

SESSION 2011

AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MÉCANIQUE

ÉPREUVE DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE
ET DES MILIEUX DÉFORMABLES

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

SYSTÈME PANTOGRAPHE CX / CATÉNAIRE

CAPTAGE DU COURANT PAR LE TGV

Le captage du courant désigne la fonction de transmission de l'énergie électrique au train (figure 1).

Le courant électrique, amené par une ligne de contact appelée caténaire, est capté par un élément frottant appelé « pantographe » en référence à sa structure composée de polygones articulés.

Le courant subit ensuite des opérations de transformation / redressement avant d'être transmis aux moteurs. Le circuit de retour est constitué par les rails de la voie.

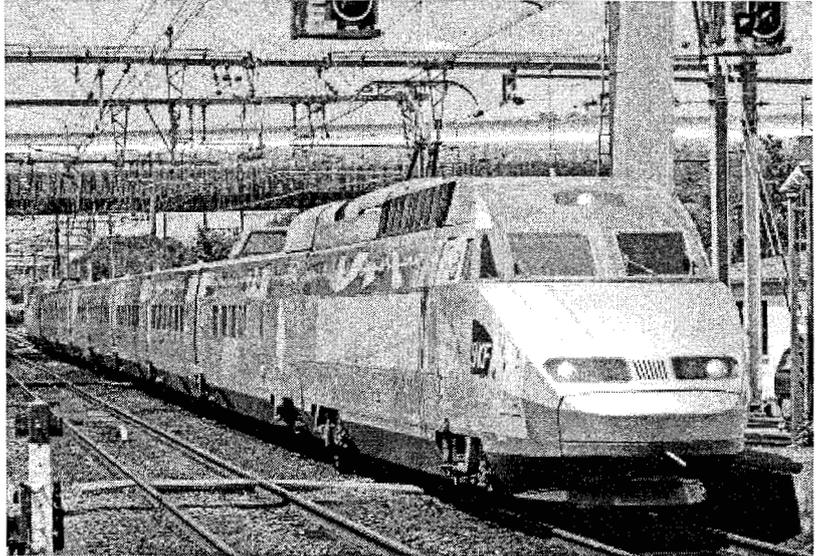


Figure 1 : La ligne TGV IRIS 320

Un mauvais captage est à l'origine d'un grand nombre de désagréments, de dépenses et d'incidents techniques. Les ruptures d'alimentation mettent la chaîne de transmission de puissance (électrique et mécanique) à rude épreuve. Lors de la perte du contact entre le pantographe et la caténaire, il y a formation d'un arc électrique source de bruit et d'usure des éléments de contact.

Le captage idéal est caractérisé par un effort moyen de contact peu fluctuant qui entraîne une usure mécanique et un soulèvement minimal du fil de contact, et qui garantit un contact permanent.

Le captage est un point limitant la performance des trains. En effet sa qualité est d'autant moins bonne que la vitesse du TGV est grande. Pour assurer un contact satisfaisant, il est nécessaire d'augmenter l'effort de contact avec la vitesse, la limite étant donnée par le soulèvement maximal tolérable du câble aux poteaux.

Le mouvement de la caténaire est géré essentiellement par des phénomènes propagatoires. Il apparaît alors naturellement une vitesse critique V_C , qui correspond à la vitesse de propagation des vibrations du fil de contact. Une solution pour accroître V_C et donc la vitesse admissible de circulation consiste à augmenter la tension du fil de contact.

Cette tension varie de 1 000 daN à 2 000 daN pour les lignes grandes vitesse et 4 000 daN pour le record de vitesse à 574,8 km/h.

Le pantographe doit, quant à lui, présenter une masse apparente la plus faible possible. C'est pourquoi on utilise pour les applications grandes vitesses des pantographes à plusieurs étages (AMDE, GPU) ou allégés (AX, CX).

Le diagramme des inter-acteurs en phase de fonctionnement normal est fourni (figure 2) :

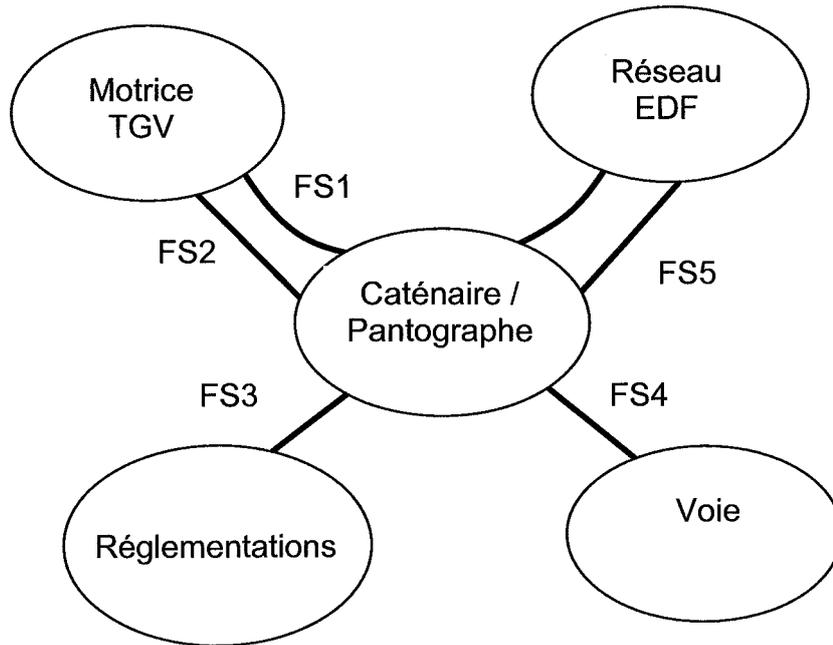


Figure 2 : Diagramme partiel des interacteurs

FS1	Permettre à la motrice TGV de capter sans interruption des courants de haute intensité à partir du réseau électrique dans toutes les conditions de circulation du train (vitesse du train, vitesse du vent, ligne droite, courbe ..) avec une durée de vie conforme et sans entretien avant changement des bandes de glissement.
FS2	Être lié à la motrice
FS3	Respecter les réglementations
FS4	Être lié à la voie
FS5	Fournir la puissance électrique nécessaire

La caténaire

L'architecture générale de la caténaire souple est construite autour des éléments suivants : le fil de contact, le câble porteur, les bras de rappel, les consoles et les poteaux (figure 3). Le fil de contact est tendu par un système de poids et est décomposé en tronçons, appelés cantons de longueur 1200 m environ.

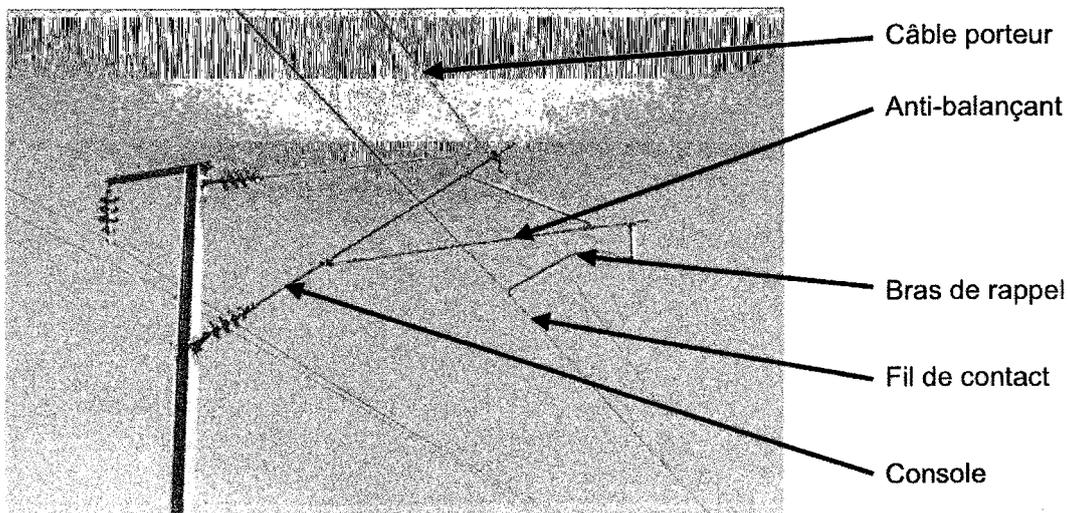


Figure 3 : La caténaire

Tournez la page S.V.P.

Le pantographe CX

Le pantographe CX est un système articulé présenté (figure 4) :

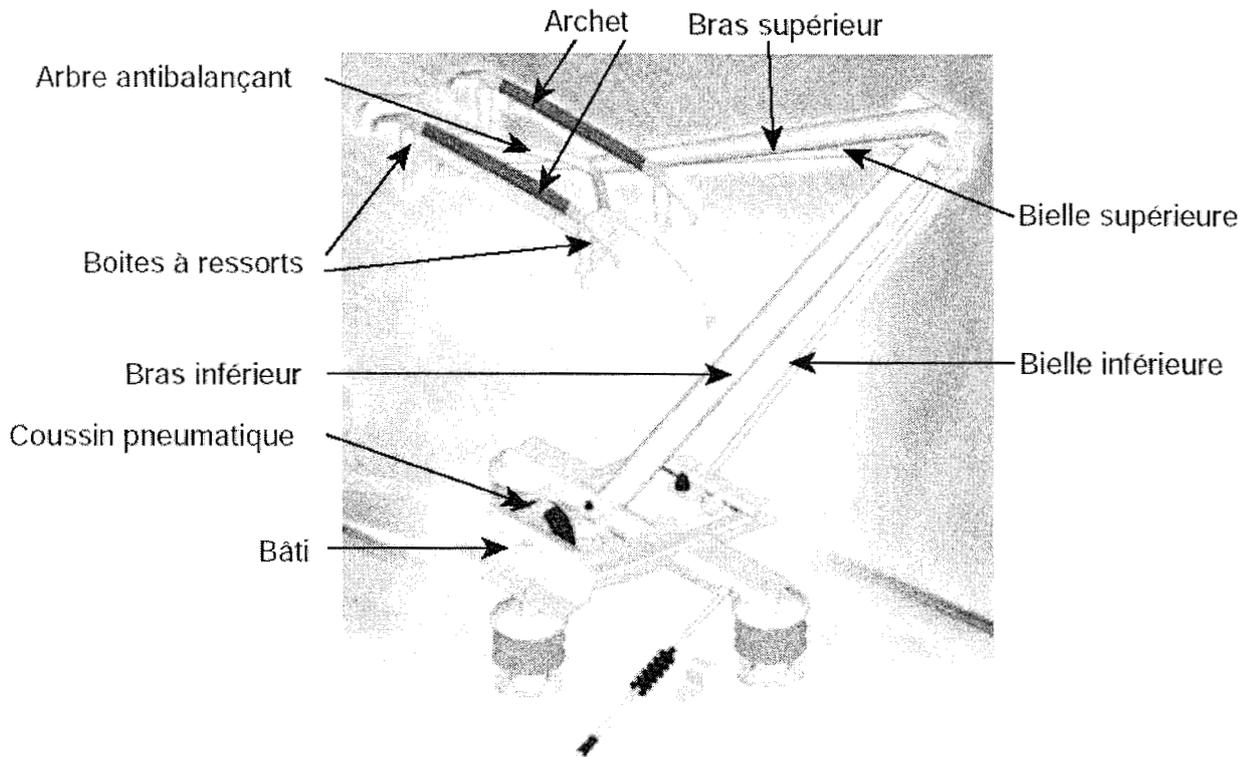


Figure 4 : Le pantographe CX

Il est composé des sous-systèmes suivants :

- **l'archet**, qui est la partie assurant le contact avec la caténaire, est suspendu par des boîtes à ressorts ;
- **le grand cadre**, composé du bâti, des bras inférieur et supérieur, des bielles inférieure et supérieure et de l'arbre anti-balançant, qui assure le mouvement vertical de l'archet ;
- **le coussin pneumatique** qui permet la montée ou la descente du pantographe. Il transmet un moment sur le bras-inferieur par l'intermédiaire d'une came assurant, pour une pression donnée un effort constant à la tête du pantographe et ce quel que soit le développement de ce dernier.

