

SESSION 2009

---

**CONCOURS EXTERNE  
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES  
Option C : PHYSIQUE APPLIQUÉE**

**PROBLÈME DE PHYSIQUE APPLIQUÉE**

Durée : 6 heures

---

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

## Réfrigération magnétique

La réfrigération magnétique autour de la température ambiante est une nouvelle technologie prometteuse de fabrication du froid car elle permet de réaliser des systèmes de réfrigération ou de climatisation à haute efficacité énergétique et n'utilisant pas de gaz à effet de serre ou destructeurs de la couche d'ozone. Elle s'appuie sur les matériaux à effet magnétocalorique (EMC) géant. L'EMC est une propriété intrinsèque des matériaux magnétiques qui se traduit par une augmentation ou une diminution de leur température lors de leur aimantation ou désaimantation adiabatiques. Il est maximal autour de la température d'ordre/désordre (température de Curie pour les ferromagnétiques).

On a donc la possibilité de réaliser grâce à un cycle magnétique le cycle équivalent d'une machine thermique classique d'autant plus que certains matériaux possèdent un effet magnétocalorique géant autour de la température ambiante. La figure 1 illustre l'équivalence entre un cycle thermodynamique classique et un cycle magnétothermique.

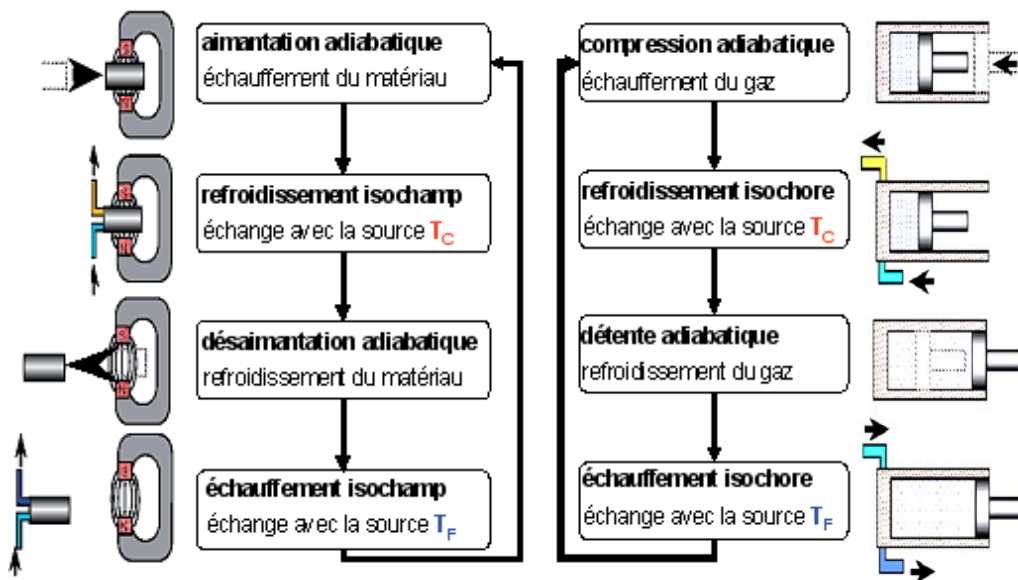


Figure 1 : Equivalence entre un cycle thermodynamique classique et un cycle magnétothermique ( $T_C$  : source chaude,  $T_F$  source froide)

Ce problème concerne l'étude d'un système de réfrigération à aimants permanents de faible puissance. Il comporte quatre parties indépendantes :

- Partie I : Etude de la source de champ et du cycle magnétique d'aimantation et de désaimantation
- Partie II : Entraînement de la source de champ
- Partie III : Etude du matériau magnétocalorique et du cycle thermique de réfrigération
- Partie IV : Régulation de la température d'une enceinte réfrigérante mettant en œuvre ce système.

Une annexe est fournie à la fin du document. Elle permet de définir les notations considérées dans le texte et de rappeler les équations de Maxwell et des milieux continus. Elle rappelle également certains calculs vectoriels et donne les tableaux des transformés de Fourier et de Ziegler et Nichols nécessaires pour la partie IV

## PARTIE I

### Eude de la source de champ magnétique et du cycle d'aimantation et de désaimantation

La source de champ est un cylindre d'Halbach double constitué de deux cylindres creux concentriques à l'intérieur desquels sera placé le matériau à effet magnétocalorique.

Un cylindre d'Halbach idéal est une structure magnétique spécifique, constituée d'un aimant permanent dont l'aimantation d'amplitude constante tourne dans la section droite du cylindre de manière continue et crée un champ magnétique uniforme dans sa cavité. La figure I.1 donne une description de cette structure idéale ainsi que celle d'une structure constituée d'un assemblage de blocs d'aimants permettant une réalisation pratique de ce cylindre. L'utilisation d'une structure de Halbach double (Figure I.1) est intéressante car c'est une structure compacte qui permet d'une part de créer un champ magnétique important à l'intérieur et de le faire varier par simple rotation d'un des deux cylindres sans bouger le matériau actif à effet magnétocalorique.

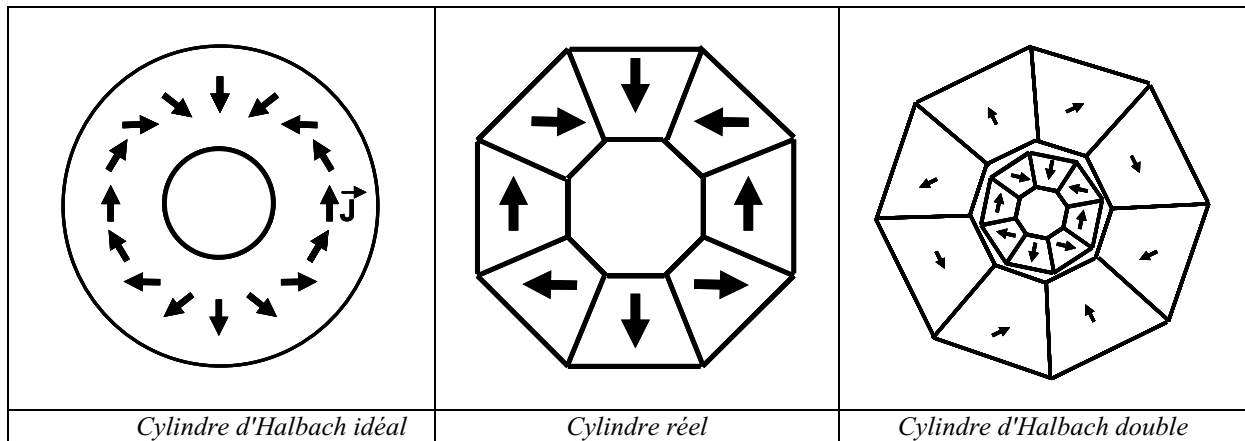


Figure I.1 : Structure de la source de champ étudiée

Dans cette partie nous cherchons tout d'abord à déterminer le champ magnétique créé au centre du cylindre d'Halbach intérieur. Nous dimensionnerons ensuite le cylindre extérieur pour imposer un champ magnétique donné et assurer le cycle d'aimantation et désaimantation. Puis nous calculerons les forces et les couples engendrés entre le matériau et la source de champ et entre les deux cylindres. Nous nous placerons dans le cas où le système est suffisamment long pour négliger les effets d'extrémités. Dans ces conditions, toutes les grandeurs mises en jeu sont supposées invariantes suivant cette longueur.

Les définitions et les notations des grandeurs magnétiques sont détaillées dans l'annexe. Nous rappelons que :

- le champ d'induction magnétique ou induction magnétique est noté  $\vec{B}$ ,
- le champ d'excitation magnétique ou champ magnétique est noté  $\vec{H}$ ,
- la polarisation magnétique est notée  $\vec{J}$ .

Ces trois grandeurs sont liées par la relation :  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$

### I.1 Cylindre d'Halbach idéal

Nous nous intéressons à une structure d'Halbach idéale constituée d'un cylindre unique ayant un rayon intérieur  $R_{int}$ , un rayon extérieur  $R_{ext}$  et une longueur  $L$  supposée infinie suivant l'axe  $z$ . La polarisation magnétique  $\vec{J}$  a un module constant  $J_0$  et tourne progressivement dans la section du cylindre comme l'indique la figure I.2. Cette structure permet de créer un champ magnétique uniforme dans la cavité.

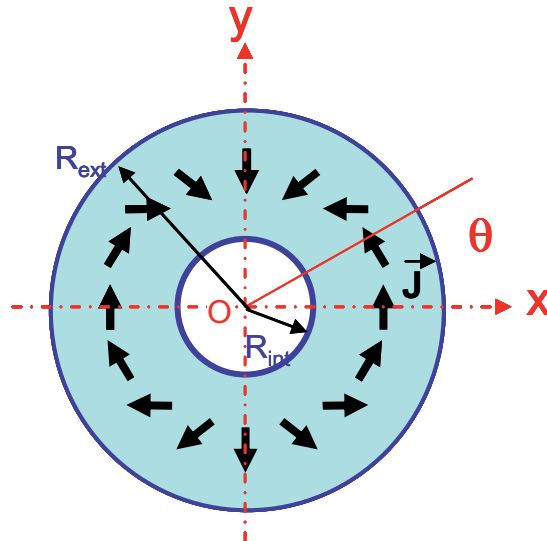


Figure I.2 : Cylindre d'Halbach idéal et notation

**Q. 1** Tracer intuitivement les lignes équiflux dans la cavité du cylindre d'Halbach.

**Q. 2** Comment sont elles : concentrées au centre, à l'extérieur, équidistantes ?

**Q. 3** Montrer qu'en tout point de l'espace on a :  $\text{Rot} \vec{H} = \vec{0}$

**Q. 4** En déduire que le champ magnétique dérive d'un potentiel scalaire et que sa composante est nulle sur l'axe  $z$  (voir annexe pour les équations de Maxwell et le calcul vectoriel).

