c. En déduire que pour des oscillations au voisinage de  $z = z_0$  la grandeur  $x = z - z_0$  satisfait l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\Gamma_d - \Gamma_e) \frac{g_0}{T(z_0)} x = 0. \quad (40)$$

Donner alors la condition pour laquelle l'atmosphère est stable. Calculer la fréquence des petites oscillations de la particule fluide dans le cas où l'atmosphère est stable.

2. On va montrer maintenant comment le potentiel de température  $\theta$  permet de caractériser la stabilité de l'atmosphère.
- a. Le potentiel  $\theta$  dépend de  $z$  via  $P$  et  $T$ . Montrer alors que

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\theta}{T} \frac{dT}{dz} - \theta \frac{\gamma - 1}{\gamma P} \frac{dP}{dz}. \quad (41)$$

- b. En utilisant la loi de l'hydrostatique, en déduire que :

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\theta}{T} (\Gamma_d - \Gamma_e). \quad (42)$$

- c. Conclure que le signe de  $d\theta/dz$  permet de déduire la stabilité ou la non-stabilité de l'atmosphère. Dans le cas où l'atmosphère est stable, donner la pulsation  $\omega_B$  des petites oscillations des particules fluides en fonction de  $\theta$  et  $d\theta/dz$ ;  $\omega_B$  porte le nom de pulsation de Brunt-Vaisala.

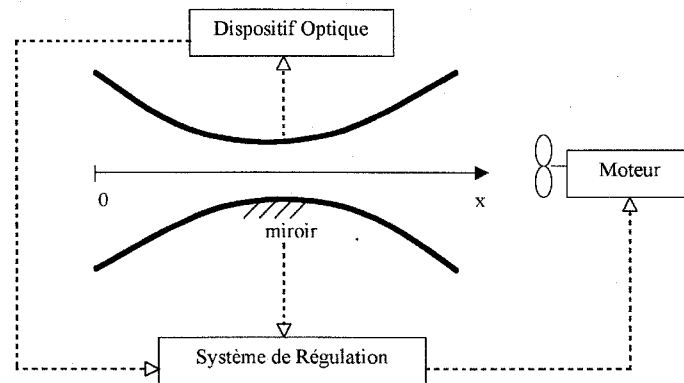
## 4 Mesure thermodynamique du degré hygrométrique de l'air

Dans cette partie on étudie un dispositif de mesure permettant de déterminer le degré hygrométrique de l'air en mesurant la température du point de rosée qui a été mentionnée dans la partie précédente.

Le principe de cette mesure est de diminuer la température de l'air de sorte à se placer dans les conditions de saturation, c'est à dire dans les conditions où l'air est saturé d'humidité. Ainsi, la pression partielle de vapeur d'eau est la pression de vapeur saturante à cette température, et sa mesure permet de déterminer le degré hygrométrique de l'air à étudier. On étudie ici un dispositif permettant d'atteindre les conditions de saturation en faisant s'écouler l'air humide dont on cherche le degré hygrométrique à travers une tuyère.

Le lien entre le degré hygrométrique de l'air et la température de rosée établi dans la partie précédente n'est pas nécessaire au traitement de cette partie.

Le dispositif mis en place est schématisé ci-dessous :



Sur ce schéma, les flèches en pointillés symbolisent les échanges d'information entre les différents éléments du système de régulation de la puissance du moteur.

L'air est contraint à traverser une tuyère calorifugée au col duquel se trouve un petit miroir dont on peut mesurer la température, ainsi que la présence ou non de buée sur sa surface grâce à un dispositif optique dont on ne détaille pas le fonctionnement ici. Le système de régulation agit sur la puissance du moteur forçant l'écoulement de l'air dans la tuyère, de sorte qu'à chaque instant l'air au voisinage du miroir soit juste à la limite de saturation, avec une faible quantité d'eau liquide se déposant à sa surface. On admettra qu'ainsi la mesure de la température du miroir permet de connaître la pression partielle d'eau dans l'air à mesurer et ainsi de déterminer son degré hygrométrique.