L'objectif de l'étude proposée au candidat est de permettre la prédiction et la validation de certaines des fonctions techniques liées au captage du courant par le TGV.

Le sujet s'articule des cinq parties indépendantes suivantes :

- *PARTIE 1 : Validation de la fonction « Alimenter le pantographe par la caténaire » ;*
- *PARTIE 2 : Prédiction de la tension mécanique de la caténaire en vue de valider la fonction « Contrôler la tension de la caténaire » ;*
- *PARTIE 3 : Prédiction du comportement dynamique de la caténaire en vue de valider la fonction « Assurer le maintien du contact caténaire / pantographe » ;*
- *PARTIE 4 : Prédiction du comportement dynamique du pantographe en vue de valider la fonction « Assurer le maintien du contact caténaire / pantographe » ;*
- *PARTIE 5 : Validation de la fonction « Commander la montée et le maintien du pantographe ».*

1 VALIDATION DE LA FONCTION « ALIMENTER LE PANTOGRAPHE PAR LA CATÉNAIRE »

L'objectif de cette étude est de valider le dimensionnement du fil de contact d'un point de vue thermique compte tenu des chutes de tension et des échauffements admissibles. En effet, à l'arrêt, lorsque l'engin moteur capte l'énergie nécessaire pour assurer le chauffage des trains et le « décollage » de la rame un problème thermique se pose.

Le cahier des charges partiel est le suivant :

Fonction	Critères	Niveaux
Assurer l'alimentation électrique de la caténaire	Température interne du fil de contact Température d'équilibre de la surface externe du fil de contact	Constante

Les hypothèses retenues sont les suivantes :

- le diamètre total des conducteurs constitutifs de la caténaire correspond à un diamètre « équivalent » de cuivre étalon égal à 24 mm supportant, en courant continu, une tension de 1,5 kV ;
- l'air en contact avec ce fil de contact est à $T_{\infty} = 15^{\circ} C$ et les conditions d'échange convectif sont identiques sur toute la périphérie du fil ($h = 10 W.m^{-2}.K^{-1}$).

1.1 Vérification de l'homogénéité de la température à l'intérieur du fil de contact

Question 1 : Montrer que la puissance volumique, dissipée par effet Joule, générée dans le fil de contact s'écrit $q_p = \frac{U^2}{\rho_e l^2}$ où U représente la tension transportée dans le fil, ρ_e la résistivité électrique et l la longueur d'un tronçon de fil. Pour cela, on supposera que le flux de courant est homogène.

Question 2 : Sachant que la résistivité électrique du fil de contact est $\rho_e = 17.10^{-8} \Omega.m$, calculer la puissance volumique q_p pour une longueur de canton $L = 1200 m$.

Question 3 : En considérant un volume de contrôle V à l'intérieur du fil, écrire la conservation de l'énergie pendant un temps dt . En appliquant la loi de Fourier ($\vec{q} = -k.gradT$), montrer que l'équation de conduction s'écrit :

$$k.V.\Delta T + q_p.V = hS(T - T_{\infty}) + \rho.V.C.\frac{dT}{dt} \quad \text{soit} \quad k.\Delta T + q_p = \rho.C.\frac{dT}{dt} \quad (\text{Équation E})$$

où $k = 382 W.m^{-1}.K^{-1}$: conductivité thermique du fil de contact ;

ΔT : Laplacien de la température ;

$\rho = 8940 kg.m^{-3}$: masse volumique du fil ;

$C = 0,38 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$: capacité calorifique du fil ;

$T(r)$: température du fil variant selon le rayon r ;

$\frac{dT}{dt}$: évolution de la température du fil en fonction de temps.

Tournez la page S.V.P.

Question 4 : Si l'on suppose que le régime permanent est atteint, simplifier l'équation (E) en considérant le problème comme monodimensionnel. Intégrer cette équation, écrire les conditions aux limites et montrer que le profil de température dans le fil s'écrit :

$$T(r) - T_s = \frac{q_P}{4.k} (r_s^2 - r^2)$$

avec T_s température de surface du fil de contact et r_s rayon externe du fil de contact.

Question 5 : Calculer la différence de température entre le centre et la périphérie du fil de contact ($T(r=0) - T_s$). Conclure.

1.2 Vérification de la température de la surface externe du fil de contact

À l'état d'équilibre thermique, le fil de contact est à température uniforme. Pour écrire le bilan thermique sur le fil, il faudra tenir compte des différents flux de chaleur sur le fil. Dans cette partie, on suppose qu'il n'y a pas de variation de température dans le fil de contact et donc que le flux par conduction sera négligé.

Ainsi, le bilan thermique s'écrit :

Apport de chaleur sur le fil = Flux de rayonnement + Flux de convection + Flux induit par effet Joule.

Question 6 : Si l'on suppose que :

- la surface externe du fil de contact est diffuse ;
- le soleil est assimilé à un corps noir à $T_{sol} = 5800 K$ et que l'environnement est très grand par rapport au fil, l'éclairement du soleil est $E_{sol} = 800 W.m^{-2}$;
- l'absorptivité totale de la surface vis-à-vis du rayonnement solaire est égale à $\alpha_{sol} = 0,297$;
- l'absorptivité totale de la surface vis-à-vis du rayonnement provenant de l'environnement est égale à $\alpha_{env} = 0,210$;
- l'émissivité totale hémisphérique de la surface du fil est constante et égale à $\varepsilon_s = 0,270$;

montrer que le flux de rayonnement s'écrit :

$$Q_{ray} = S(\varepsilon_s \sigma T_s^4 - \alpha_{sol} E_{sol} - \alpha_{env} \sigma T_{env}^4)$$

où S est la surface d'échange et $\sigma = 5,67.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann

Question 7 : Écrire le flux de chaleur par convection.

Question 8 : Écrire l'équation de bilan thermique sur le fil de contact.

Question 9 : Trouver la température d'équilibre de la surface externe du fil de contact T_s .

2 PRÉDICTION DE LA TENSION MÉCANIQUE DE LA CATÉNAIRE

2.1 Objectif

L'objectif de cette étude est d'évaluer l'influence de la tension de la caténaire sur la valeur de V_C . Lorsque la vitesse du train approche V_C le train a tendance à rattraper l'onde de flexion générée dans le fil de contact par le passage du pantographe (phénomène de mur du son). On observe alors une augmentation significative du soulèvement de la caténaire au passage du pantographe. Afin de limiter ce soulèvement, qui est préjudiciable à la tenue de la caténaire, on se fixe une vitesse maximale du train de 50 km/h inférieure à V_C .

Pour modéliser la caténaire, ou plus précisément le fil qui est en contact avec le pantographe, deux modèles linéiques différents sont comparés : un modèle de corde tendue (pas de raideur en flexion) et un modèle de poutre mince tendue (avec raideur de flexion mais sans déformation de cisaillement transverse) communément appelé modèle de poutre d'Euler-Bernoulli.

Dans cette partie, l'étude des déformations du fil de contact se fera vis-à-vis de sa position d'équilibre. Cette position d'équilibre est celle du fil soumis à l'action de son poids. L'action de la pesanteur n'apparaîtra donc pas dans les équilibres dynamiques à venir.

L'effort de tension (effort tangent à la déformée du fil de contact) est supposé avoir un module F constant.

Pour les deux modèles on suppose que les déplacements et les déformations vis à vis de la position d'équilibre du fil de contact restent petits. On limite l'étude aux mouvements du fil de contact contenu dans le plan défini par la verticale ascendante \vec{y} et la direction \vec{x} d'avancement du TGV.

Dans cette partie, nous étudions le fil de contact utilisé pour les lignes en courant alternatif 25 kV (dans la partie précédente du sujet il s'agit de lignes à courant continu 1,5 kV). Les lignes en courant alternatif sont actuellement les plus utilisées et sont celles ayant servi pour le dernier record de vitesse du TGV.

ρ masse volumique du fil de contact	D diamètre	E module d'Young	F_0 tension nominale
$8\,900 \text{ kg/m}^3$	14 mm	$120 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	2 000 daN

Données pour une caténaire en cuivre 25 kV alternatif.

2.2 Préambule sur la propagation des ondes

Pour déterminer la vitesse de propagation des ondes on étudie un mouvement harmonique de pulsation ω et pour les seules ondes progressives. Pour celles-ci le déplacement transverse $v(x, t)$ (déplacement à l'instant t selon \vec{y} d'un point situé à l'abscisse x sur la ligne de référence de la corde ou de la poutre) peut se mettre sous la forme ci-dessous :

$$v(x, t) = v^+(x - ct) = v_M \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \quad (\text{Équation 1})$$

Question 10 : Montrer par un schéma que c représente une vitesse de propagation et qu'il s'agit bien d'une onde progressive (se déplaçant dans le sens des x croissants).

Tournez la page S.V.P.

2.3 Corde vibrante

Sur la figure 5 est représenté un tronçon de corde soumis aux seuls efforts de cohésion : l'effort normal $N(x)$ porté par la tangente à la déformée de la ligne de référence est constant et vaut F , l'effort tranchant $T(x)$ est perpendiculaire à F . Ces deux efforts définissent l'action du tronçon x^+ sur x^- . L'angle θ est défini par $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$.