**Q. 5** En se plaçant dans un repère cylindrique noté  $(O, \vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , vérifier sur trois points judicieusement choisis que la polarisation magnétique  $\vec{J}$  s'exprime en fonction de l'angle  $\theta$  par la relation (I.1) suivante :

$$\vec{J} = (-\sin \theta \vec{u}_R + \cos \theta \vec{u}_\theta) J_0 \quad (\text{I. 1})$$

#### a) Analogie aimantation et charges magnétiques fictives

Afin de calculer le champ magnétique créé par le cylindre d'Halbach en son centre, nous allons nous appuyer sur l'approche coulombienne. Cette dernière consiste à assimiler un aimant polarisé uniformément à un volume chargé en surface et en volume de charges magnétiques fictives de densités  $\sigma^*$  et  $\rho^*$  qui s'expriment en fonction de la polarisation magnétique  $\vec{J}$  par les relations (I.2) et (I.3). Le problème se traite alors en établissant une analogie avec les lois de l'électrostatique.

$$\sigma^* = \vec{J} \cdot \vec{n} \quad (\text{I. 2})$$

$$\rho^* = -\text{div}(\vec{J}) \quad (\text{I. 3})$$

Où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface du volume et dirigé vers l'extérieur

**Q. 6 Déterminer la charge surfacique équivalente  $\sigma^*_{\text{int}}$  sur la face interne du cylindre.**

**Q. 7 Montrer que la charge surfacique équivalente  $\sigma^*_{\text{ext}}$  sur la face externe du cylindre vaut  $-\sigma^*_{\text{int}}$ .**

**Q. 8 Déterminer la charge volumique équivalente  $\rho^*$  (voir annexe pour le calcul vectoriel).**

b) Calcul de l'induction magnétique créée par les charges fictives : analogie entre l'électrostatique et la magnétostatique

On cherche à déterminer l'induction magnétique  $\vec{B}$  créée par ces charges fictives dans la cavité du cylindre d'Halbach. Pour ce faire, nous allons utiliser les équations de l'électrostatique (voir annexe) en s'appuyant sur l'analogie magnétique / électrostatique suivante :

- l'induction magnétique  $\vec{B}$  est équivalente à l'induction électrique  $\vec{D}$ ,
- le champ magnétique  $\vec{H}$  est équivalent au champ électrique  $\vec{E}$ .
- les charges magnétiques surfaciques  $\sigma^*$  sont équivalentes aux charges électriques surfaciques  $\sigma$ .
- les charges magnétiques volumiques  $\rho^*$  sont équivalentes aux charges électriques volumiques  $\rho$ .
- la perméabilité du vide  $\mu_0$  est équivalente à la permittivité du vide  $\epsilon_0$ .

**Q. 9 Ecrire l'équation de Maxwell équivalente qui permet de relier  $\vec{B}$  à  $\rho^*$ .**

b-1) Calcul du champ créé par les charges surfaciques

On considère deux cylindres 1 et 2 infiniment longs suivant l'axe OZ de centre  $O_1$  et  $O_2$ . Ces cylindres sont uniformément chargés à  $\rho_1 = +\rho_0^*$  et  $\rho_2 = -\rho_0^*$  et placés comme l'indique la figure 3 suivante. On notera  $d$  la distance entre  $O_1$  et  $O_2$ .

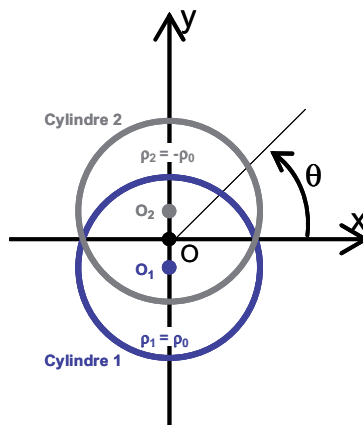


Figure I.3 : Superposition de deux cylindres uniformément chargés

**Q. 10 Déterminer les charges volumiques résultantes de la superposition de ces deux cylindres.**

**Q. 11 Montrer que l'on peut assimiler ce système à une surface cylindrique de rayon R ayant une densité de charge  $\sigma$  telle que :**

$$\sigma = \sigma_0 \sin \theta = -d\rho_0 \sin \theta \quad (\text{I. 4})$$

**Q. 12 Comparer  $\sigma$  et  $\sigma_{\text{int}}^*$ .**

On considère un point M situé à l'intérieur de l'intersection des deux cylindres.

**Q. 13 En appliquant le théorème de Gauss, déterminer les inductions magnétiques  $\vec{B}_{1,0}$  et  $\vec{B}_{2,0}$  créées respectivement en ce point par la charge cylindrique  $\rho_1$  et la charge cylindrique  $\rho_2$ .**

**Q. 14 En appliquant le théorème de superposition, déterminer l'induction magnétique  $\vec{B}_\sigma$  créée en M par  $\sigma$ . Montrer que cette induction magnétique est parallèle à l'axe Oy.**

**Q. 15 En déduire l'induction magnétique  $\vec{B}_{\sigma_{\text{int}}}^*$  créée par la charge surfacique intérieure  $\sigma_{\text{int}}^*$ .**

**Q. 16 Déterminer l'induction magnétique  $\vec{B}_{\sigma_{\text{ext}}}^*$  créée par la charge surfacique extérieure  $\sigma_{\text{ext}}^*$ .**

**Q. 17 Montrer que l'induction magnétique résultante  $\vec{B}_\sigma^*$  créée par ces deux charges surfaciques  $\sigma_{\text{int}}^*$  et  $\sigma_{\text{ext}}^*$  est nulle.**

### b-2) Calcul de l'induction créée par les charges volumiques

On reconsidère le cylindre d'Halbach avec ses charges volumiques  $\rho^*$  :

**Q. 18 Calculer en fonction de  $J_0$  la charge surfacique équivalente  $d\sigma^*$  d'une couche de matière d'épaisseur  $dr$ .**

**Q. 19 En déduire en utilisant les résultats précédents l'induction magnétique  $d\vec{B}$  créée par cette couche dans la cavité du cylindre.**

**Q. 20 Déterminer l'induction magnétique totale  $\vec{B}_\rho^*$  créée par la charge volumique  $\rho^*$  dans la cavité.**

### c) Calcul de l'induction totale créée par le cylindre d'Halbach dans sa cavité

**Q. 21 Montrer que le module de l'induction magnétique à l'intérieur du cylindre d'Halbach s'exprime par :**

$$B(R_{\text{int}}, R_{\text{ext}}, J_0) = J_0 \ln\left(\frac{R_{\text{ext}}}{R_{\text{int}}}\right) \quad (\text{I. 5})$$

**Q. 22 Application numérique pour  $J_0 = 1.5 \text{ T}$ ,  $R_{\text{int}} = 30 \text{ mm}$  et  $R_{\text{ext}} = 80 \text{ mm}$**

## I.2 Cylindre d'Halbach réel

En pratique, le cylindre d'Halbach est réalisé par un assemblage de plusieurs blocs uniformément aimantés comme le montre la figure I.1 dans le cas d'un cylindre constitué de 8 blocs. Pour simplifier les calculs, on se limitera à l'étude du quart du problème défini par les blocs ①, ② et ③ (Figure I.4).

Q. 23 Montrer que les charges magnétiques sont nulles en volume.

Q. 24 Calculer les charges surfaciques sur les faces internes et externes du cylindre. On notera ses charges  $\sigma_{int,i}^*$  et  $\sigma_{ext,i}^*$ ,  $i$  étant le numéro du bloc considéré.

Q. 25 Montrer que la charge  $\sigma_{1,2}^*$  sur la face adjacente aux blocs ① et ② s'exprime par :

$$\sigma_{1,2}^* = J_0 \left( \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) \quad (\text{I. 6})$$

Q. 26 Calculer la charge  $\sigma_{2,3}^*$  sur la face adjacente aux blocs ② et ③.

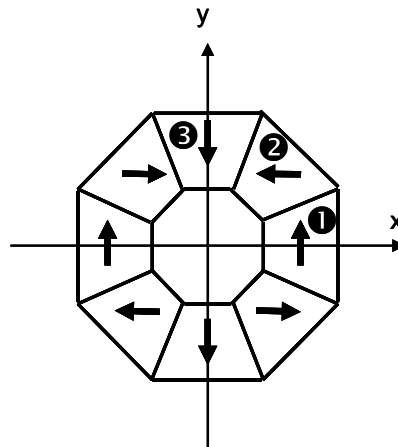


Figure I.4 : Cylindre d'Halbach à 8 blocs

On cherche maintenant à déterminer l'induction magnétique créée par chacune de ces charges surfaciques au centre du cylindre. Pour simplifier nous supposons que sa face interne et sa face externe sont cylindriques de rayon intérieur et extérieur  $R_{int}$  et  $R_{ext}$  respectivement (Figure I.5). Sachant que les composantes x et z sont nulles, on se limitera à développer uniquement le calcul de la composante y.

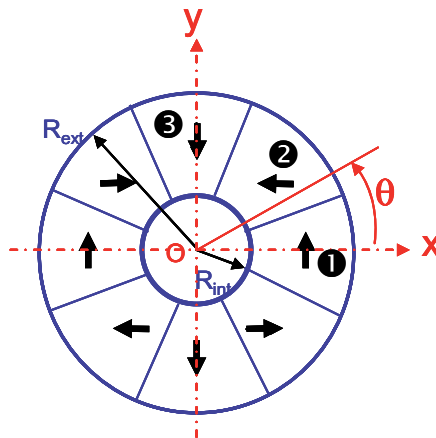


Figure I.5 : Structure simplifiée d'un cylindre d'Halbach à 8 blocs

L'induction magnétique  $d\vec{B}$  créée par un élément surfacique  $dS$  de charge  $\sigma^*$ , situé au point P, en un point M de l'espace est donnée par l'expression (I.7) :

$$d\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \frac{\sigma^* dS}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{I. 7})$$

où  $r$  est la distance du point P au point M et  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire de la droite (PM).

a) Calcul de l'induction créée par les charges surfaciques intérieures et extérieures du cylindre

On considère le bloc ③ avec ses charges surfaciques  $\sigma_{\text{int},3}^*$  et  $\sigma_{\text{ext},3}^*$ .

**Q. 27** Montrer que la composante  $y$  de l'induction créée  $\sigma_{\text{int},3}^*$  au centre du cylindre O et notée  $\vec{B}_{y,\text{int},3}$  ne dépend pas de  $R_{\text{int}}$ .

**Q. 28** Qu'en est-il pour  $\vec{B}_{y,\text{ext},3}$ , la composante  $y$  de l'induction créée par  $\sigma_{\text{ext},3}^*$  au centre O ?