On considère l'écoulement permanent du mélange air-vapeur d'eau, assimilé à un gaz parfait dans la tuyère horizontale à symétrie de révolution autour de l'axe  $Ox$ , de section notée  $S(x)$  non constante. La tuyère est calorifugée, et l'écoulement est supposé permanent et unidimensionnel :

$$\vec{v}(x) = v(x)\vec{u}_x$$

On note  $T_0$ ,  $P_0$ ,  $\rho_0$  et  $v_0$  la température, la pression, la masse volumique et la vitesse de l'écoulement en  $x = 0$  à l'entrée de la tuyère.  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ , le rapport des capacités massiques à pression et à volume constants du gaz, est considéré uniforme le long de l'écoulement.

1. C'est l'équation de Navier-Stokes qui traduit, dans le formalisme dit eulérien, la dynamique d'un fluide. Pour un fluide de viscosité dynamique  $\eta$ , de masse volumique  $\rho$ , de pression  $P$ , de vitesse  $\vec{v}$ , cette équation s'écrit, en négligeant le poids :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v} \quad (43)$$

où  $D\vec{v}/Dt$  est l'accélération particulière d'une particule fluide et  $\Delta$  est l'opérateur laplacien. Donner la signification physique des différents termes présents dans cette équation. Quel est le terme techniquement le plus problématique de cette équation ?

2. On distingue les écoulements laminaires des écoulements turbulents. Décrire succinctement ces deux types d'écoulement en donnant pour chacun un exemple précis. Quelle est la grandeur qui permet de caractériser ces deux régimes d'écoulement ?
3. L'écoulement est supposé parfait. Préciser cette hypothèse et justifier que l'on considère aussi les transformations subies par le fluide isentropiques. Justifier alors que sous cette hypothèse l'équation de Navier-Stokes se réduit à l'équation d'Euler qu'on écrira.
4. On se propose d'établir l'équation dite « de Saint Venant » liant la vitesse à la pression le long de l'écoulement.

- a. En écrivant l'équation d'Euler en projection sur l'axe  $Ox$  établir l'équation :

$$v^2(x) = v_0^2 - 2 \int_0^x \frac{1}{\rho(x')} \left( \frac{dP}{dx'} \right) dx' \quad (44)$$

- b. Quelle hypothèse sur l'écoulement du fluide permet de dire que la quantité  $P/\rho^\gamma$  est constante ? En déduire l'équation liant  $\rho(x)$ ,  $\rho_0$ ,  $P(x)$ ,  $P_0$  et  $\gamma$ .
- c. En éliminant  $\rho$  de l'équation (44) établir l'équation de Saint Venant :

$$v^2(x) = v_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} \left( 1 - \left( \frac{P(x)}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \quad (45)$$

Remarque : on pourra poser  $u(x') = \frac{P(x')}{P_0}$  pour faciliter la résolution.

5. On se propose à présent d'établir l'équation de Saint Venant par une autre méthode en effectuant un bilan énergétique sur un système fermé bien choisi. On considère donc une tranche de fluide comprise à l'instant  $t$  entre les abscisses  $x_e = 0$  et  $x_s = x$ .
  - a. Ecrire dans le cas général, le premier principe de la thermodynamique pour un système fermé subissant une transformation quelconque. Pourquoi dit-on que le premier principe est un principe de conservation ? Comment qualifie-t-on le second principe de la thermodynamique ?
  - b. Définir la notion de transformation quasi-statique. Ecrire alors le premier principe de la thermodynamique pour une transformation infinitésimale quasi-statique.
  - c. Etablir que pour la tranche de fluide considérée on a :

$$U(t + dt) - U(t) + E_c(t + dt) - E_c(t) = P_0 S_0 v_0 dt - P(x) S(x) v(x) dt \quad (46)$$

On pourra judicieusement illustrer son raisonnement à l'aide d'un schéma de la tranche de fluide au cours de la transformation considérée.