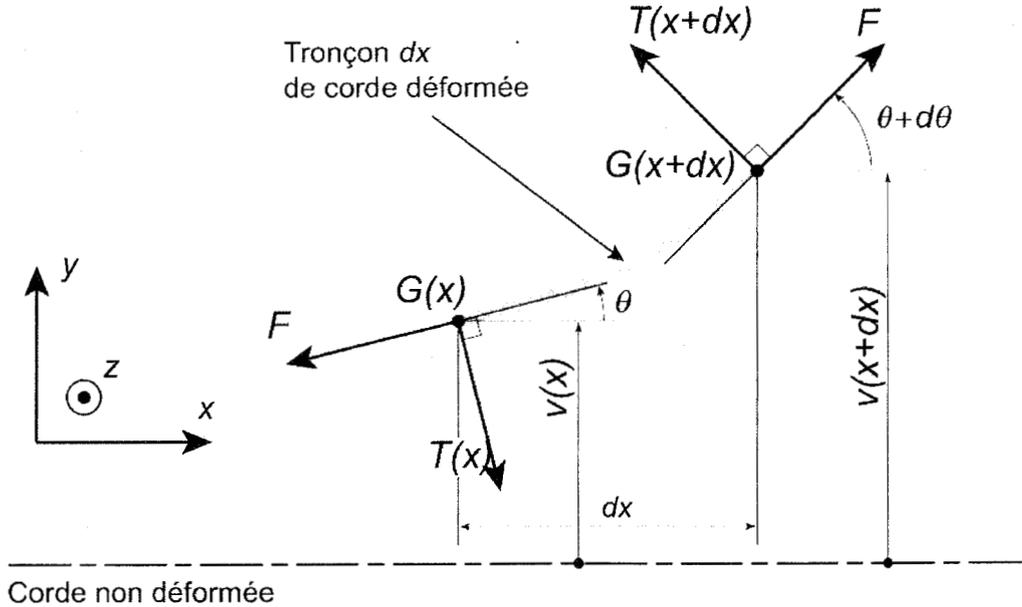


Figure 5 : Tronçon dx de corde vibrante

Question 11 : Expliquer l'absence de moment fléchissant.

Question 12 : Écrire l'équilibre dynamique du tronçon de fil dx en résultante selon \vec{y} et en moment autour de \vec{z} . En prenant θ petit, montrer que cela permet de déduire l'équation de mouvement (S est la section du fil) :

$$F \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{Équation 2})$$

Question 13 : En déduire la vitesse critique V_C^{Corde} due à la propagation des ondes pour le mouvement harmonique (Équation 1).

2.4 Poutre d'Euler-Bernoulli

Sur la figure 6 est représenté un tronçon de poutre soumis aux seuls efforts de cohésion : l'effort normal constant F , l'effort tranchant $T(x)$ et le moment fléchissant $M(x)$.

Comme pour le modèle de corde on définit $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$ où θ correspond à la rotation autour de \vec{z} de la section droite de la poutre en x .

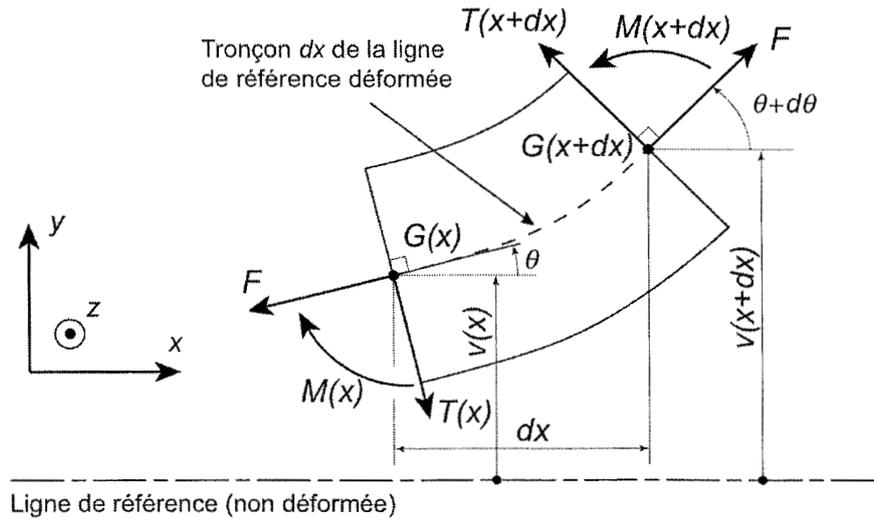


Figure 6 : Tronçon de poutre Euler Bernoulli

Question 14 : Que garantit en termes de déformation la relation $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$?

Question 15 : Donner la loi de comportement reliant le moment fléchissant M à la dérivée seconde de la flèche v . Le moment d'inertie de la section du fil de contact autour de l'axe (G, \bar{z}) est noté I .

Question 16 : Si on néglige l'inertie en rotation des sections droites, écrire l'équilibre dynamique du tronçon de poutre dx en résultante selon \bar{y} et en moment autour de \bar{z} . Montrer que la prise en compte de la réponse à la question précédente conduit à :

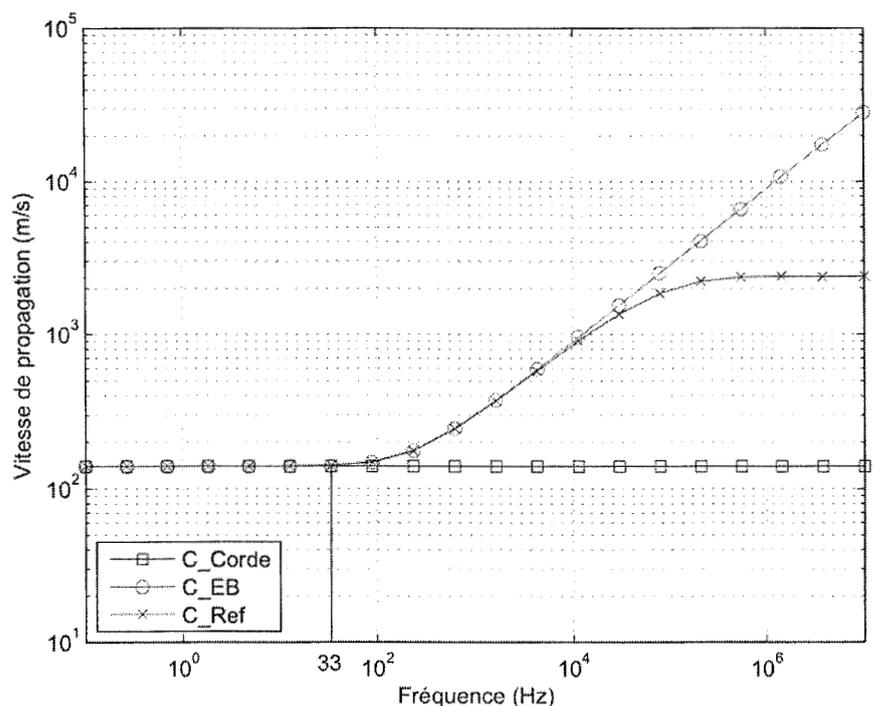
$$F \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{Équation 3})$$

Question 17 : En déduire la vitesse critique V_c^{EB} due à la propagation des ondes pour le mouvement harmonique (Équation 1).

2.5 Comparaison du modèle de corde et du modèle de poutre

La figure 7 représente l'évolution de la vitesse de propagation des ondes de flexion, en fonction de la fréquence d'excitation du mouvement harmonique, et ce pour la corde (C_Corde), la poutre mince (C_EB) et pour un modèle de poutre épaisse (C_Ref) qui sera considérée comme solution de référence.

Figure 7 : Comparaison des vitesses de propagation des ondes ($F = F_0$)



On retient les hypothèses suivantes :

- la vitesse du train doit rester de 50 km/h inférieure à la vitesse de propagation des ondes de flexion ;
- la valeur de F est voisine de F_0 .

Question 18 : Comparer les 3 modèles. Proposer une démarche du choix de la tension F pour une vitesse de croisière de 270 km/h .

Question 19 : Lors du dernier record de vitesse le TGV a atteint $574,8 \text{ km/h}$. Pour établir ce record la tension du fil de contact a été portée à $4\,000 \text{ daN}$. Commenter ce choix.

3 PRÉDICTION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA CATÉNAIRE

3.1 Objectif

La caténaire (figure 8) est un assemblage complexe (câble porteur, pendules, bras de rappels, ...) dont le comportement non-linéaire peut être étudié grâce à un modèle éléments finis.

Dans cette partie du sujet, on s'intéresse successivement à la modélisation par éléments finis du fil de contact seul et au calibrage de l'amortissement de ce modèle éléments finis pour l'ensemble de la caténaire.

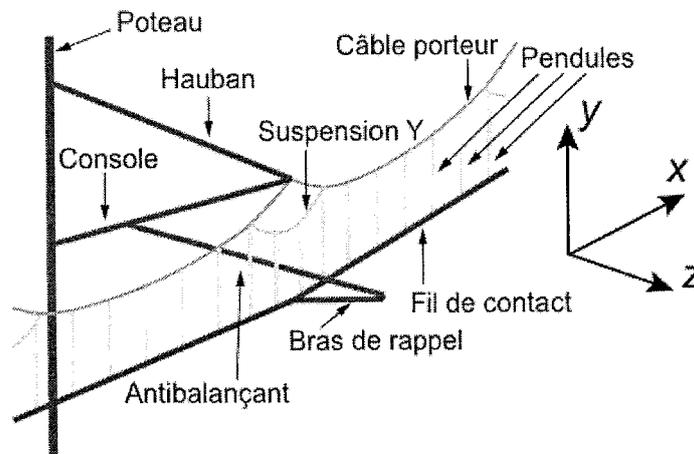


Figure 8 : Vue partielle du modèle éléments finis de la caténaire

3.2 Construction d'un élément fini de poutre

Afin de modéliser le fil de contact on propose d'utiliser des éléments à 2 nœuds ayant le comportement d'une poutre mince tendue dans le plan (\bar{x}, \bar{y}) et un comportement de corde tendue dans le plan (\bar{z}, \bar{x}) .

Ce choix permet d'éviter la discontinuité de pente au passage des pendules (plan (\bar{x}, \bar{y})) qui induirait, lors de la simulation du passage du pantographe, des sauts d'efforts non physiques. L'utilisation d'un modèle de corde, plutôt qu'un modèle de poutre, dans le plan (\bar{z}, \bar{x}) permet de limiter le nombre de degrés de liberté de l'élément sans nuire à son comportement. La torsion du fil est également négligée. Il ne reste ainsi plus que 4 degrés de liberté par nœud (figure 9).