**Q. 29** En déduire que la composante  $y$  de l'induction résultante est nulle.

Ce résultat est valable pour tous les blocs du cylindre d'Halbach.

b) Calcul de l'induction créée par les charges surfaciques sur les faces adjacentes à deux blocs

Pour ce calcul, on considère le bloc ② et les charges surfaciques  $\sigma_{1,2}^*$  et  $\sigma_{2,3}^*$

**Q. 30** Déterminer la composante  $y$  de l'induction magnétique  $\vec{B}_{y,1,2}$  créée par  $\sigma_{1,2}^*$  au centre O.

**Q. 31** En déduire la composante  $y$   $\vec{B}_{y,2,3}$  de l'induction magnétique créée par  $\sigma_{2,3}^*$ .

**Q. 32** En déduire la composante  $y$   $\vec{B}_{y,2}$  de l'induction totale créée par le bloc ② au centre du cylindre.

c) Calcul de l'induction magnétique

**Q. 33** En considérant les résultats précédents et en tenant compte des symétries du problème déterminer l'amplitude  $B$  de l'induction magnétique créée par le cylindre en son centre.

**Q. 34** Application numérique pour  $J_0 = 1.5 \text{ T}$ ,  $R_{\text{int}} = 30 \text{ mm}$  et  $R_{\text{ext}} = 80 \text{ mm}$ .

**Q. 35** Comparer cette valeur avec celle obtenue à la question Q. 22.

**I.3 Structure de Halbach double idéale**

Nous nous intéressons maintenant à la structure d'Halbach double complète constituée d'un cylindre intérieur (cylindre 1) et d'un cylindre extérieur (cylindre 2) réalisés dans la même qualité d'aimant. On notera respectivement  $R_{1,\text{int}}$ ,  $R_{1,\text{ext}}$ ,  $R_{2,\text{int}}$  et  $R_{2,\text{ext}}$  les rayons intérieurs et extérieurs de ces deux cylindres. Le cylindre intérieur est celui étudié dans I.1 avec  $R_{1,\text{int}} = 30 \text{ mm}$ ,  $R_{1,\text{ext}} = 80 \text{ mm}$  et  $J_0 = 1.5 \text{ T}$ . On appellera  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  respectivement les inductions créées par les cylindres 1 et 2 et  $\vec{B}_0$  l'induction totale résultante.



**Q. 36** On considère le cylindre extérieur seul. Pour un rayon intérieur égal à  $R_{2,int} = 90$  mm, quel rayon extérieur doit-on choisir pour créer au centre de ce cylindre une induction identique à celle du cylindre intérieur ?

Les cylindres sont assemblés de manière concentrique. On fait varier l'induction magnétique dans la cavité en maintenant le cylindre extérieur fixe et en faisant tourner le cylindre intérieur. On appelle  $\varphi$  la position relative entre les deux cylindres. Par convention, on considérera comme position de référence  $\varphi = 0$  la position où les deux cylindres ont une structure d'aimantation inverse.

**Q. 37** Dessiner un schéma de principe du système en précisant les angles  $\theta$  et  $\varphi$ .

*a) Calcul de l'induction magnétique dans la cavité*

**Q. 38** Calculer le module de l'induction magnétique au centre du système pour  $\varphi = 0^\circ$  et  $\varphi = 180^\circ$ .

**Q. 39** Déterminer l'expression du module de l'induction magnétique au centre  $B_0(\varphi)$  en fonction de la position relative  $\varphi$  des deux cylindres.

**Q. 40** Tracer la courbe  $B_0(\varphi)$ . On exprimera  $\varphi$  en  $^\circ$ .

*b) Mesure de l'induction dans la cavité du cylindre*

On mesure le champ magnétique à l'intérieur du cylindre par une sonde à effet Hall.

**Q. 41** Expliquer succinctement le principe de ce phénomène.

La sonde à effet Hall utilisée a une sensibilité de  $13 \mu\text{Volts/Gauss}$  ( $1\text{Gauss} = 10^{-4}$  Tesla). Elle est connectée au montage électronique donné dans la figure I.5.

**Q. 42** Calculer le gain du montage électronique.

**Q. 43** Calculer la sensibilité globale du système, exprimée en V/T.

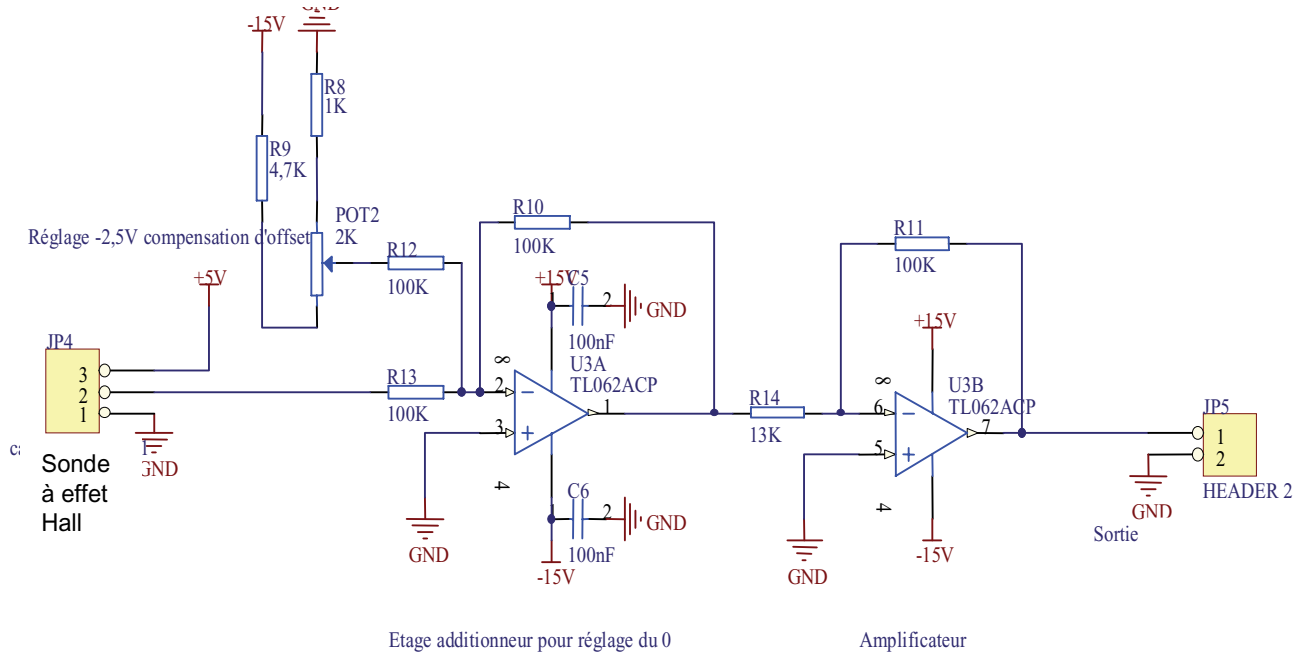


Figure I.5 : Schéma électronique associé au capteur

c) Détermination du couple entre le cylindre intérieur et le cylindre extérieur

On cherche à déterminer le couple électromagnétique qui s'exerce sur le cylindre intérieur. On supposera que la polarisation magnétique du cylindre intérieur est rigide et n'est pas affectée par le champ magnétique extérieur.

**Q. 44** Quel est le champ magnétique  $\vec{H}_2$  que voit le cylindre intérieur ?

**Q. 45** Pour une position  $\varphi$  donnée du cylindre intérieur, exprimer ce champ dans le repère mobile ( $\vec{O}, \vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ )

Le couple  $d\vec{\Gamma}$  subi par un élément de volume  $dv$ , de polarisation  $\vec{J}$ , placé dans un champ  $\vec{H}$  vaut :

$$d\vec{\Gamma} = \vec{J} \times \vec{H} dv \tag{I. 8}$$

où l'opérateur  $\times$  représente l'opérateur produit vectoriel.

**Q. 46** Calculer dans le repère cylindrique ( $\vec{O}, \vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ ), le couple  $d\vec{\Gamma}$  subi par un élément de volume du cylindre intérieur.

**Q. 47** Déterminer, pour un angle  $\varphi$  quelconque, le couple par unité de longueur  $\Gamma_l(\varphi)$  exercé sur le cylindre intérieur.

**Q. 48** Ce résultat est-il prévisible ? Pourquoi ?

**I.4 Introduction du bloc actif de matériau à EMC géant**

Le bloc actif est constitué d'un cylindre de matériau magnéto-calorique de diamètre  $D_m = 25$  mm et de longueur infinie. Sa masse volumique vaut  $\rho_m = 8$  g/cm<sup>3</sup> et sa perméabilité relative  $\mu_r = 2$ .

**Q. 49** Quelle position relative des deux cylindres  $\varphi$  choisir en pratique pour introduire le matériau dans la cavité ?

**Q. 50** Donner la relation qui lie la polarisation magnétique  $J_m$  et le champ magnétique  $H_m$  dans le matériau.

Compte tenu de la forme du bloc actif, le champ magnétique  $H_m$  dans le bloc actif vaut :

$$H_m = H_0 - \frac{J_m}{2\mu_0} \quad (\text{I. 9})$$

$\vec{H}_0$  étant le champ magnétique extérieur existant dans la cavité du cylindre d'Halbach en l'absence de bloc actif.

**Q. 51** Donner les valeurs numériques de  $J_m$  et  $H_m$ .

**Q. 52** Calculer le couple par unité de longueur  $\Gamma_m(\varphi)$  qui s'exerce sur le bloc actif lors de la rotation du cylindre d'Halbach.

**Q. 53** Application numérique.

## Partie II

### Entraînement de la source de champ

Le cylindre intérieur est entraîné par un ensemble moteur à courant continu à aimants permanents et un réducteur supposé parfait (rendement égal à 1). La constante de couple du moteur et le rapport de réduction du réducteur sont notés respectivement  $K_m$  et  $K_r$ , avec  $K_r > 1$ . On appelle  $\Omega_m$ ,  $\Gamma_m$  et  $P_m$  la vitesse, le couple et la puissance fournis par le moteur et  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $P$  la vitesse, le couple et la puissance transmis après le réducteur. On appellera  $\Gamma_\phi$  le couple résistant engendré par l'interaction entre le bloc actif et le cylindre d'Halbach et on négligera toutes les pertes.