- d. Justifier que le débit massique se conserve le long de l'écoulement et en déduire une relation liant  $\rho(x)$ ,  $S(x)$  et  $v(x)$  à  $\rho_0$ ,  $S_0$  et  $v_0$ .
- e. En utilisant l'expression de l'énergie interne du gaz, établir avec soin la relation liant la variation d'énergie interne  $dU$  du système à  $\rho_0$ ,  $S_0$ ,  $v_0$ ,  $c_v$ ,  $T(x)$ ,  $dt$  et  $T_0$ .  
Établir de même l'expression de la variation d'énergie cinétique  $dE_c$  en fonction de  $\rho_0$ ,  $S_0$ ,  $v_0$ ,  $dt$  et  $v(x)$ .
- f. En déduire que :

$$c_v(T(x) - T_0) + \frac{1}{2} (v^2(x) - v_0^2) = \frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P(x)}{\rho(x)} \quad (47)$$

g. Retrouver alors l'équation de Saint Venant.

6. On se propose maintenant d'établir une nouvelle équation qui lie en particulier la section  $S(x)$  et la vitesse  $v(x)$  du fluide.
- a. En exploitant à nouveau la conservation du débit massique, établir l'équation ( $\alpha$ ) entre  $\frac{\rho'}{\rho}$ ,  $\frac{S'}{S}$  et  $\frac{v'}{v}$ .
- b. Établir grâce à la loi de Laplace l'équation ( $\beta$ ) liant  $P(x)$ ,  $\rho(x)$  et  $\gamma$  aux dérivées  $P'(x)$  et  $\rho'(x)$ .
- c. Enfin, déduire de la projection de l'équation d'Euler (voir question 4.4.a.) l'équation ( $\delta$ ) liant  $v(x)$ ,  $\rho(x)$ ,  $v'(x)$  et  $P'(x)$ .
- d. En déduire l'équation d'Hugoniot :

$$\frac{1}{S(x)} \frac{dS}{dx} = (M^2(x) - 1) \frac{1}{v(x)} \frac{dv}{dx} \quad (48)$$

où  $M(x) = \frac{v(x)}{c(x)}$  avec  $c(x) = \sqrt{\gamma \frac{P(x)}{\rho(x)}}$  vitesse du son dans le fluide à l'abscisse  $x$ .  
 $M(x)$  est appelé nombre de Mach.

7. On suppose que l'écoulement dans la tuyère reste subsonique en tout point. En déduire à quel endroit de la tuyère la vitesse de l'écoulement est maximale.
8. Montrer alors qu'en ce point la température de l'écoulement est minimale et justifier ainsi le choix de la position du miroir dont on mesure la température.
9. Décrire en quelques lignes l'action du système de régulation selon l'information renvoyée par le dispositif optique.

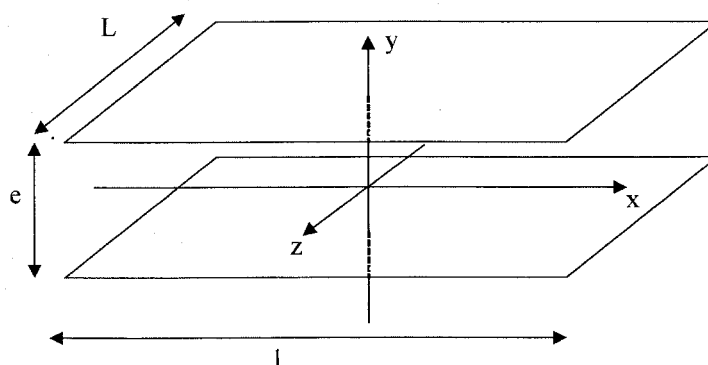
## 5 Mesure capacitive du degré hygrométrique de l'air

L'industrie électronique fabrique des capteurs hygrométriques dont le fonctionnement est relativement simple : un milieu susceptible de fixer des molécules d'eau est emprisonné entre deux électrodes. Le condensateur ainsi réalisé est analogue à un condensateur plan dans le vide, à l'exception de la permittivité diélectrique du vide  $\mathcal{E}_0$  qu'il convient de remplacer par la permittivité diélectrique du milieu  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_r$ .  $\mathcal{E}_r$  a une valeur proche de 1 mais qui dépend de la fraction molaire d'eau contenue dans l'atmosphère. Une relation connue permet de trouver le degré hygrométrique connaissant la capacité du condensateur.

Le dispositif expérimental doit donc permettre de mesurer la capacité du capteur (comprise entre 100 et 150 pF), avec une assez bonne précision, en s'affranchissant des perturbations introduites par les câbles de connexion entre le capteur et l'électronique de mesure. Plusieurs dispositifs sont ici étudiés.