La particularité de l'élément que l'on propose de "construire" est qu'il prend en compte l'effort de tension F dans sa formulation. Cette prise en compte de F revient à ne pas négliger le travail de F lors de l'allongement du fil suite à un déplacement perpendiculaire à l'axe du fil (et donc à l'axe \bar{x}).

Pour le comportement dynamique on ne prendra en compte que les effets dynamiques liés au déplacement transverse du fil : pas d'effet dynamique dans le sens longitudinal (parallèlement à l'axe \bar{x}).

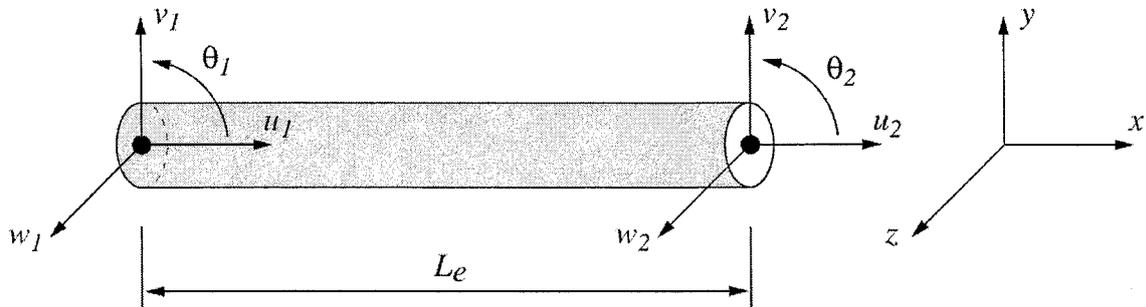


Figure 9 : Définition des degrés de libertés d'un élément

Pour cette partie, on retient les notations suivantes :

$u(x,t)$	déplacement longitudinal	S	section
$v(x,t)$	déplacement vertical selon \bar{y}	I	moment quadratique de la section, axe (G, \bar{z})
$w(x,t)$	déplacement transverse selon \bar{z}	E	module d'Young
$\theta(x,t)$	rotation de la section autour de \bar{z}	ρ	masse volumique
L_e	longueur de l'élément e	F	effort de tension appliqué
$\vec{g} = -g\vec{y}$	accélération de la pesanteur		

On rappelle que pour le modèle de poutre mince : $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$.

3.2.1 Modèle milieu continu

Question 20 : Écrire la contribution E_C^e de l'élément e à l'énergie cinétique galiléenne totale du modèle. L'inertie en rotation des sections sera négligée.

On donne ci-dessous la contribution E_D^e de l'élément e à l'énergie de déformation totale du modèle :

$$E_D^e = \frac{1}{2} \int_b^{t_e} ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + F \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (\text{Équation 4})$$

Question 21 : Justifier cette l'expression de E_D^e .

Question 22 : Exprimer le travail développé par la pesanteur sur l'élément e .

3.2.2 Modèle discret - Interpolation des déplacements

On propose l'interpolation suivante pour les déplacements le long de e :

- $u(x,t) = \psi_1(r)u_1(t) + \psi_2(r)u_2(t)$
- $v(x,t) = \psi_3(r)v_1(t) + \psi_4(r)\theta_1(t) + \psi_5(r)v_2(t) + \psi_6(r)\theta_2(t)$
- $w(x,t) = \psi_1(r)w_1(t) + \psi_2(r)w_2(t)$

avec $r = \frac{x}{L_e}$, et :

$$\begin{aligned} \psi_1(r) &= 1-r & \psi_2(r) &= r \\ \psi_3(r) &= 1-3r^2+2r^3 & \psi_5(r) &= 3r^2-2r^3 \\ \psi_4(r) &= L_e(r-2r^2+r^3) & \psi_6(r) &= L_e(-r^2+r^3) \end{aligned}$$

On peut alors écrire les déplacements et déformations sous la forme : $\underline{U}_e = \underline{N}_e \cdot \underline{q}_e$, $\underline{\varepsilon}_e = \underline{B}_e \cdot \underline{q}_e$

où \underline{N}_e et \underline{B}_e sont deux matrices et $\underline{q}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$, $\underline{U}_e = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$, $\underline{\varepsilon}_e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \end{Bmatrix}$.

Question 23 : Montrer que l'interpolation choisie permet bien d'avoir continuité de la pente (dans le plan (\vec{x}, \vec{y})) le long du fil de contact.

Question 24 : Préciser le contenu des matrices \underline{N}_e et \underline{B}_e .

3.2.3 Matrices et colonnes élémentaires

Question 25 : Calculer la colonne élémentaire des efforts généralisés dus à l'action de la pesanteur.

Question 26 : Montrer que la matrice de raideur élémentaire est décomposable en une somme de 3 matrices : \underline{K}_e^L provenant des déformations longitudinales, \underline{K}_e^F provenant de l'effort de tension F , \underline{K}_e^M provenant de la flexion. Exprimer, sans faire les calculs, ces matrices élémentaires en fonction de E, S, F, I, L_e et des termes de \underline{B}_e (ne pas développer les produits des lignes de \underline{B}_e entre elles).

3.3 Modélisation de l'amortissement

La caténaire est un système complexe dont il n'est pas aisé de modéliser l'amortissement. Pour une première approche on propose d'utiliser un modèle de Rayleigh dans lequel on retient une matrice d'amortissement \underline{C} proportionnelle à la matrice de raideur du modèle éléments finis : $\underline{C} = \beta \underline{K}$.

Pour définir la valeur du coefficient β on propose d'utiliser la mesure du soulèvement vertical d'un

bras de rappel lors du passage d'un TGV (figure 10).

L'évolution temporelle de ce soulèvement peut être divisée en trois phases :

- $t < t_0$: visualisation des ondes qui précèdent l'arrivée du pantographe ;
- $t \sim t_0$: présence d'un pic au moment du passage du pantographe ;
- $t > t_0$: oscillations libres de la caténaire dont la décroissance est déterminée par l'amortissement.

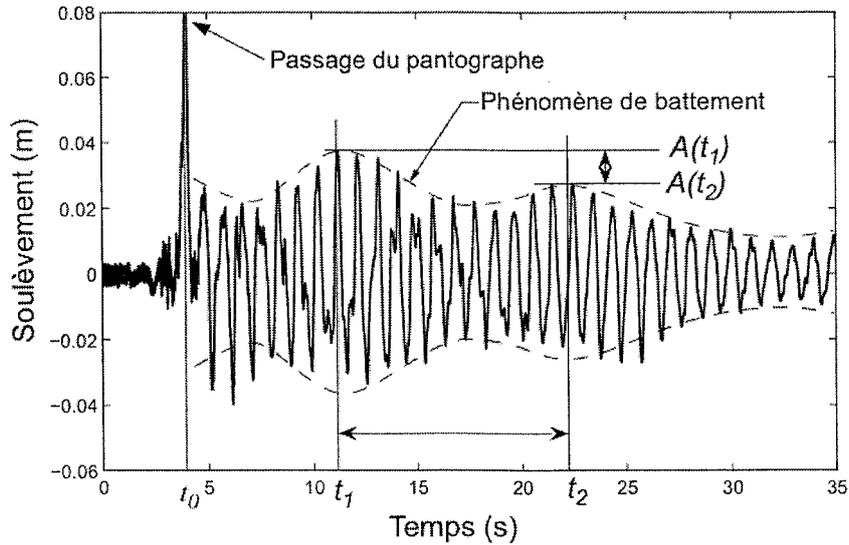
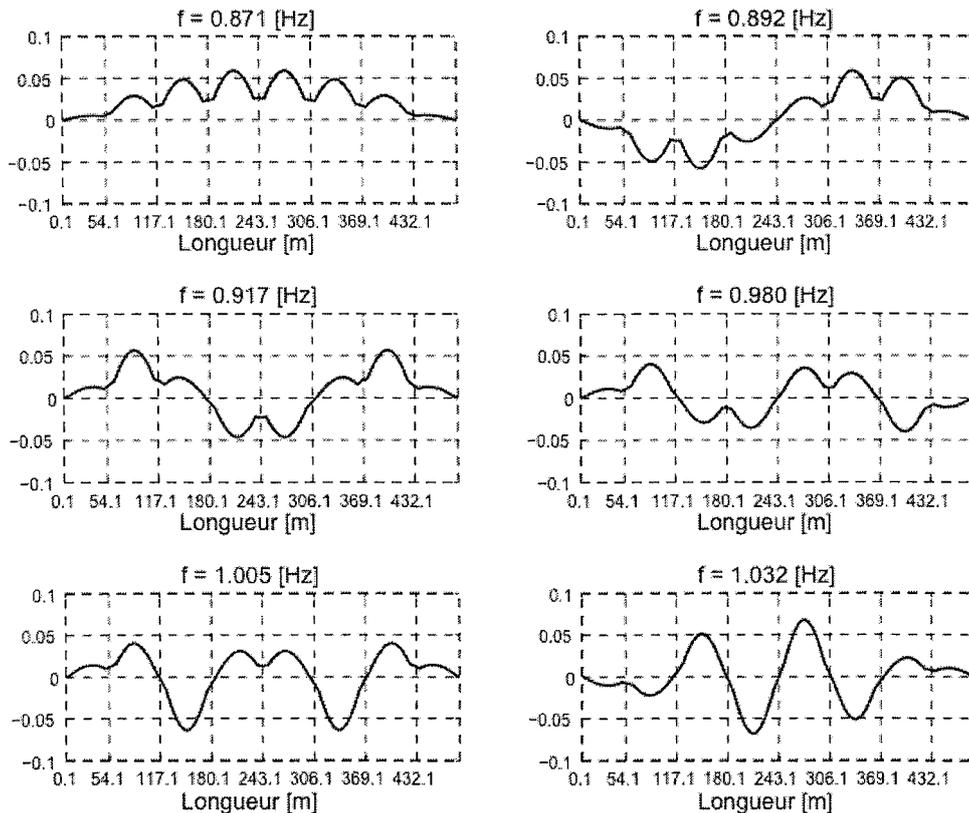


Figure 10 : Soulèvement d'un bras de rappel (vitesse pantographe = 300 km/h)

L'utilisation du modèle éléments finis (sans amortissement) permet le calcul de modes propres de la caténaire. Parmi les modes trouvés, ceux qui restent dans le plan vertical sont particulièrement sollicités par le passage du pantographe (figure 11).