L'ensemble moteur /réducteur a les caractéristiques suivantes :

- Tension nominale d'alimentation :  $U_n = 24 \text{ V}$
- Vitesse à vide :  $N_0 = 25 \text{ tr/min}$
- Courant à vide :  $I_0 = 1.5 \text{ A}$
- Couple nominal :  $\Gamma_n = 200 \text{ N.m}$
- Résistance :  $R = 1 \Omega$
- Inductance :  $L = 5 \text{ mH}$
- Le moment d'inertie de l'ensemble moteur / réducteur et charge est estimée à  $J = 5 \text{ kg.m}^2$ .

**Q. 54** Donner les relations qui lient  $\Omega$ ,  $\Gamma$  et  $P$  respectivement à  $\Omega_m$ ,  $\Gamma_m$  et  $P_m$ .

**Q. 55** Montrer que le moment d'inertie du système constitué par l'ensemble moteur/réducteur vaut  $J = K_r^2 J_m$ ,  $J_m$  étant le moment d'inertie du moteur.

#### II.1 Modélisation de l'ensemble moteur/réducteur

L'ensemble moteur/réducteur sera considéré par la suite comme un moteur équivalent de constante  $K$ , de fem  $E$ , de vitesse  $\Omega$ , de couple  $\Gamma$  et de moment d'inertie  $J$ . On appellera  $u$  et  $i$  respectivement les valeurs instantanées de la tension et du courant d'alimentation,  $R$  et  $L$  la résistance et l'inductance d'induit.

**Q. 56** Exprimer  $K$  en fonction de  $K_m$  et  $K_r$ .

**Q. 57** Donner les quatre équations électriques et mécaniques du système liant les grandeurs  $u$ ,  $i$ ,  $E$ ,  $\Omega$ ,  $\Gamma$  et  $\Gamma_\phi$ ,  $\Omega$  étant une grandeur dépendante du temps.

**Q. 58** Exprimer ces équations en utilisant la transformation de Laplace. Pour ce faire, on notera  $\bar{X}$  la transformée de  $X$  ou  $x$ .

Ces équations peuvent être décrites par un schéma fonctionnel ayant pour variable d'entrée  $\bar{U}$  et pour variable de sortie  $\bar{\Omega}$ , comme le suggère la figure II.1.

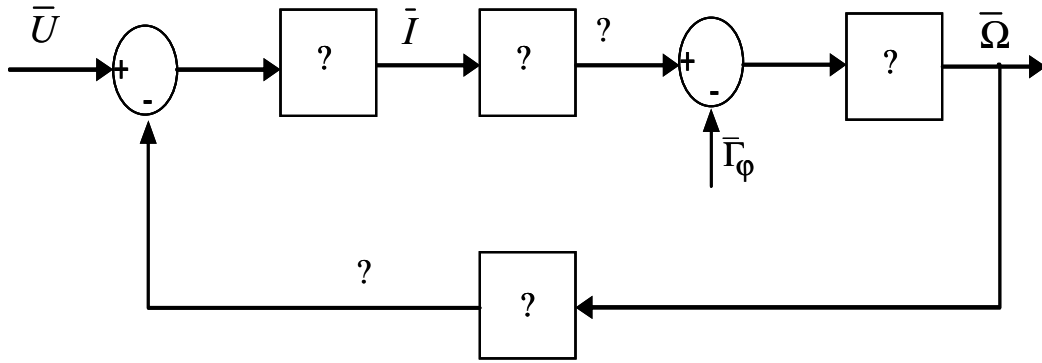


Figure II.1: Schéma fonctionnel de la fonction de transfert de l'ensemble moteur / réducteur

**Q. 59 Compléter ce schéma.**

En négligeant l'influence du couple  $\Gamma_\phi$

**Q. 60 Donner l'expression de la fonction de transfert  $H_\Omega(p) = \frac{\bar{\Omega}(p)}{\bar{U}(p)}$  en fonction de  $K, J, R$  et  $L$ .**

On appelle  $\tau_e$  et  $\tau_{em}$  la constante de temps électriques et la constante de temps électromagnétique du système. Ces constantes s'expriment en fonction de  $K, J, R$  et  $L$  par les relations suivantes :

$$\tau_e = \frac{L}{R} \tag{II. 1}$$

$$\tau_{em} = \frac{RJ}{K^2} \tag{II. 2}$$

**Q. 61 Montrer que  $H_\Omega$  peut s'écrire sous la forme :**

$$H_\Omega(p) = \frac{\bar{\Omega}}{\bar{U}} = \frac{K_\Omega}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \tag{II. 3}$$

avec  $K_\Omega = \frac{1}{K}$ ,  $\tau_1 = \frac{\tau_{em}}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4\tau_e}{\tau_{em}}} \right]$  et  $\tau_2 = \frac{\tau_{em}}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4\tau_e}{\tau_{em}}} \right]$  (II. 4)

**Q. 62 Applications numériques :** Calculer la valeur de  $K_\Omega$ , calculer les valeurs de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  et les comparer à celles de  $\tau_e$  et  $\tau_{em}$ .

## II.2 Alimentation électrique du système

On alimente l'ensemble du système par un hacheur en pont complet lui même alimenté par une source de tension continue. On n'utilisera pas d'inductance additionnelle de lissage dans ce montage. On notera  $U_0$ , la tension délivrée par cette source,  $\alpha$  le rapport cyclique et  $f$  la fréquence de hachage.



Les correcteurs de vitesse et de courant sont des correcteurs PI dont les fonctions de transfert sont  $C_{\Omega}(p)$  et  $C_I(p)$ . Ils peuvent être représentés par le schéma générique du correcteur décrit dans la figure II.3. On appellera  $C_i(p)$  sa fonction de transfert et  $k_i$  et  $k'_i$  ses constantes.

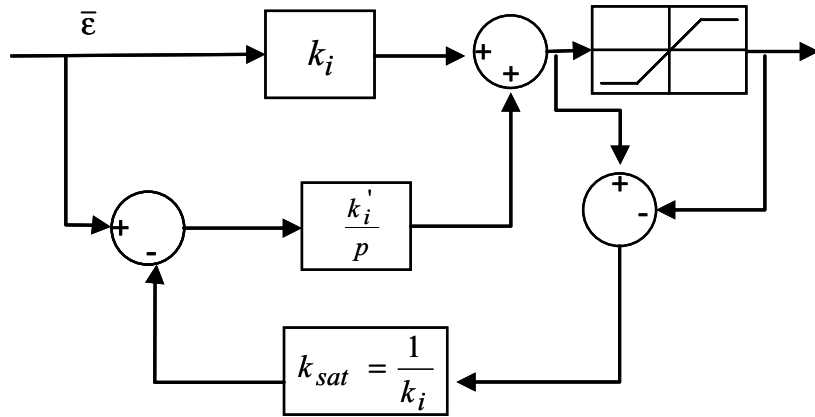


Figure II.3 : Structure typique d'un bloc correcteur PI

**Q. 69** A quoi sert le bloc de saturation ?

**Q. 70** Montrer que lorsque la saturation n'est pas atteinte, la fonction de transfert  $C_i(p)$  de ce correcteur peut s'exprimer par la relation II.5 suivante ; exprimer  $\tau_i$  et  $\tau'_i$  en fonction de  $k_i$  et  $k'_i$  :

$$C_i(p) = \frac{(1 + \tau_i p)}{\tau'_i p} \quad \text{(II. 5)}$$

Par la suite, l'indice  $i = I$  sera affecté au correcteur de courant (caractérisé par  $C_I(p)$ ,  $k_I$ ,  $k'_I$ ,  $\tau_I$  et  $\tau'_I$ ) et l'indice  $i = \Omega$  sera affecté au correcteur de vitesse (caractérisé par  $C_{\Omega}(p)$ ,  $k_{\Omega}$ ,  $k'_{\Omega}$ ,  $\tau_{\Omega}$  et  $\tau'_{\Omega}$ ).

a) Etude de la boucle d'asservissement de courant

**Q. 71** Calculer la fonction de transfert du courant  $H_I(p) = \frac{\bar{I}(p)}{U(p)}$ .

**Q. 72** Montrer que  $H_I(p)$  possèdent les mêmes constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  que  $H_{\Omega}(p)$ .

Le hacheur est supposé parfait et a de ce fait une fonction de transfert égale à 1. De même on supposera que le gain du capteur de courant est égal à 1.

**Q. 73** Donner le schéma de la boucle de transfert de l'asservissement.

**Q. 74** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte  $T_I(p)$  de cet asservissement.

**Q. 75** Montrer qu'en choisissant la constante de temps du correcteur du courant telle que  $\tau_I = \tau_1$ , la fonction de transfert en boucle fermée  $F_I(p)$  s'exprime par la relation II.6 suivante. Donner les expressions de  $K_0$  et  $\tau_0$  en fonction de  $K$ ,  $J$ ,  $\tau'_I$  et  $\tau_2$  :

$$F_I(p) = \frac{K_0}{1 + \tau_0 p} \quad (\text{II. 6})$$

On fixe  $\tau_0 = 1$  ms

**Q. 76** Déterminer la valeur de la constante de temps  $\tau'_I$  de ce correcteur de courant.

**Q. 77** En déduire les valeurs de ses constantes  $k_I$  et  $k'_I$ .

**Q. 78** Montrer que, le moteur tournant à vitesse faible et donc les variations du couple étant lentes, la boucle de courant peut être approximée par une fonction unitaire (gain =1).

b) Etude de la boucle de vitesse

**Q. 79** Représenter le nouveau schéma fonctionnel simplifié de la régulation du système. Le capteur externe de vitesse est supposé de gain unitaire.

**Q. 80** Déterminer l'expression de la fonction de transfert  $F_\Omega(p) = \frac{\bar{\Omega}}{\Omega_{ref}}$  en fonction de  $\tau_\Omega$  et  $\tau'_\Omega$ .

On cherche à ramener cette fonction de transfert à une fonction du premier ordre de la forme :

$$F_\Omega(p) = \frac{1}{1 + \tau'' p} \quad (\text{II. 7})$$

**Q. 81** Quelles sont les deux conditions sur  $\tau''$ ,  $\tau_\Omega$  et  $\tau'_\Omega$  qui permettent d'atteindre cet objectif ?

**Q. 82** En considérant  $\tau'' = 300$  ms et  $\tau'' = \frac{\tau_\Omega}{100}$ , déterminer les valeurs des constantes  $k_\Omega$  et  $k'_\Omega$  du correcteur de vitesse.



## PARTIE III

### Matériau magnétocalorique et cycle thermique

L'effet magnétocalorique trouve son origine dans le couplage les différents termes d'entropie du matériau : entropie magnétique  $S_m$ , entropie de réseau  $S_r$  et entropie électronique  $S_e$ . On négligera par la suite le terme d'entropie électronique.