### 5.1 Etude du capteur

Le capteur étudié est constitué de deux plaques métalliques de longueur  $l$  selon  $Ox$ , de largeur  $L$  selon  $Oz$  et d'épaisseur négligeable. Ces plaques sont distantes de  $e$ .



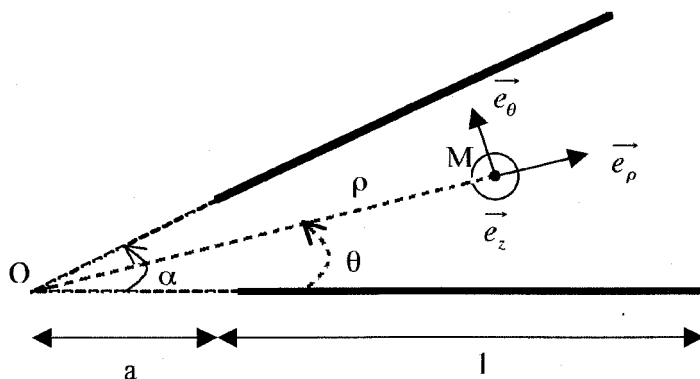
Les dimensions  $l$  et  $L$  étant très grandes devant la distance qui sépare les deux armatures, on négligera les effets de bords. On note  $Q$  la charge portée par l'armature supérieure et  $-Q$  celle portée par l'armature inférieure.

Les deux armatures sont séparées par un matériau isolant et poreux, appelé diélectrique, de permittivité  $\mathcal{E}$ . D'un point de vue électrique le diélectrique se comporte comme le vide à condition de remplacer  $\mathcal{E}_0$  par  $\mathcal{E}$ .

Les armatures étant d'épaisseur négligeable, elles seront donc considérées confondues avec les plans d'ordonnée  $y = -e/2$  et  $y = e/2$ . On adoptera donc un modèle de plan uniformément chargé en surface pour les décrire.

1. Quels sont les ingrédients nécessaires pour construire un condensateur ? Justifier que les armatures d'un condensateur ont des charges opposées.
2. On s'intéresse dans un premier temps uniquement à l'armature supérieure, supposée seule et dans le vide.
  - a. Justifier avec soin que le champ créé en tout point par cette armature peut s'écrire  $\vec{E}(M) = E(y)\vec{e}_y$ .

- b. On pose  $y' = y - \frac{e}{2}$ , exprimer  $E(y')$  en fonction de  $E(-y')$ .
- c. En utilisant le théorème de Gauss, établir alors l'expression du champ créé en tout point de l'espace par l'armature en fonction de  $Q$ ,  $L$ ,  $l$  et  $\mathcal{E}_0$ .
3. On considère maintenant l'ensemble des deux armatures séparées par le diélectrique de permittivité  $\mathcal{E}$ .
- a. Donner l'expression du champ créé en tout point de l'espace par cette distribution.
- b. En déduire en fonction de  $\mathcal{E}$ ,  $l$ ,  $L$  et  $e$  la capacité  $C_{RH}$  du condensateur.
4. Il est possible de rencontrer des condensateurs avec des défauts de construction et ces défauts peuvent modifier la valeur de la capacité. Par exemple, les deux armatures peuvent ne pas être parfaitement parallèles et c'est précisément cette situation que nous voulons étudier ici. On supposera alors que les deux armatures forment un dièdre d'angle  $\alpha$  comme indiqué sur le schéma ci-après.



Tout point  $M$  entre les armatures est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . En tout point  $M$  on définit également une base locale  $(\vec{e}_\rho(M), \vec{e}_\theta(M), \vec{e}_z)$  de l'espace. En particulier, tout point de l'armature du bas est caractérisée par  $\theta = 0$  alors que tout point de l'armature du haut est tel que  $\theta = \alpha$ . En outre, les armatures ont une longueur  $L$  dans la direction  $Oz$ , et  $l$  dans la direction radiale de sorte qu'elles sont comprises entre  $\rho = a$  et  $\rho = a + l$ . On suppose enfin que l'armature du bas est portée au potentiel  $V_1$  alors que celle du haut est portée au potentiel  $V_2$ .