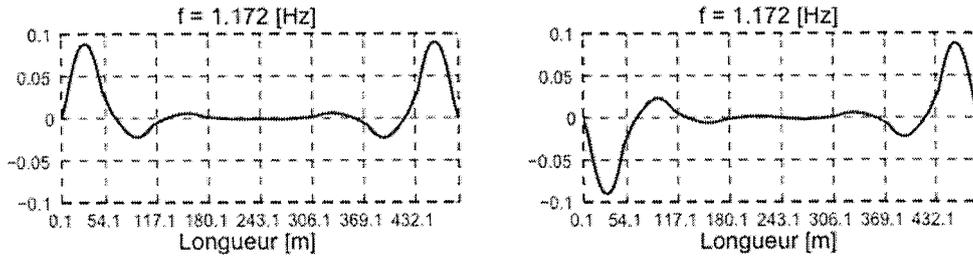


Figure 11 : Modèles éléments finis - Représentation des huit premiers modes (plan vertical)

Question 27 : D'où provient généralement le phénomène de battement ? Peut-on donner une piste d'explication à la présence du battement visible sur la figure 10.

L'équation de mouvement déduite du modèle éléments finis s'écrit sous la forme :

$$\underline{M}.\ddot{\underline{q}} + \underline{C}.\dot{\underline{q}} + \underline{K}.\underline{q} = \underline{F} \quad (\text{Équation 5})$$

où \underline{q} contient l'ensemble des degrés de liberté de la caténaire, \underline{M} , \underline{C} , \underline{K} sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du modèle éléments finis de la caténaire et \underline{F} est la colonne des efforts généralisés appliqués.

Soit \underline{X} une matrice contenant une collection de n modes propres (normés vis-à-vis de la matrice de masse \underline{M}) de la caténaire :

$$\underline{X} = [\underline{X}_1 \ \underline{X}_2 \ \dots \ \underline{X}_n] \quad \text{avec } \underline{X}_i \text{ un mode propre, } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Question 28 : Montrer que l'utilisation de la base modale contenue dans \underline{X} permet de passer de l'équation 5 à l'équation 6 où ξ_i désigne le taux d'amortissement modal pour le mode i . Que représentent les ω_i ? Relier les valeurs ξ_i à β et commenter la dépendance à ω_i .

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \ddot{x}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \underline{X}_i^T . \underline{F} \quad (\text{Équation 6})$$

La forte densité modale autour de 1 Hz suggère d'utiliser, pour déterminer β , un signal mono-fréquentiel $A(t)$ de fréquence $f_0 = 1\text{Hz}$. Ceci revient à se ramener, pour calibrer l'amortissement, à un système à un degré de liberté.

Le signal peut alors se mettre sous la forme : $A(t) = A_0 e^{-2\pi f_0 \xi_0 t} . \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$

Question 29 : Déterminer la valeur de ξ_0 à partir des données $A(t_1)$, $A(t_2)$, t_1 et t_2 présentes sur la figure 10. En déduire une valeur pour β .

$$\text{AN : } A(t_1) = 0,0275 \text{ m} \quad A(t_2) = 0,0375 \text{ m} \quad \Delta t = t_2 - t_1 = 10 \text{ s}$$

4 PRÉDICTION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DU PANTOGRAPHE

L'étude proposée concerne le pantographe CX développé par la société FAIVELEY TRANSPORT qui équipe le TGV. Elle va permettre de modéliser le grand cadre et le pantographe complet dont le mouvement est étudié dans le plan vertical (A, \vec{x}, \vec{y}) (figure 12).

4.1 Le modèle du grand cadre

4.1.1 Le modèle rigide du grand cadre

Dans une première étude, le modèle retenu est limité au bras inférieur 1 (AB) et au bras supérieur 2 (CBD) et à la bielle inférieure 3 (CE) (figure 12).

Les bras supérieur 1 et inférieur 2 ainsi que la bielle inférieure 3 sont considérés comme indéformables dans cette partie.

La liaison entre les deux bras 1 et 2 est une liaison pivot en B avec frottement fluide de coefficient d'amortissement C_2 .

La liaison entre le bras inférieur 2 et le bâti est une liaison pivot en A avec frottement fluide de coefficient d'amortissement C_1 .

L'action mécanique exercée par le fil de contact sur le pantographe est modélisable par un glisseur au point D de résultante $\vec{R}(\text{fil} \rightarrow 2) = -F \vec{y}$.

L'action mécanique exercée par le coussin pneumatique sur le pantographe est modélisable par un couple de moment $\vec{M}(A, \text{cpn} \rightarrow 1) = M \vec{z}$.

Le déploiement vertical du pantographe est noté $y(t) = \overline{AD} \cdot \vec{y}$;

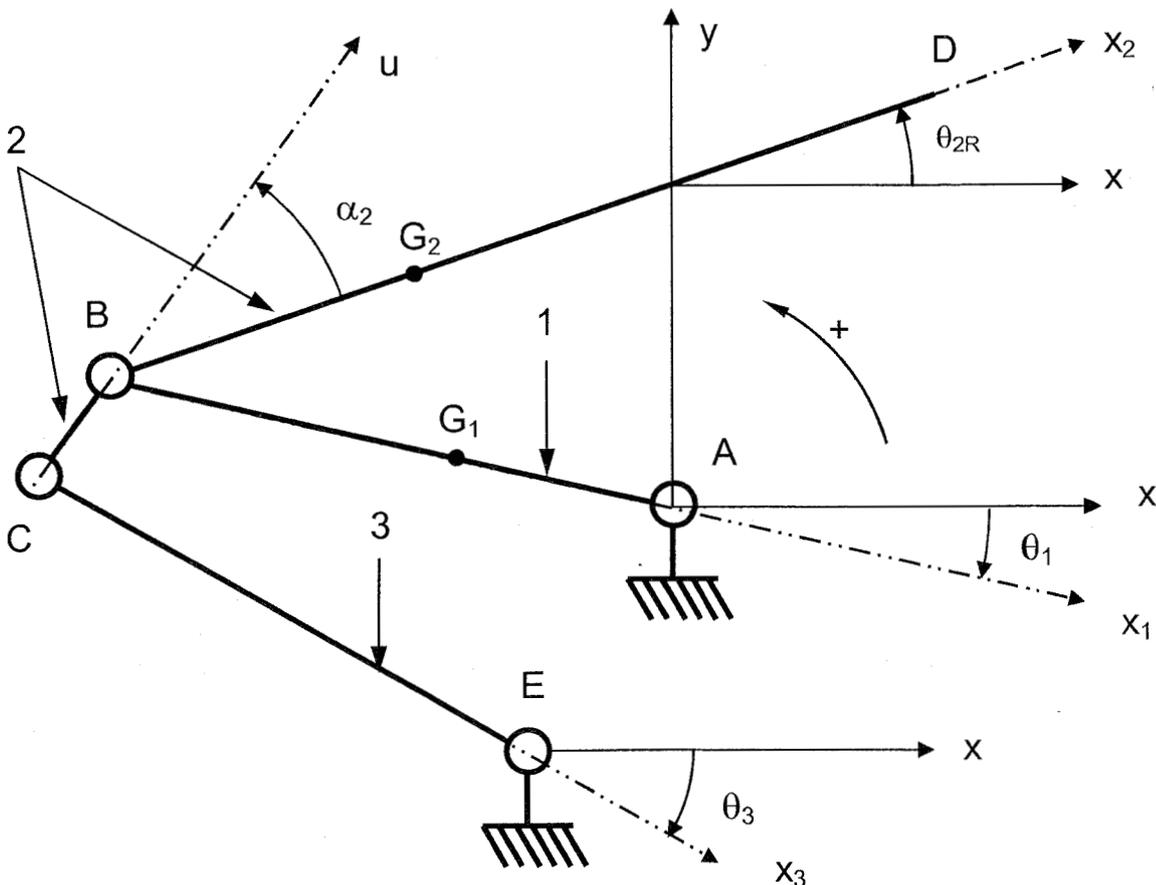


Figure 12 : Modèle cinématique du grand cadre (modèle rigide)

L'orientation des bras 1 et 2 et de la biellette 3 par rapport à l'axe \vec{x} sont respectivement notées θ_1 , θ_{2R} et θ_3 (figure 12).

Les caractéristiques cinétiques des différents solides sont fournies dans le tableau ci-dessous :

Solide	Centre d'inertie Masse	Caractéristiques d'inertie
Bâti 0 supposé galiléen	Longueur $\vec{EA} = e_x \vec{x} + e_y \vec{y}$ $e_x = 0,4 \text{ m}$ $e_y = 0,09 \text{ m}$	
Bras inférieur 1	G_1 centre d'inertie $\vec{AG}_1 = -L_{G1} \vec{x}_1$ $L_{G1} = 0,7 \text{ m}$ longueur $AB = L_1 = 1,4 \text{ m}$ masse $m_1 = 34,1 \text{ kg}$	I_1 moment d'inertie par rapport à (G_1, \vec{z}) $I_1 = 13,97 \text{ kg.m}^2$
Bras supérieur 2	G_2 centre d'inertie $\vec{BG}_2 = L_{G2} \vec{x}_2$ $L_{G2} = 0,9 \text{ m}$ longueurs $BD = L_2 = 1,825 \text{ m}$ $BC = L'_2 = 0,172 \text{ m}$ masse $m_2 = 20,96 \text{ kg}$ $\alpha_2 = -11,7^\circ$	I_2 moment d'inertie par rapport à (G_2, \vec{z}) $I_2 = 9,5 \text{ kg.m}^2$
Bielle inférieure 3	Longueur $CE = L_3 = 1,166 \text{ m}$	

Dans l'étude dynamique qui suit, on néglige l'inertie (masse et moment d'inertie) de la bielle inférieure 3.

Le système matériel E retenu est constitué du bras inférieur 1 et du bras supérieur 2.

Question 30 : Exprimer $T(E/R_G)$ énergie cinétique galiléenne du système matériel E en utilisant comme paramètres cinématiques uniquement les variables θ_{2R} et θ_1 et leurs dérivées temporelles.

Question 31 : Déterminer le travail extérieur galiléen agissant sur E.

Question 32 : Déterminer la puissance de dissipation visqueuse.

Question 33 : À l'aide d'une fermeture géométrique, exprimer θ_{2R} en fonction de θ_1 et des paramètres géométriques utiles sous la forme $A(\theta_1) \cos(\theta_{2R} + \alpha_2) + B(\theta_1) \sin(\theta_{2R} + \alpha_2) = C(\theta_1)$. Identifier $A(\theta_1)$, $B(\theta_1)$ et $C(\theta_1)$.

On fournit figure 13 le tracé de θ_{2R} en fonction de θ_1 .