Dans un processus adiabatique (c'est-à-dire sans échange de chaleur avec l'extérieur) et réversible, l'entropie totale doit rester constante. L'application d'un champ magnétique induit une mise en ordre des moments magnétiques, donc une diminution de  $S_m$  qui sera compensée par une augmentation de  $S_r$  et par conséquent par une augmentation de la température du matériau. C'est l'échauffement par aimantation adiabatique  $+\Delta T_{adia}$ . Inversement, la suppression du champ magnétique extérieur favorise le désordre magnétique au détriment des arrangements atomiques qui se traduit alors par une diminution de la température de la substance. C'est le refroidissement adiabatique  $-\Delta T_{adia}$ .

Cet effet est maximal au voisinage de la température de transition de phase magnétique (Température de Curie par exemple). D'où l'intérêt de travailler autour de cette température (Figure III.1).

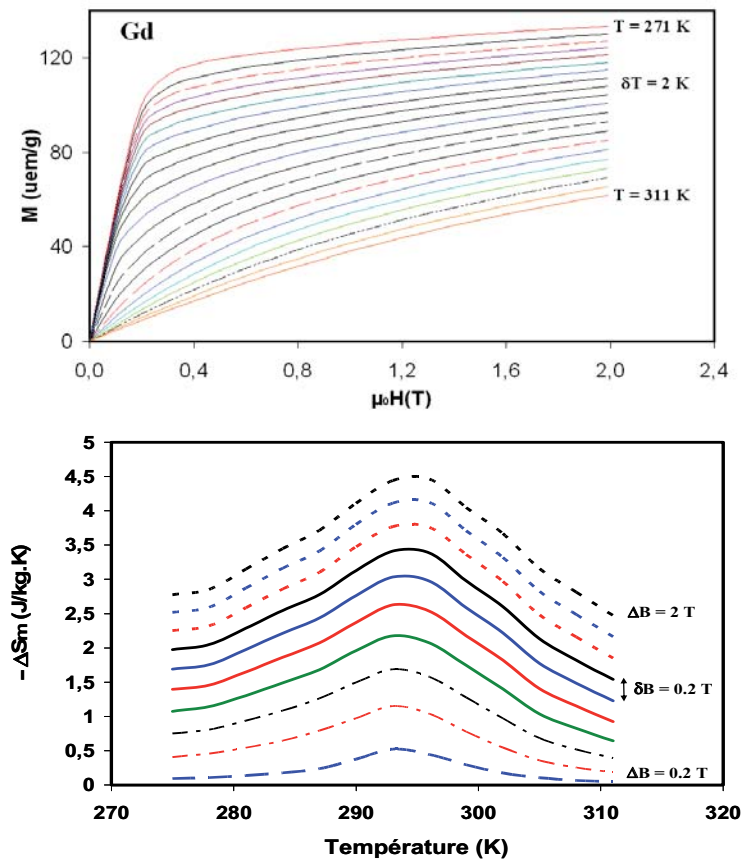


Figure III.1 : Représentation de l'évolution de l'aimantation et de la variation de l'entropie magnétique autour de la température de Curie d'un matériau à effet magnétocalorique géant quand on le soumet à une variation de l'induction magnétique de  $\Delta B = \mu_0 \Delta H$

### III.1 Analyse thermodynamique de l'EMC

On considère un corps magnétique plongé dans un champ  $H$  extérieur. On notera  $V$ ,  $T$  et  $P$  le volume, la température du corps magnétique ainsi que la pression à laquelle il est soumis,  $U$  son énergie interne,  $S$  son entropie et  $M$  l'aimantation qu'il acquiert sous l'action du champ extérieur.

L'expression de l'enthalpie libre  $G$  (énergie de Gibbs) du système dans le cas général est donnée par :

$$G = G(T, P, H) = U + PV - \mu_0 MH - TS \quad (\text{III. 1})$$

On rappelle que l'identité thermodynamique fondamentale  $dU$  vaut :

$$dU = TdS + \mu_0 HdM \quad (\text{III. 2})$$

**Q. 83** En négligeant tout effet dû au volume et à la pression, montrer que la différentielle totale exacte de l'enthalpie libre peut s'écrire :

$$dG(T, H) = -\mu_0 MdH - SdT \quad (\text{III. 3})$$

**Q. 84** Calculer les dérivées partielles de  $G$  par rapport à  $T$  et  $H$  :  $\frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial G}{\partial H} \right)$ .

$G$  étant une différentielle exacte, ses dérivées partielles secondes croisées sont égales et nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial G}{\partial H} \right) \quad (\text{III. 4})$$

On admet que la différentielle de l'entropie peut s'écrire :

$$dS(T, H) = \frac{C_H}{T} dT + \frac{k}{T} dH \quad (\text{III. 5})$$

où  $C_H$  est la capacité thermique du matériau à  $H$  constant.

**Q. 85** Calculer le coefficient calorimétrique  $k$  et montrer que :

$$dS = \frac{C_H}{T} dT + \mu_0 \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H dH \quad (\text{III. 6})$$

**Q. 86** Montrer qu'en faisant varier le champ extérieur de 0 à  $H$ , la variation de l'entropie magnétique  $\Delta S_m$  peut être déterminée par la relation suivante :

$$\Delta S_m(T, H) = \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H dH \quad (\text{III. 7})$$

**Q. 87** En supposant une transformation adiabatique et un échauffement faible ( $\Delta T_{adia} \ll T$ ) montrer que  $\Delta T_{adia}$  peut être déterminé par la relation suivante :

$$\Delta T_{adia}(T, H) = -\mu_0 \int_0^H \frac{T}{C_H} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H dH \quad \text{(III. 8)}$$

**III.2 Détermination de la variation d'entropie magnétique et de l'échauffement adiabatique à partir des courbes d'aimantation du matériau**

On considère un matériau ferromagnétique dans la polarisation magnétique  $J$  est décrite par une loi simple donnée par la figure III.2. Elle est caractérisée par une pente à l'origine égale à  $\mu_0\chi$ , une polarisation à saturation  $J_S$  et un champ critique  $H_C$ .

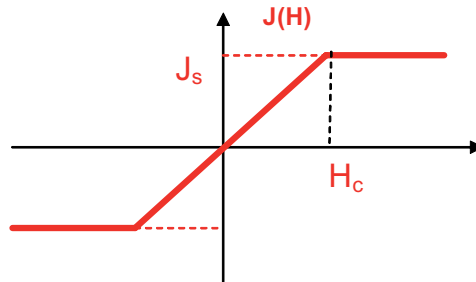


Figure III.2 : Loi  $J(H)$  du matériau considéré

**Q. 88** En considérant les lois des milieux continus rappelées en annexe, donner en fonction de  $H$  les relations qui permettent de déterminer l'aimantation  $M$ , la polarisation magnétique  $J$  et l'induction magnétique  $B$  dans le matériau.

**Q. 89** Exprimer  $J(H)$  en fonction de  $J_S$  et de  $H_C$  pour toutes les valeurs positives de  $H$

Nous supposons par la suite que  $H_C$  est une constante telle que  $\mu_0 H_C = 0.5 \text{ T}$ , indépendante de la température et que la polarisation magnétique à saturation  $J_S$  suit la variation avec la température représentée dans la figure III.3.

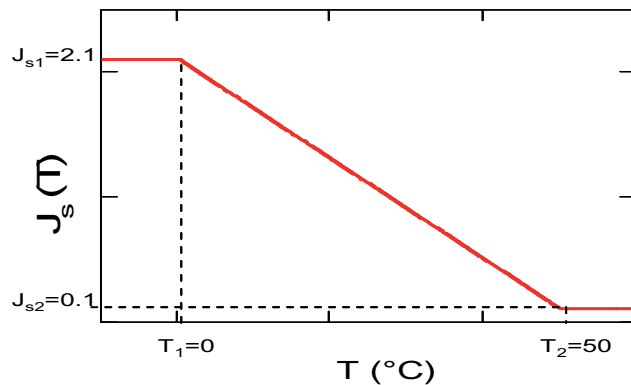


Figure III.3 : Variation de la polarisation magnétique à saturation avec la température

**Q. 90** Donner l'expression de  $J_S(T)$  en fonction de  $T$ ,  $J_{S1}$ ,  $J_{S2}$ ,  $T_1$  et  $T_2$ . Application numérique.

**Q. 91** Calculer  $J(H,T)$  en fonction de  $\mu_0 H$ .

**Q. 92** Tracer sur un même graphe les courbes  $J(\mu_0 H, -20^\circ\text{C})$ ,  $J(\mu_0 H, 0^\circ\text{C})$ ,  $J(H, 30^\circ\text{C})$ ,  $J(\mu_0 H, 50^\circ\text{C})$ ,  $J(\mu_0 H, 70^\circ\text{C})$ . On se limitera aux valeurs positives de  $H$  et on indiquera sur ces courbes les valeurs des grandeurs caractéristiques.

**Q. 93** Calculer  $\frac{\partial J(H,T)}{\partial T}$  en fonction de  $\mu_0 H$ .

**Q. 94** En déduire la variation d'entropie magnétique du matériau  $\Delta S_m(T, H)$  engendrée par l'application du champ magnétique  $H$ .

**Q. 95** En effectuant une analyse dimensionnelle, montrer que  $\Delta S_m$  s'exprime en  $\text{J/m}^3\text{K}$ .

**Q. 96** Tracer sur un même graphe les courbes  $-\Delta S_m(T, \mu_0 H)$  pour  $\mu_0 H = 1\text{ T}$  et  $\mu_0 H = 2\text{ T}$ , pour une température variant de  $-10^\circ\text{C}$  à  $60^\circ\text{C}$ .

**Q. 97** La masse volumique du matériau valant  $\rho_m = 8000\text{ kg/m}^3$ , donner les valeurs calculées précédemment en  $\text{J/kgK}$ .

**Q. 98** Donner l'expression de la quantité maximale de froid ou de chaleur  $Q_m$  que peut fournir le matériau (énergie intrinsèque "froide" ou "chaude"). AN pour  $\mu_0 H = 1\text{ T}$  et  $\mu_0 H = 2\text{ T}$ .