Pour calculer la capacité d'un tel condensateur, on utilise une méthode différente de celle de la partie précédente.

- a. On commence par calculer la forme générale du potentiel  $V(M)$  en des points  $M$  entre les armatures. Justifier pourquoi on peut considérer que  $V(M)$  est en fait une fonction de l'angle  $\theta$  seulement.
- b. Quelle équation satisfait le potentiel  $V(\theta)$  en supposant que le diélectrique n'est pas chargé? Résoudre cette équation et déduire que la solution s'écrit sous la forme :

$$V(\theta) = A\theta + B \quad (49)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes que l'on déterminera en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$  et  $\alpha$ .

- c. En déduire l'expression du champ électrique  $\vec{E}(M)$  au point  $M$  entre les armatures.
- d. On suppose dans cette question seulement que les armatures sont des conducteurs parfaits. Qu'est-ce que cela signifie? Sous cette condition, on admet que le champ

électrique au voisinage d'un point  $M$  de l'armature du bas est relié à la densité surfacique de charge  $\sigma(M)$  en ce même point  $M$  de l'armature par l'équation :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon} \vec{e}_\theta(M). \quad (50)$$

D'où vient cette équation ? Ecrire la relation analogue lorsque  $M$  est un point de l'armature du haut.

- e. En déduire la charge totale  $Q$  de l'armature du bas et montrer qu'elle se met sous la forme  $Q = C(V_1 - V_2)$  où  $C$  est la capacité du condensateur diédrique donnée par :

$$C = \frac{\varepsilon L}{\alpha} \ln\left(\frac{a+l}{a}\right). \quad (51)$$

- f. On veut maintenant comparer  $C$  à la valeur  $C_{RH}$  du condensateur plan. Pour cela on considère le condensateur diédrique dans la limite où  $\alpha$  tend vers 0,  $a$  tend vers l'infini avec la condition  $a\alpha = e$  où  $e$  est fixé. Justifier que dans cette limite la capacité du condensateur diédrique tend vers celle du condensateur plan d'épaisseur  $e$ , de longueur  $L$  et de largeur  $l$ .
- g. En déduire que sous ces conditions  $C = C_{RH} - \delta C$  où  $\delta C$  est une correction donnée par la relation :

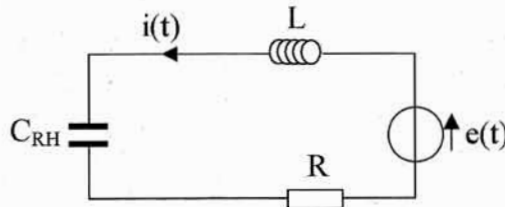
$$\delta C = \frac{\alpha l}{2e} C_{RH}. \quad (52)$$

On pourra utiliser que  $\ln(1+x) \simeq x - x^2/2$  lorsque  $x$  est très petit devant un.

- h. Donner un ordre de grandeur de  $\delta C/C_{RH}$  sachant que  $\alpha$  est de l'ordre d'une seconde d'arc. On prendra  $e = 1 \mu\text{m}$ ,  $l = 1 \text{ mm}$ ,  $L = 2 \text{ mm}$ . Dans la suite on négligera  $\delta C$  et on supposera le condensateur plan.

## 5.2 Mesure de $C_{RH}$ : premier montage

La capacité à mesurer  $C_{RH}$  est introduite dans le circuit résonnant ci-dessous. On se place en régime sinusoïdal forcé :  $e(t) = E \cos(\omega t)$ . Lorsqu'une grandeur  $x(t)$  (intensité ou tension) s'écrit sous la forme  $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$ , on dit que  $X$  est l'amplitude de cette grandeur.



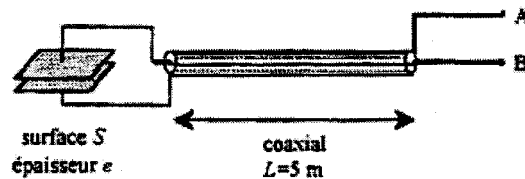
- Calculer l'amplitude de l'intensité dans le circuit, notée  $I$ , en fonction des données du problème. En déduire l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes de  $C_{RH}$ , notée  $U_C$  en fonction de  $E$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C_{RH}$  et  $\omega$ . Il sera judicieux de passer en notation complexe pour répondre à ces questions.