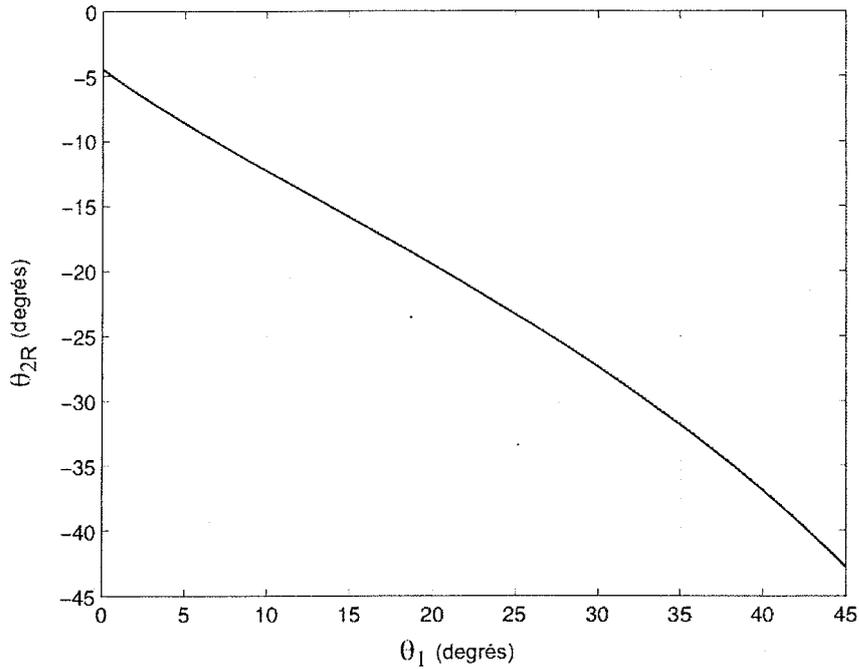


Figure 13 : Relation θ_{2R} en fonction de θ_1

Afin de déterminer analytiquement les équations de mouvement, on propose de simplifier la relation liant θ_{2R} et θ_1 et on retient $\theta_{2R} = a + b\theta_1$ notée (1).

Question 34 : Déterminer graphiquement les coefficients a et b pour $0 < \theta_1 < 35^\circ$.

Question 35 : Par la méthode de Lagrange, déterminer l'équation de mouvement du pantographe $L\theta_1$ notée (2). La prise en compte de la relation géométrique (1) se fera grâce à un multiplicateur de Lagrange noté λ .

L'utilisation de la méthode de Lagrange pour le paramètre θ_{2R} conduit à l'équation (3) suivante :

$$-m_2L_1L_{G_2} \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) \ddot{\theta}_1 + (I_2 + m_2L_{G_2}^2) \ddot{\theta}_{2R} + m_2L_1L_{G_2} \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) \dot{\theta}_1^2 + m_2gL_{G_2} \cos \theta_{2R} - C_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R}) - \lambda = -FL_2 \cos \theta_{2R}$$

Le point de fonctionnement P_0 du pantographe est défini par : $P = P_0 + \delta P$ où $\delta P(\delta M, \delta F, \delta \theta_1, \delta \theta_{2R})$ et $M = M_0 + \delta M$ $F = F_0 + \delta F$ $\theta_1 = \theta_{10} + \delta \theta_1$ $\theta_{2R} = \theta_{2R0} + \delta \theta_{2R}$.

Après linéarisation autour du point de fonctionnement P_0 des équations (2) et (3) on obtient le système d'équations suivantes noté (E1) :

$$\begin{cases} (I_1 + m_1L_{G_1}^2 + m_2L_1^2) \ddot{\theta}_1 - m_2L_1L_{G_2} \cos(\theta_{10} - \theta_{2R0}) \ddot{\theta}_{2R} + (C_1 + C_2) \dot{\theta}_1 - C_2 \dot{\theta}_{2R} + [(m_1gL_{G_1} + m_2gL_1 + F_0L_1) \sin \theta_{10}] \theta_1 + b\lambda = M + FL_1 \cos \theta_{10} \\ -m_2L_1L_{G_2} \cos(\theta_{10} - \theta_{2R0}) \ddot{\theta}_1 + (I_2 + m_2L_{G_2}^2) \ddot{\theta}_{2R} - C_2 \dot{\theta}_1 + C_2 \dot{\theta}_{2R} - [(m_2gL_{G_2} + F_0L_2) \sin \theta_{2R0}] \theta_{2R} \\ - \lambda = -FL_2 \cos \theta_{2R0} \end{cases}$$

Par souci de simplifications des notations, dans le système (E1), les variables θ_1, θ_{2R}, F et M représentent en fait les variations de ces grandeurs autour du point de fonctionnement P_0 .

Question 36 : Mettre le système d'équations (E1) sous la forme $[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\}$ avec $\{X\}^T = \langle \theta_1, \theta_{2R}, \lambda \rangle$. Identifier les matrices $[M], [C], [K]$ et la colonne $\{F\}$.

Question 37 : Exprimer $\theta_1(p)$ et $\theta_{2R}(p)$ en fonction de $F(p)$ et des paramètres utiles. En déduire l'expression du déploiement vertical $Y(p)$.

On fournit figure 14 la réponse harmonique de $|H(p)| = \left| p^2 \frac{Y(p)}{F(p)} \right|$ en fonction de la fréquence f .

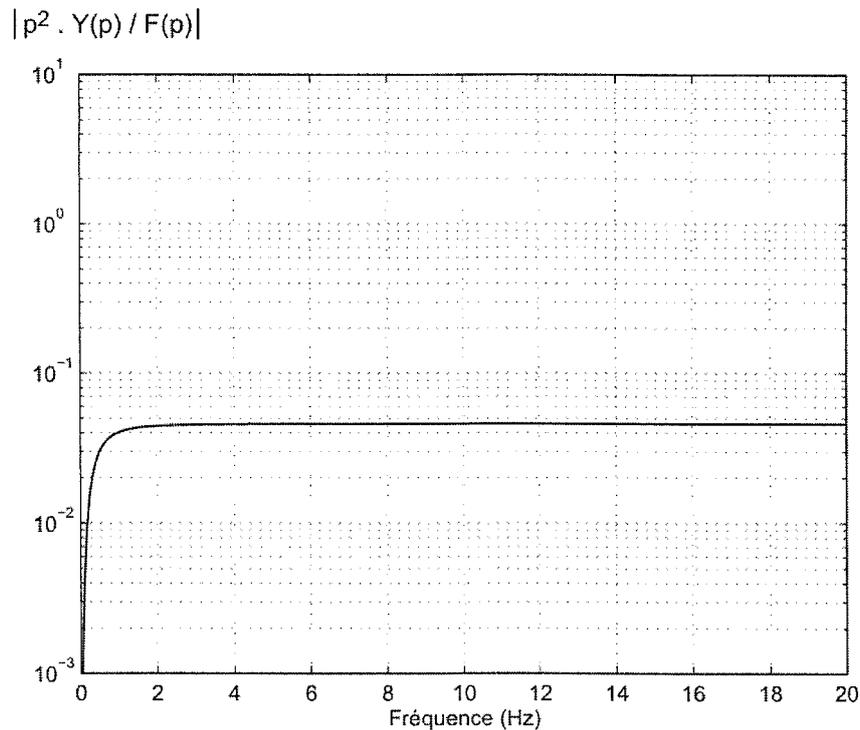


Figure 14 : Réponse harmonique en fonction de la fréquence

Question 38 : Le système proposé présente-t-il une ou plusieurs pulsations propres réelles ? Comment peut-on expliquer la forme de la fonction de transfert donnée figure 14 ?

4.1.2 Validation du modèle rigide du grand cadre

Afin de valider le modèle du grand cadre rigide, on procède à une série d'essais de type sinus balayés à effort constant soit $F(t) = F_0 \sin \omega t$.

On fournit, figure 15, la réponse expérimentale harmonique de $|H(p)| = \left| p^2 \frac{Y(p)}{F(p)} \right|$ en fonction de la fréquence f pour $F_0 = 100 \text{ N}$.

$$|p^2 \cdot Y(p) / F(p)|$$

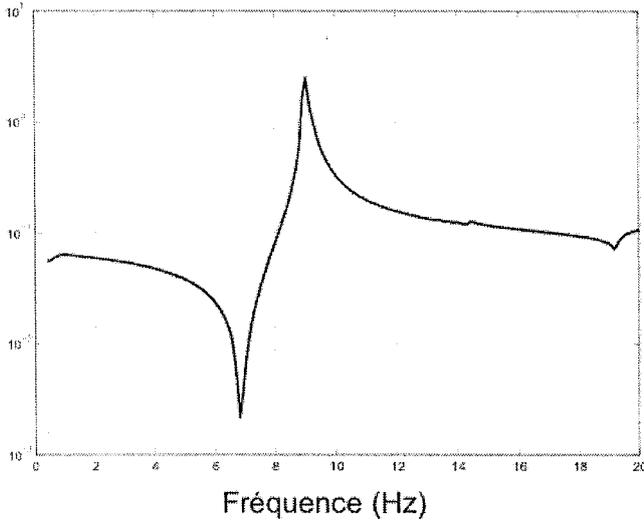


Figure 15 : Réponse expérimentale harmonique

Question 39 : Conclure quant à la corrélation entre les essais réalisés et le modèle rigide du grand cadre.

4.1.3 Le modèle souple du grand cadre

Afin de prendre en compte la déformation du grand cadre du pantographe, on propose de différencier l'orientation réelle θ_2 (figure 16) du bras 2 de l'orientation θ_{2R} déduite de la relation géométrique (1) obtenue pour le grand cadre rigide.

La souplesse du grand cadre est alors prise en compte par l'introduction du coefficient de raideur $K_2 = 68000 \text{ N.m.rad}^{-1}$ reliant θ_2 et θ_{2R} .

Le travail des efforts dû à la raideur K_2 s'écrit alors : $W_{K_2} = \frac{1}{2} K_2 (\theta_2 - \theta_{2R})^2$. La figure 16 représente le modèle souple du grand cadre.