**Q. 99** La capacité thermique du matériau  $C_H$  étant supposée constante et valant  $C_H = 300\text{ J/kgK}$ , déterminer l'échauffement adiabatique du matériau  $\Delta T_{adia}(T, \mu_0 H)$  pour  $\mu_0 H = 1\text{ T}$ ,  $\mu_0 H = 2\text{ T}$  et  $T = 20^\circ\text{C}$ .

### III.3 Cycle thermique à régénération directe

Comme dans tout système de réfrigération, le matériau magnétocalorique (réfrigérant) va subir d'une manière cyclique (Figure 1) : un échauffement induit par son aimantation, une évacuation de la chaleur  $Q_C$  soit par contact direct avec la source chaude soit par un fluide caloporteur, un refroidissement dû à la désaimantation et enfin une absorption de la chaleur  $Q_F$  en contact directe ou indirecte avec la source froide. Par analogie avec la thermodynamique, on appelle ce cycle un cycle thermomagnétique.

Le cycle thermique à régénération directe est un cycle analogue aux cycles thermodynamiques conventionnels comme le cycle d'Ericsson par exemple. Il est décrit par 4 phases comme le montre la figure 1 :

- aimantation isotherme,
- refroidissement isochamp,
- désaimantation isotherme,
- échauffement isochamp.

En notant  $T_F$ ,  $T_C$  les températures de la source chaude et de la source froide et  $\Delta H$  la variation du champ magnétique à laquelle est soumis le matériau :

**Q. 100 Tracer le diagramme (T,S) de ces transformations.**

**Q. 101 Déterminer la quantité de chaleur  $Q_C$  à évacuer du matériau EMC vers la source chaude suite à son aimantation.**

**Q. 102 Déterminer la quantité de chaleur  $Q_F$  que peut absorber le matériau suite à sa désaimantation**

Le coefficient de performance  $COP$  (Coefficient Of Performance) est le rapport entre la puissance froide récupérée et la puissance totale fournie au système.

**Q. 103 Déterminer ce coefficient de performance  $COP$  dans le cas théorique.**

**Q. 104 Que devient cette expression si la variation d'entropie magnétique  $\Delta S_m(T, \Delta H)$  est indépendante de la température, la comparer à l'efficacité de Carnot.**

### **III.4 Etude du comportement thermique d'un bloc réfrigérant**

On considère un bloc réfrigérant de forme parallélépipédique constitué d'un empilage de plaques de matériau à EMC géant d'épaisseur  $e_m$ , de longueur  $L_m$  et de largeur  $l_m$ . Ces plaques sont espacées les unes par rapport aux autres d'une distance  $e_f$  permettant de faire circuler un fluide caloporteur. Les caractéristiques de ce bloc et du fluide sont données ci après, les indices  $m$  et  $f$  étant relatifs au matériau et au fluide :

- longueur des plaques :  $L_m = 150$  mm
- largeur des plaques :  $l_m = 25$  mm
- épaisseur des plaques :  $e_m = 2$  mm
- nombre de plaques :  $N_m = 11$
- espacement entre les plaques  $e_f = 0.2$  mm
- masse volumique du matériau :  $\rho_m = 8$  g/cm<sup>3</sup>
- masse volumique du fluide :  $\rho_f = 1$  g/cm<sup>3</sup>
- $EMC = \Delta T_{adia} = 25$  K supposé indépendant de la température
- capacité calorifique à champ constant du matériau  $C_m = 250$  J/kgK
- capacité calorifique du fluide  $C_f = 4180$  J/kgK

Ce bloc est placé dans un fourreau étanche et isotherme permettant de faire circuler un fluide extérieur.

On soumet ce bloc réfrigérant au cycle magnétothermique déjà décrit dans la figure 1 et détaillé dans la figure III.4 suivante. Il comporte quatre phases :

- 1 - aimantation adiabatique : le matériau s'échauffe instantanément de  $+\Delta T_{adia}$
- 2 - évacuation de la chaleur vers la source chaude, le matériau étant toujours soumis au champ magnétique.
- 3 - désaimantation adiabatique : le matériau se refroidit instantanément de  $-\Delta T_{adia}$

4 - récupération du froid par la source froide, le matériau étant toujours hors du champ magnétique.

Deux circuits hydrauliques sont utilisés : l'un appelé CH-C pour assurer les échanges thermiques entre le matériau et la source chaude et l'autre CH-F pour assurer les échanges thermiques entre le matériau et la source froide. Nous appellerons  $T_F$  et  $T_C$  les températures de ces sources. Nous supposons que ces circuits sont commandés de manière indépendante et n'interfèrent pas entre eux. Le débit et la vitesse du fluide sont les mêmes dans les deux cas. Les températures  $T_F$  et  $T_C$  valent respectivement  $10\text{ }^\circ\text{C}$  et  $30\text{ }^\circ\text{C}$ .

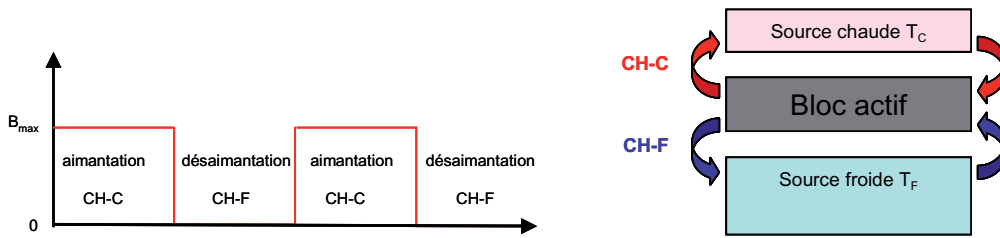


Figure III.4 : Cycle magnétothermique

**Q. 105** Calculer la masse totale  $m_m$  du matériau utilisé dans le bloc réfrigérant.

**Q. 106** Calculer l'énergie intrinsèque  $Q_m$  de ce bloc (énergie maximale acquise ou restituée lors de l'aimantation ou la désaimantation).

On cherche à déterminer le comportement thermique du bloc actif. Pour ce faire nous allons nous appuyer sur un modèle simple à une dimension dans lequel seuls les échanges convectifs entre le matériau et le fluide sont considérés.

*a) Calcul de l'énergie et de la puissance froide*

On suppose que l'échauffement et le refroidissement dus à l'aimantation et la désaimantation se font de manière instantanée. En régime établi, la température du matériau suit la courbe de la figure III.5, la durée du cycle total valant  $\Delta t$ .

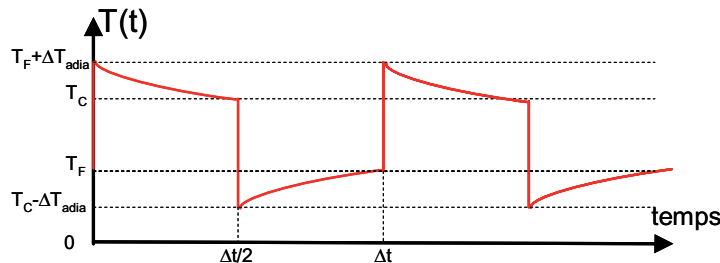


Figure III.5 : Evolution de la température du matériau en fonction du temps en régime établi

**Q. 107** Calculer, en fonction  $T_F$ ,  $T_C$  et  $\Delta T_{adia}$ , l'énergie froide transmise  $Q_F$  par le matériau au fluide.

**Q. 108 Application numérique.** Comparer la valeur trouvée pour  $Q_F$  à la valeur de l'énergie intrinsèque  $Q_m$  calculée précédemment.

**Q. 109** En déduire la puissance froide  $P_F$  obtenue pour  $\Delta t = 4$  s

**Q. 110** Quel est le débit du fluide  $D_f$  nécessaire pour que sa variation de température entre l'entrée et la sortie du bloc réfrigérant soit égale à  $\Delta T_f = 5$  °C .

b) Evolution de la température du bloc réfrigérant en fonction du temps

On cherche à déterminer la courbe de variation de la température du matériau en fonction du temps (courbe de la figure III.5). Pour ce faire, on se place à un instant  $t_1$  qui correspond au début de la phase d'aimantation. Le matériau initialement à la température  $T_0$  s'est échauffé et sa température vaut  $T_1$ , ( $T_1 > T_C$ ). On fait circuler alors le fluide de la source chaude (à  $T_C$ ) pour évacuer la chaleur acquise par effet magnétocalorique. Si la durée de cette phase était infinie, le matériau devrait atteindre la température  $T_C$  .

**Q. 111** Ecrire l'expression qui donne la diminution de l'énergie instantanée du matériau  $q_{\text{int}}$  lors du passage du fluide.  $q_{\text{int}}$  est fonction de la masse du matériau  $m_m$ , de sa capacité calorifique  $C_m$  et de sa température  $T$  .

**Q. 112** Donner l'expression de la puissance de chaleur transmise par convection  $q_{\text{conv}}$  en fonction de  $T$  et  $T_C$  . On appellera  $h$  le coefficient d'échange et  $S$  la surface de contact entre le fluide et du matériau.

**Q. 113** En effectuant le bilan énergétique du système, montrer que :

$$- m_m C_m \frac{dT}{dt} = hS(T - T_C) \quad (\text{III. 9})$$

**Q. 114** En introduisant une variable intermédiaire  $\theta = \frac{T - T_C}{T_1 - T_C}$ , résoudre cette équation et montrer que la solution est de la forme :

$$T(t) = A e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}} + B \quad (\text{III. 10})$$

Donner les expressions de  $A$ ,  $B$  et  $\tau$  .

**Q. 115** Par un raisonnement similaire à la phase d'aimantation, déterminer l'évolution de la température du matériau lors de la désaimantation et du passage du fluide à  $T_F$  . On notera  $t_2$  et  $T_2$  , l'instant initial et la température initiale de cette phase.

**Q. 116** En considérant les données suivantes calculer  $T_1$ ,  $T_2$  ainsi que la température  $T_3$  obtenue à la fin du premier cycle et de la deuxième aimantation :  $T_0 = 30$  °C ,  $\Delta T_{\text{adia}} = 25$  °C ,  $T_F = 10$  °C ,  $T_C = 30$  °C ,  $t_1 = 0$  s ,  $t_2 = \Delta t / 2 = 2$  s ,  $t_3 = \Delta t = 4$  s et  $\tau = 0.5$  s .