2. Montrer que l'expression de l'amplitude  $U_C$  peut se mettre sous la forme :

$$U_C = \frac{U_{C0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (53)$$

Donner les expressions de  $U_{C0}$ ,  $Q$  et de  $\omega_0$ . Interpréter physiquement ces grandeurs.

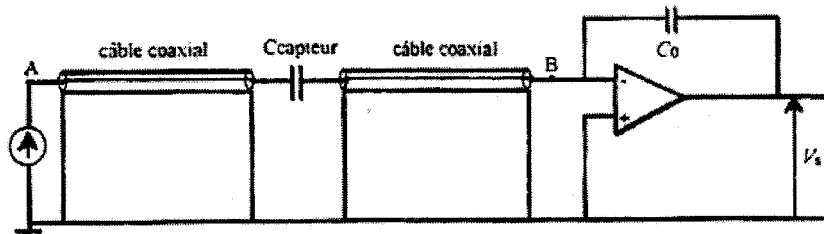
3. A quelle condition sur  $Q$  cette amplitude présente-t-elle un maximum en fonction de  $\omega$ . Comment est appelé ce phénomène ? En connaissez-vous d'autres manifestations ainsi que leur utilité ?
4. On donne  $L = 100$  mH,  $R = 50 \Omega$ , estimez pour une des valeurs extrêmes de  $C_{RH}$  la valeur du facteur de qualité dans ce cas.
5. Quelle est la valeur en fonction de  $Q$  et  $\omega_0$  de la pulsation  $\omega_m$  à laquelle  $U_C$  est maximale ?
6. Estimez l'écart relatif  $|\omega_m - \omega_0|/\omega_0$  en fonction de  $Q$ . Est-il ici préjudiciable de confondre  $\omega_m$  et  $\omega_0$  ?
7. Estimer l'erreur commise sur la valeur de  $C_{RH}$  que l'on déduit de la mesure de  $\omega_m$  en confondant  $\omega_m$  avec  $\omega_0$ . Comment serait-il possible concrètement de diminuer cette erreur ?
8. Afin de disposer le capteur à l'extérieur d'un bâtiment et le dispositif de mesure à l'intérieur, on utilise un câble coaxial d'une longueur  $L = 5$  m. Le câble coaxial présente lui aussi une capacité  $C_c$  entre l'âme et le blindage, qui dépend du degré hygrométrique.



Quel est le montage équivalent à ce système ? Quelle capacité est alors mesurée par la méthode précédemment décrite ? Quel est l'inconvénient majeur de ce montage ?

### 5.3 Mesure de $C_{RH}$ : second montage

Afin de palier cet inconvénient, on réalise le montage suivant :



L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et son fonctionnement est linéaire. Le générateur a des caractéristiques de Thévenin notées  $e(t)$  et  $R_g = 50 \Omega$  :

- pour  $t < 0$ ,  $e(t) = E$  et la capacité  $C_0$  est déchargée.



– pour  $t > 0$ ,  $e(t) = 0$ .

On note  $C_{c1}$  la capacité du câble coaxial 1 entre A et le capteur et  $C_{c2}$  celle du câble coaxial 2 entre le capteur et B.

1. Quel est le schéma électrique équivalent au dispositif proposé ?
2. Etablir les expressions des variations dans le temps des tensions  $U_{C_{c1}}$  aux bornes du câble coaxial 1 et  $U_{C_{RH}}$  aux bornes du capteur.
3. Quelles sont les valeurs prises par ces tensions au bout d'un temps très long ? On précisera quantitativement la notion de « temps très long ».
4. Déterminer au bout d'un temps très long la charge portée par le condensateur de capacité  $C_{c1}$  équivalent au câble 1 . Commenter.
5. Déterminer de même la charge portée par le condensateur équivalent au câble 2  $C_{c2}$ . Commenter.
6. Ce dispositif permet-il de s'affranchir des capacités parasites des câbles ?
7. Etablir la relation entre la tension  $V_s$  mesurée au bout d'un temps très long et la capacité du capteur  $C_{RH}$ .
8. Quels sont les avantages et les inconvénients de ce dispositif ?