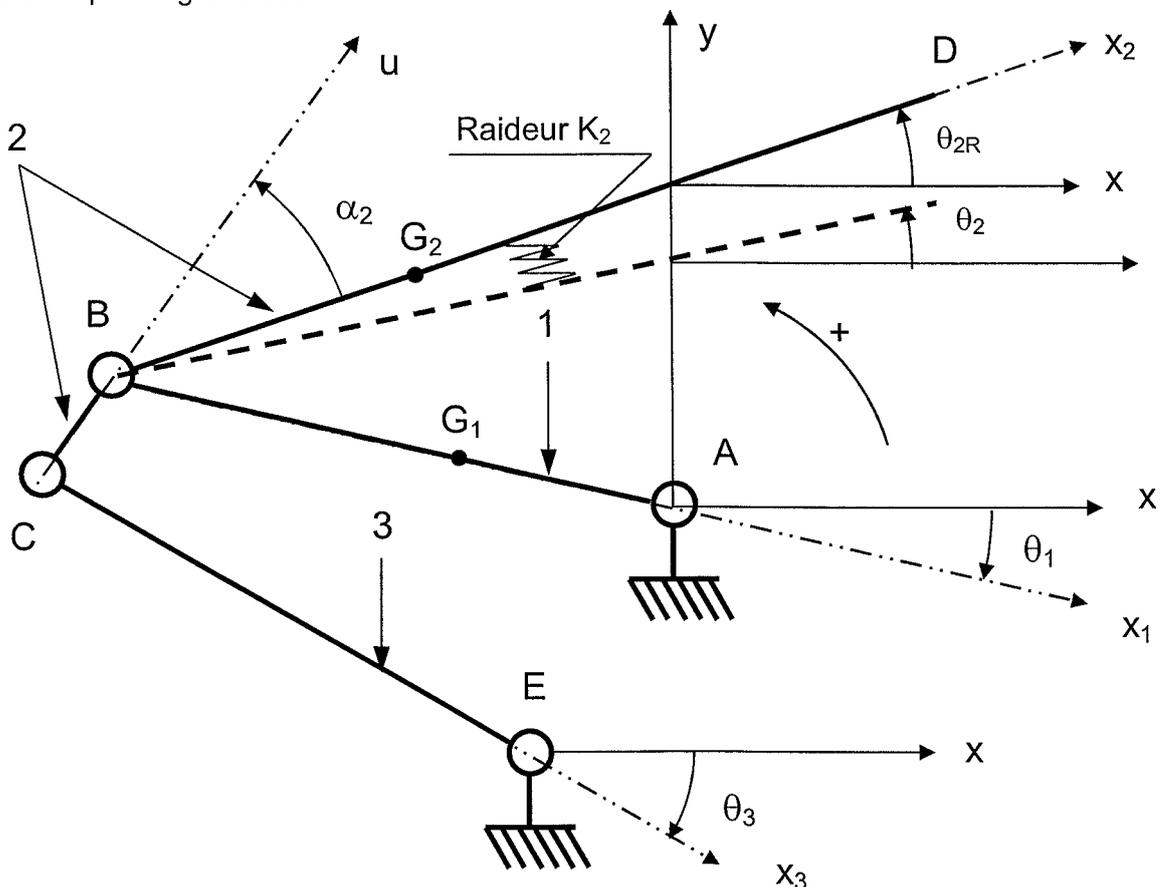


Figure 16 : Modèle souple du grand cadre avec raideur K_2

Question 40 : Par la méthode de Lagrange compléter l'équation (2) et déterminer l'équation de mouvement du pantographe $L\theta_1$ notée (4).

Question 41 : Par la méthode de Lagrange compléter l'équation (3) et déterminer l'équation de mouvement du pantographe $L\theta_2$ notée (5).

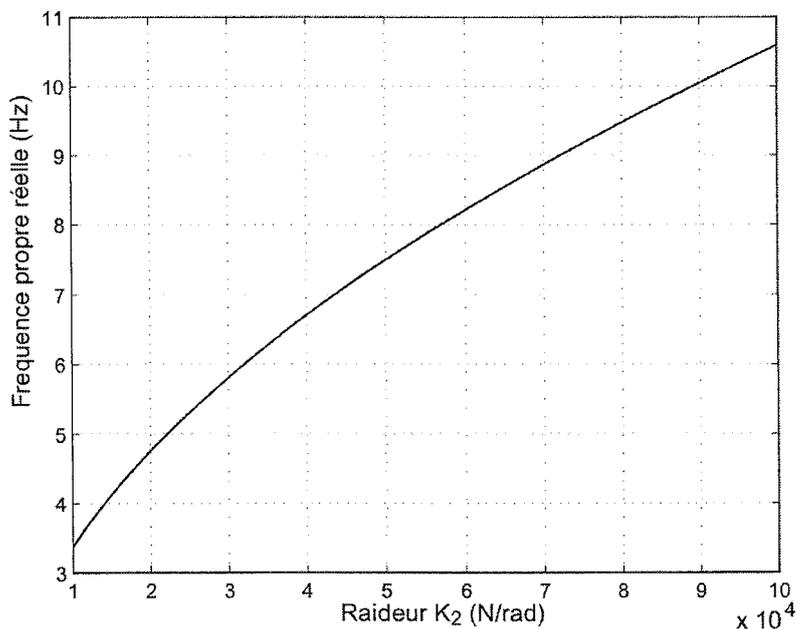
Question 42 : Exprimer le système d'équations (4) (5) sous la forme (E2) suivante :

$$(E2) \quad [M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad \text{où } \{X\}^T = \langle \theta_1, \theta_2 \rangle$$

Le système à deux degrés de liberté obtenu possède deux fréquences propres réelles. La plus basse (inférieure à 1 Hz) est très amortie, le seconde plus élevée est très dépendante de la valeur de K_2 et correspond au pic à 9 Hz observé sur la figure 15.

Figure 17 : Fréquence propre réelle en fonction de K_2 .

Question 43 : Déterminer la relation liant K_2 à la seconde fréquence propre. Choisir une valeur de K_2 en vous aidant de la figure 17.

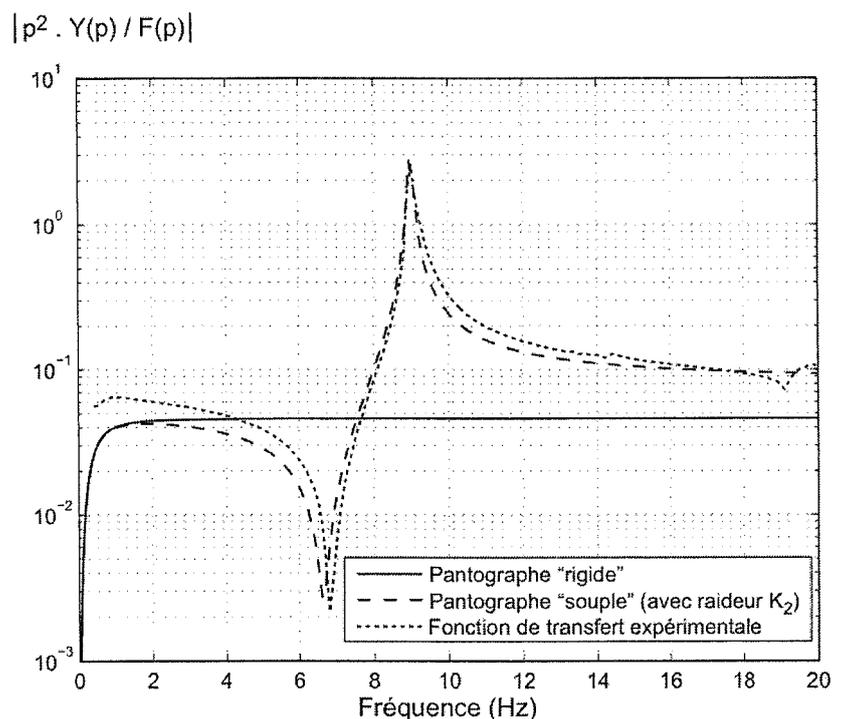


On fournit figure 18 l'allure de $|H(p)| = \left| p^2 \frac{Y(p)}{F(p)} \right|$ en fonction de la fréquence pour $F_0=100N$.

Figure 18 : Réponse fréquentielle de

$$|H(p)| = \left| p^2 \frac{Y(p)}{F(p)} \right|$$

Question 44 : Conclure quant à la corrélation entre les essais et le modèle souple du grand cadre (pantographe sans archet).



4.2 Modèle multi corps du pantographe complet

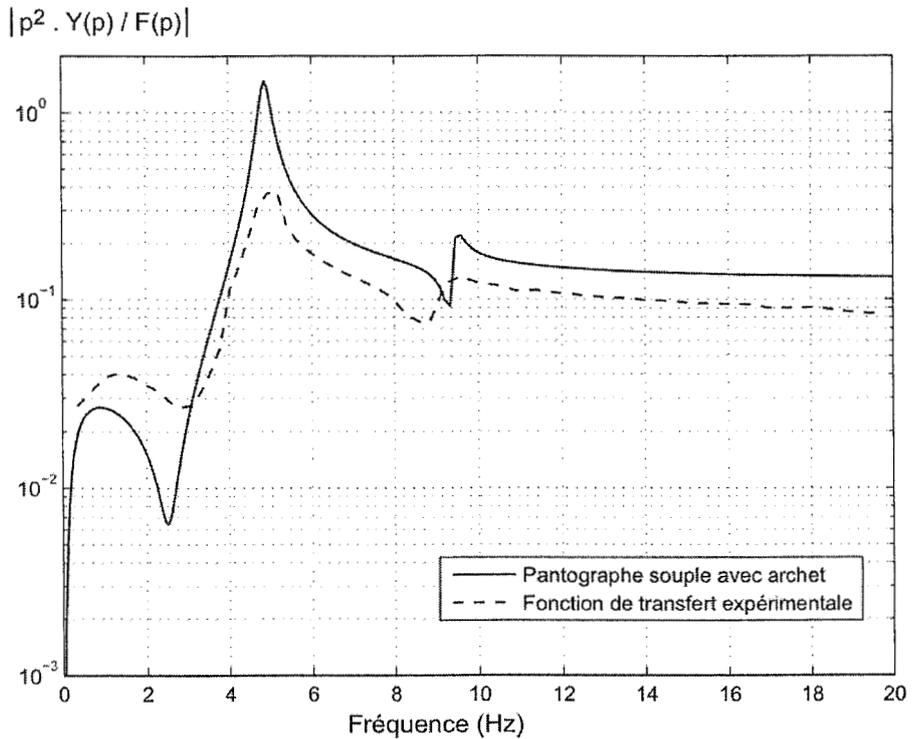
Le modèle multicorps présenté ici prend maintenant en compte, en plus du grand cadre souple étudié précédemment, l'archet et les boîtes à ressorts. On intègre donc le comportement de l'archet au modèle souple du grand cadre.

On fournit figure 19 :

- la réponse fréquentielle issue du modèle « grand cadre flexible avec archet » ;
- la réponse fréquentielle expérimentale du pantographe complet.