**Q. 117** Tracer la courbe  $T(t)$  sur un cycle et demi (6 s) en plaçant les points caractéristiques.

**Q. 118** Comparer cette courbe à celle de la figure III. 5. Commenter.

## PARTIE IV

### Régulation de la température d'une enceinte réfrigérante

Le dispositif présenté dans les parties précédentes a fait l'objet d'une étude sur un petit prototype, destiné à maintenir à environ 20°C une enceinte baignant dans une ambiance à environ 40 °C. On désire réaliser la régulation de la température intérieure de l'enceinte à l'aide d'un régulateur industriel PID du commerce.

Le schéma fonctionnel d'une boucle de régulation peut être représenté par celui de la figure IV.1 où  $W(t)$  représente la consigne,  $\varepsilon(t)$  le signal d'écart,  $Y_r(t)$  le signal réglant,  $G_m(t)$  la grandeur manipulée,  $G_r(t)$  la grandeur réglée et  $M(t)$  le signal mesure, grandeur image des variations de  $G_r(t)$ .

Par souci de normalisation industrielle,  $Y_r(t)$  et  $M(t)$  sont des signaux normalisés, le plus souvent véhiculés par des tensions (0 - 10V) ou par des courant (4 - 20 mA), lorsque la grandeur réglée  $G_r(t)$  (grandeur physique) évolue sur une plage définissant l'échelle  $Ech$  du dispositif capteur-transmetteur.

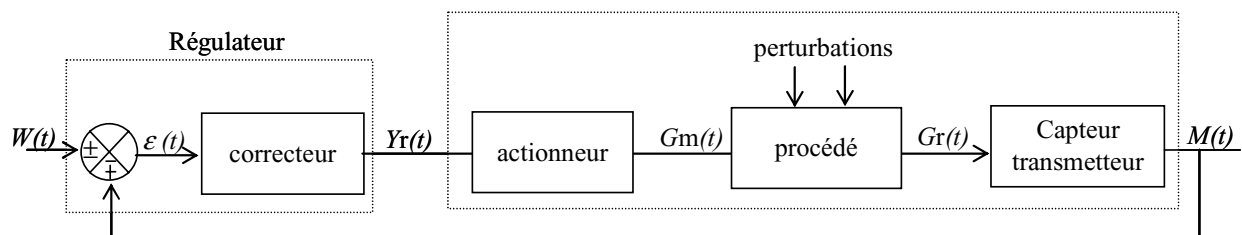


Figure IV.1 : Schéma fonctionnel d'une boucle de régulation

#### IV.1 Modélisation du dispositif

##### a) Etude de la caractéristique statique du système

La température est mesurée à l'aide d'une sonde platine et d'un transmetteur tel que :

$$Gr_{\min} = 0 \text{ °C} \Leftrightarrow 4 \text{ mA} \quad (M(t) = 0\%)$$

$$Gr_{\max} = 50 \text{ °C} \Leftrightarrow 20 \text{ mA} \quad (M(t) = 100\%) \quad \text{donc} \quad Ech = 50 \text{ °C}$$

L'actionneur dispose d'un dispositif permettant de linéariser la caractéristique statique (Fig. IV.2). On rappelle que l'on note  $m(t)$  et  $y_r(t)$  les variations respectives de  $M(t)$  et  $Y_r(t)$ .



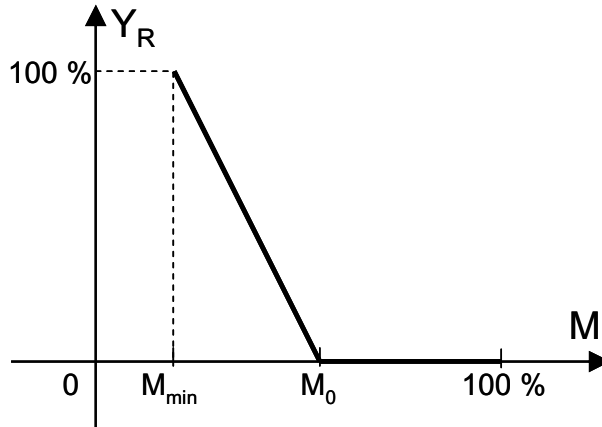


Figure IV.2 : Linéarisation de la caractéristique statique

**Q. 119** Déterminer l'expression du gain statique  $K$ , défini par :

$$K = \frac{\Delta M}{\Delta Y_r} = \frac{m}{y_r} \quad (\text{IV. 1})$$

autour d'un point de fonctionnement quelconque entre  $M_{\min}$  et  $M_0$ .

**Q. 120** Application numérique :  $M_{\min} = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $M_0 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$  Fournir la valeur numérique de  $K$ .

**Q. 121** Compte tenu du signe de  $K$ , déterminer le sens d'action du régulateur. On rappelle qu'un régulateur est dit "direct" si le comparateur réalise  $\varepsilon(t) = M(t) - W(t)$ . Il est dit "inverse" si  $\varepsilon(t) = W(t) - M(t)$

b) Modélisation dynamique du système (calcul préliminaire)

L'identification par modèle de connaissance est relativement complexe. On va donc adopter une identification par modèle expérimental. Compte tenu du retard temporel (ou temps mort) introduit par les transferts thermiques, on adopte le modèle de Broïda, défini par :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Y_r(p)} = \frac{Ke^{-Tp}}{1 + \tau p} \quad (\text{IV. 2})$$

avec

$K$  le gain statique,  $T$  le temps mort et  $\tau$  la constante de temps.

**Q. 122** Pour un tel modèle, exprimer la relation différentielle liant  $m(t)$  et  $y_r(t)$ , petites variations autour d'un point de fonctionnement ?

**Q. 123** Le signal d'entrée  $y_r(t)$  est un échelon d'amplitude  $E$ , tel que  $y_r(t) = Eu(t)$ . Déterminer l'expression de  $m(t)$ , avec la condition initiale  $m(0) = 0$ . Représenter schématiquement l'allure de cette réponse indicielle  $m(t)$ , en précisant la valeur finale.

**Q. 124** Compte tenu de la linéarité du dispositif entre  $M_0$  et  $M_{\min}$ , représenter l'évolution de  $M(t)$ , pour un échelon de 100% de commande sur  $Y_r$ , avec  $M(0) = M_0$ .

Propriété particulière des systèmes du 1<sup>er</sup> ordre (avec ou sans temps mort)

Pour déterminer cette propriété particulière (que l'on pourra généraliser) on adopte les notations de la question Q.123.

**Q. 125** On pose  $w(t) = kKE$ , avec  $0 < k < 1$ . Déterminer l'instant  $t_1$  où  $m(t) = w(t)$ .

**Q. 126** Déterminer la valeur de la pente  $\frac{dm(t)}{dt}$  à l'instant  $t_1$ .

**Q. 127** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe  $m(t)$  à l'instant  $t_1$ , avec l'hypothèse des coordonnées réduites suivantes :  $t'=0$  en  $t=t_1$ , après avoir déterminé l'expression de  $E'$  (voir courbe Fig. IV.3)

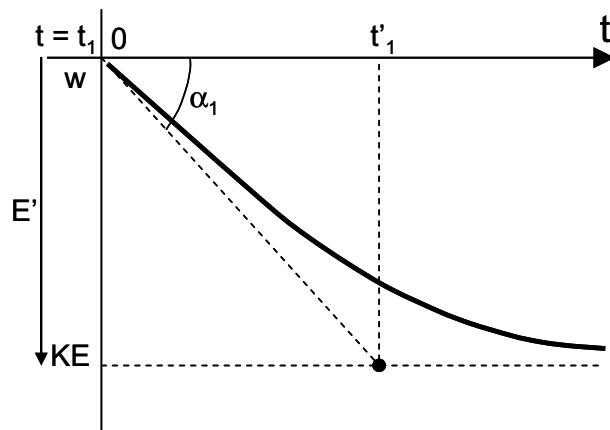


Figure IV.3 : Courbe  $m(t)$  et coordonnées réduites associées

**Q. 128** Déterminer l'abscisse  $t'_1$  du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote horizontale  $KE$ . Montrer que cet instant vaut  $\tau$ .

c) Modélisation dynamique du système

L'obtention d'un modèle de comportement par la technique de la réponse indicielle se heurte à une difficulté majeure : Pendant toute la durée de l'enregistrement, on admet que le système est NON perturbé. Or il est très difficile industriellement de disposer d'un horizon temporel suffisamment long, sans perturbations. La méthode qui va être utilisée (dite des oscillations TOR) permet d'utiliser des résultats graphiques obtenus sur des durées courtes.

Principe de la méthode

On rappelle dans la figure IV.4 la caractéristique statique du régulateur employé en mode "tout ou rien", en sens d'action direct.  $W$  est la consigne.

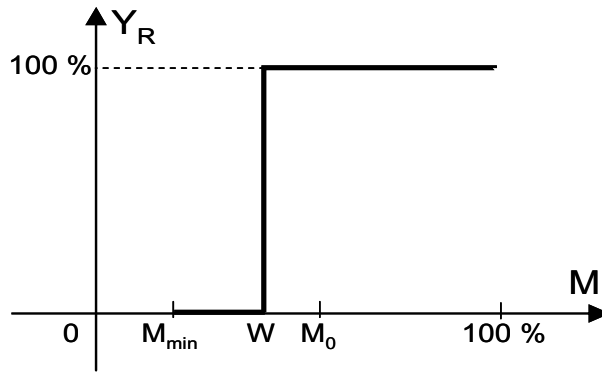


Figure IV.4 : Caractéristique statique

L'étude temporelle des oscillations de  $M(t)$  aboutit à l'allure de la figure IV.5. On considère que le franchissement de la consigne (en  $t_1, t_3, t_5, \dots$ ) ne provoque une modification de la trajectoire de  $M(t)$  qu'après un retard  $T$  (aux instants  $t_2, t_4, \dots$ ), conduisant à un dépassement  $\Delta M_1$  et  $\Delta M_2$  de la mesure (par rapport à la consigne).

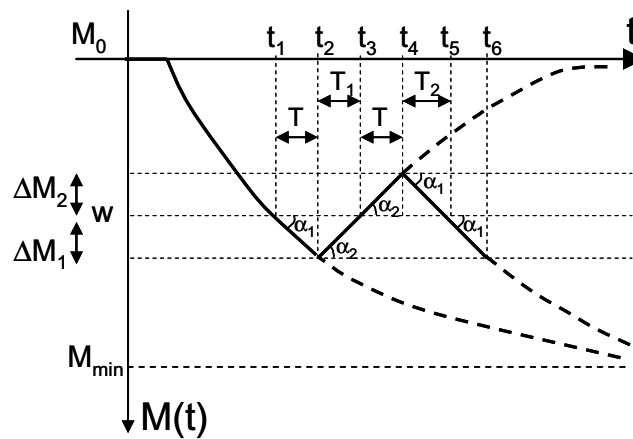


Figure IV.5 : Oscillations de  $M(t)$

Q. 129 En supposant  $\Delta M_1$  d'amplitude faible devant  $W - M_{\min}$  et en assimilant les portions de courbes exponentielles à leur tangente à l'origine (Fig. IV.6), calculer  $\frac{\Delta M_1}{W - M_{\min}}$  en fonction de  $T$  et de  $\tau$ .