Figure 19 : Réponses fréquentielles de

$$|H(p)| = \left| p^2 \frac{Z(p)}{F(p)} \right|$$



Question 45 : Conclure quant à la validité du modèle « grand cadre souple avec archet ».

En vue de développer un pantographe asservi et afin de disposer d'un modèle plus proche de l'expérience, la SNCF a mis en œuvre le modèle « 3 masses » représenté figure 20.

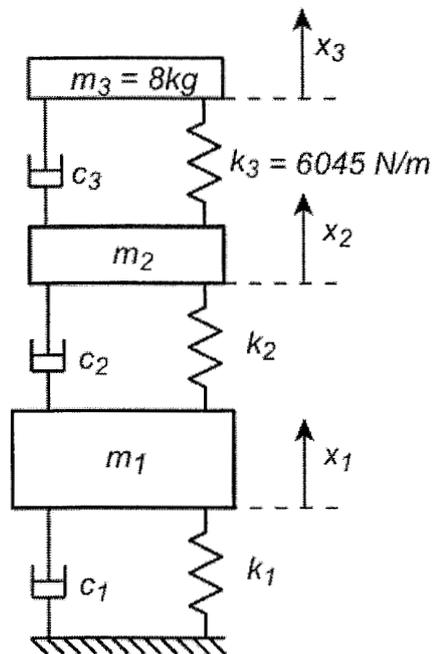


Figure 20 : Modèle « 3 masses »

Question 46 : Exprimer l'équation de mouvement de ce système sous la forme suivante :

$$[M][\ddot{X}] + [C][\dot{X}] + [K][X] = [F] \text{ avec } \{X\}^T = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$$

x_1, x_2 et x_3 caractérisent les déplacements par rapport aux positions d'équilibre des masses m_1, m_2 et m_3 .

k_1, k_2 et k_3 caractérisent les raideurs (en $N.m^{-1}$) du pantographe complet

c_1, c_2 et c_3 caractérisent les coefficients d'amortissement (en $N.m^{-1}.s$) du pantographe complet.

On fournit figure 21 :

- la réponse fréquentielle issue du modèle « 3 masses » ;
- la réponse fréquentielle expérimentale du pantographe complet.

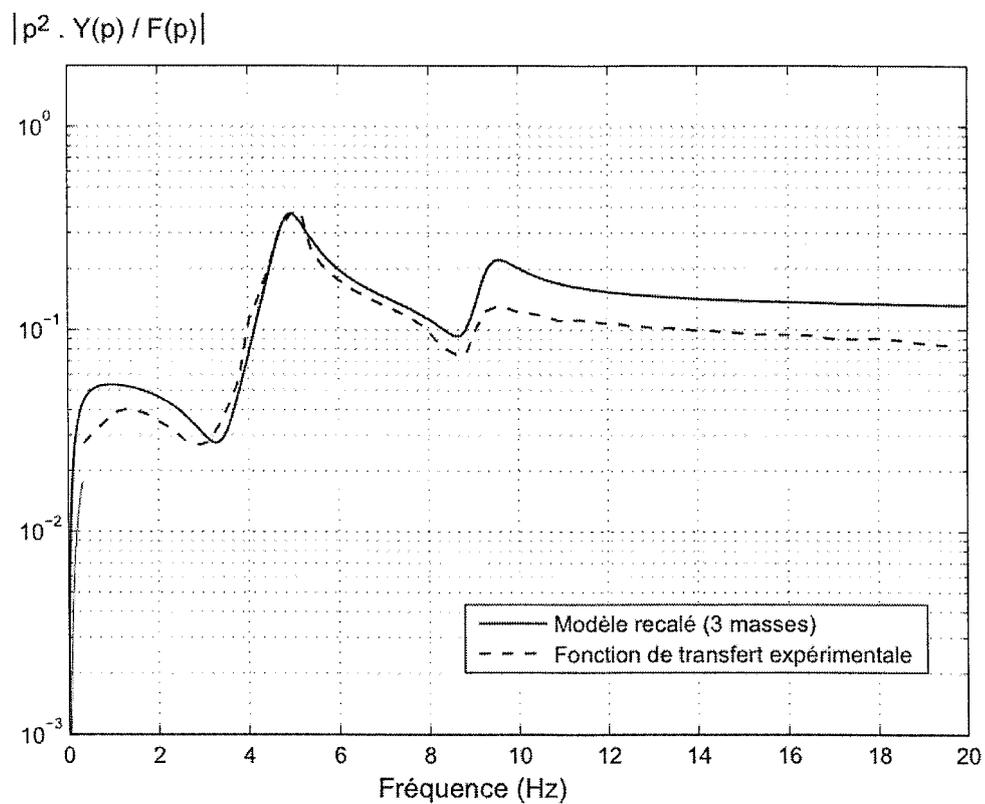


Figure 21 : Réponse en fréquence du système « 3 masses »

Question 47 : Conclure quant à la validité du modèle « 3 masses ».

5 VALIDATION DE LA FONCTION « COMMANDER LA MONTÉE ET LE MAINTIEN DU PANTOGRAPHE »

5.1 Les modes de fonctionnement

Le schéma pneumatique, fourni figure 22, montre les différents modules :

- le module de pilotage (6, 7, 8, 10) et la carte électronique 9 ;
- le module de secours (1, 2, 3, 4, 5).

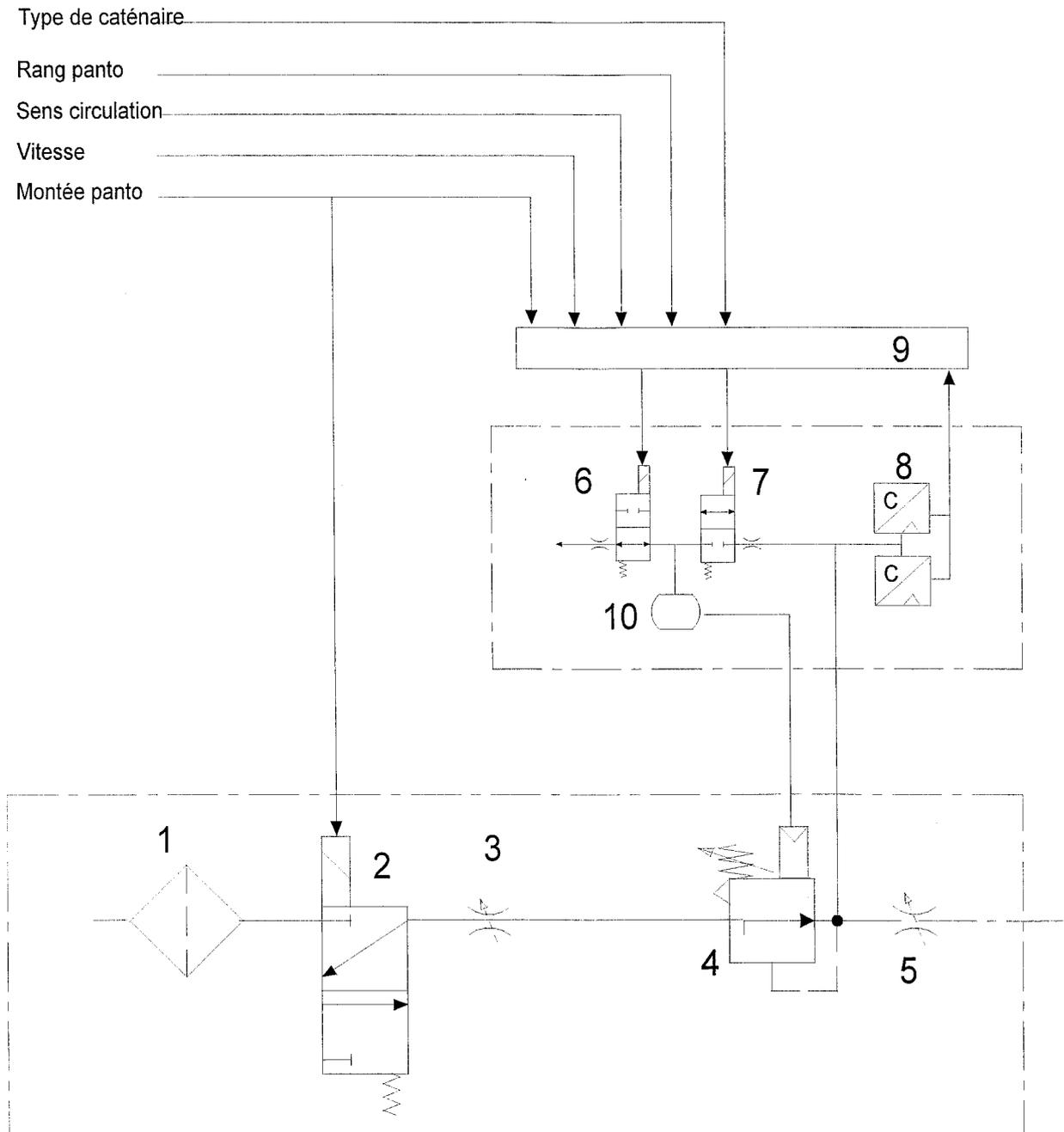


Figure 22 : Commande pneumatique du pantographe

Le module pneumatique de pilotage comporte 2 micro-électrovalves 6 et 7, deux transmetteurs de pression 8 et un réservoir 10. Ce module mesure la pression en sortie du régulateur et alimente ou purge l'étage de pneumatique de pilotage du régulateur en fonction des consignes transmises par la carte électronique.

La carte électronique 9 calcule la pression de consigne en fonction des informations qu'elle reçoit. Elle compare la pression dans le coussin mesurée par le transmetteur de pression 8 à cette pression de consigne calculée.

En fonction de l'écart mesuré, elle commande l'excitation de l'électrovalve d'admission 7 ou le relâchement de l'électrovalve d'échappement 6. Le tarage de l'étage de régulation du régulateur 4 est alors issu de l'effort exercé par le ressort de tarage auquel s'ajoute l'effort pneumatique de pilotage issu de 6 et 7. Ainsi la pression de consigne est ajustée à la pression calculée. Le réservoir permet d'atténuer les amplitudes de pression occasionnées par les actions des valves dans la chambre de pilotage et contribue ainsi à augmenter la précision de la régulation.

5.2 Fonctionnement en mode normal

En fonctionnement normal, les 2 modules pneumatiques sont opérationnels. En cas de non fonctionnement du module de pilotage, le module de régulation standard reste opérationnel. Il assure, en secours un fonctionnement en mode dégradé du pantographe.

Question 48 : L'ordre de montée du pantographe est donné. Expliquer le fonctionnement du système.

5.3 Fonctionnement en mode secours

Question 49 : Expliquer le fonctionnement en cas de panne du module de pilotage.