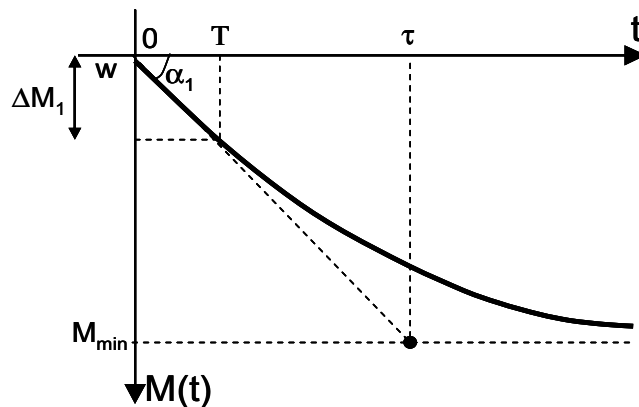


Figure IV.6 : Approximation de  $M(t)$  pour des faibles valeurs de  $\Delta M_1$

De la même façon, à l'instant  $t_2$  la mesure  $M(t)$  débute une variation en exponentielle décroissante vers  $M_0$ . En supposant  $\Delta M_1$  et  $\Delta M_2$  d'amplitude faible devant  $M_0 - W$  et en assimilant les portions de courbes exponentielles à leur tangente à l'origine (Fig. IV.6) :

**Q. 130** Calculer  $\frac{\Delta M_2}{M_0 - W}$  en fonction de  $T$  et  $\tau$ .

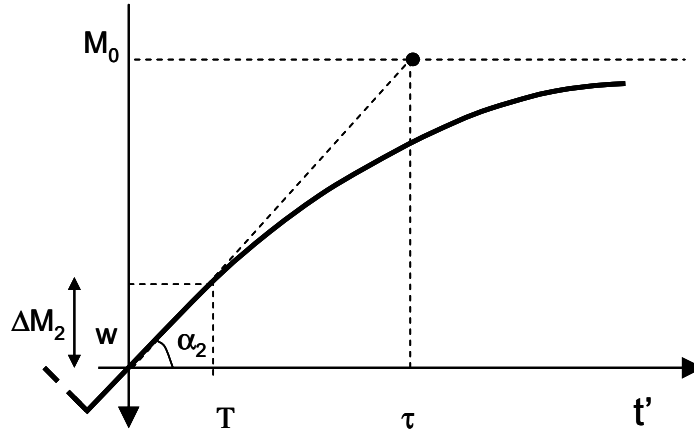


Figure IV.6 Approximation de  $M(t)$  pour des faibles valeurs de  $\Delta M_2$

**Q. 131** En déduire l'amplitude des oscillations  $O_{cc} = \Delta M_1 + \Delta M_2$ , en fonction de  $M_0$ ,  $M_{\min}$ ,  $T$  et  $\tau$ .

**Q. 132** A partir des deux figures précédentes, déterminer les expressions de  $\tan \alpha_1$  et  $\tan \alpha_2$ , en fonction de  $M_0$ ,  $W$ ,  $M_{\min}$  et  $\tau$ .

**Q. 133** Déterminer  $T_1$ , en fonction de  $\Delta M_1$  et  $\tan \alpha_2$ . En déduire l'expression de  $T_1$  en fonction de  $T$ ,  $M_0$ ,  $W$  et  $M_{\min}$ .

**Q. 134** Déterminer de même  $T_2$  en fonction de  $T$ ,  $M_0$ ,  $W$  et  $M_{\min}$ .

**Q. 135** La période des oscillations est donnée par :  $T_0 = T + T_1 + T + T_2$ . En déduire l'expression de  $T_0$  en fonction de  $T$ ,  $M_0$ ,  $W$  et  $M_{\min}$ .

**Q. 136 Applications numériques :**  $M_0 = 40^\circ\text{C}$ ,  $M_{\min} = 5^\circ\text{C}$ ,  $W = 20^\circ\text{C}$ . On rappelle l'échelle du transmetteur :  $0 - 50^\circ\text{C}$ ,  $\Delta M_1 = 1.5^\circ\text{C}$ ,  $\Delta M_2 = 2^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 81.7\text{ s}$

En déduire les valeurs numériques de  $T$  et  $\tau$ .

#### d) Validation du modèle obtenu

Pour paramétrer le régulateur PID de structure mixte que l'on utilisera par la suite, Ziegler et Nichols ont déterminé des tableaux de réglage (donnés en annexe) permettant :

- le choix entre les actions P seule, PI ou PID,
- le calcul des paramètres de réglages  $X_p = \frac{100}{A}$ ,  $T_i(s)$  et  $T_d(s)$ .

**Q. 137** En fonction du rapport de "réglabilité"  $\frac{\tau}{T}$ , quel type de régulation est préférable, sachant que l'on désire obtenir une précision statique parfaite ( $M(t) = W$  en régime établi) ?

Sachant que le premier tableau permet le réglage à partir de la connaissance de  $T_0$  et  $O_{cc}$  (oscillation crête à crête, en pourcentage de l'échelle du transmetteur) :

**Q. 138** Déterminer les valeurs des paramètres pour la régulation adoptée à la question Q.137 précédente.

Le deuxième tableau permet ce même réglage à partir d'une identification préalable de  $K$ ,  $T$  et  $\tau$  par la méthode de la réponse indicielle.

**Q. 139** Déterminer les valeurs  $K$ ,  $T$  et  $\tau$  obtenues.

NB :  $K$  doit être adopté en valeur absolue, son signe influant déjà sur le sens d'action du régulateur.

**Q. 140** Que peut-on dire de l'identification obtenue par la méthode des oscillations "Tout ou Rien" ?

## **IV.2 Régulation du dispositif**

Compte tenu des résultats précédents, on adopte un régulateur avec un correcteur PI de structure mixte. On rappelle que sa fonction de transfert est alors :

$$C(p) = A\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \quad (\text{IV. 3})$$

où  $A$  = amplification et  $T_i$  = temps d'action intégrale

Dans la pratique on désire réaliser ce correcteur à l'intérieur d'un dispositif numérique, assurant le suivi historique des essais effectués sur le prototype. Le correcteur est donc réalisé sous forme discrète, avec des échantillons toutes les  $T_e$  secondes.

**Q. 141** Rappeler la formule de discrétisation permettant d'obtenir  $C_D(z)$ , réalisation discrète de la fonction de transfert à temps continu  $C(p)$ .

**Q. 142** En utilisant la table de transformée en  $z$  fournie en annexe, déterminer la fonction de transfert  $C_D(z)$ , exprimée sous forme d'une fraction rationnelle en  $z^{-1}$ . On note  $T_e$  la période d'échantillonnage.

**Q. 143** En déduire l'équation récurrente fournissant l'échantillon  $Y_{r,n}$  en fonction de  $Y_{r,n-1}$ ,  $\varepsilon_n$  et  $\varepsilon_{n-1}$ .

## ANNEXE

### I. Equations de Maxwell

$$\text{Div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Rot} \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Div} \vec{D} = \rho$$

$$\text{Rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Avec

$\vec{B}$  : Induction magnétique en Tesla (T)

$\vec{H}$  : Champ magnétique en Ampère/mètre (5A/m)

$\vec{D}$  : Induction électrique en Coulomb/mètre carré (C/m<sup>2</sup>)

$\vec{E}$  : Champ électrique en Volt/mètre (V/m)

$\rho$  : Densité de charge volumique en Coulomb/mètre cube (C/m<sup>3</sup>)

$\vec{i}$  : Densité de courant volumique en Ampère /mètre carré (A/m<sup>2</sup>)

### II. Lois Constitutives des milieux continus

Vide :

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  avec  $\mu_0$  : perméabilité du vide en Henry/mètre (H/m)

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  avec  $\epsilon_0$  : permittivité du vide en Faraday/mètre (F/m)

Milieu magnétique :

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$  avec  $\vec{J}$  : polarisation magnétique (T)

ou

$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$  avec  $\vec{M}$  : aimantation magnétique (A/m)

on a donc :

$$\vec{J} = \mu_0 \vec{M}$$

Dans le cas d'un matériau linéaire on a :  $\vec{J} = \mu_0 \chi \vec{H}$  et  $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$  avec  $\chi = \mu_r - 1$  la susceptibilité magnétique,  $\mu_r$  la perméabilité relative et  $\mu$  la perméabilité.

Milieu diélectrique :

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  avec  $\vec{P}$  : polarisation électrique (C/m<sup>2</sup>)

Dans le cas d'un matériau linéaire on a :  $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  avec  $\epsilon_r$  la permittivité relative et  $\epsilon$  la permittivité.



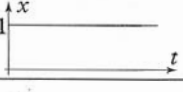
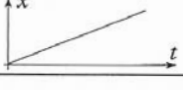


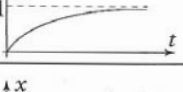
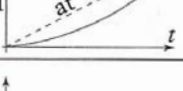
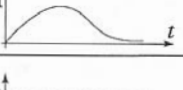
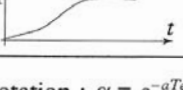
### III. Calcul vectoriel

Soit  $f$  une fonction scalaire et  $\vec{A}$  une fonction vectorielle, on définit les grandeurs scalaires et vectorielles  $grad \vec{A}$ ,  $rot \vec{A}$  et  $div \vec{A}$  dans un repère cartésien ou un repère cylindrique comme suit :

Repère cartésien et repère cylindrique

Repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$	repère cylindrique $(O, \vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$
$M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$	$M = \begin{bmatrix} R \\ \theta \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{A} = \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix}$
$grad \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \quad Rot \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix}$	$grad \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \quad Rot \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial (R A_\theta)}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \end{bmatrix}$
$div \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$div \vec{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial (R A_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

### IV. Transformées en z

Variation temporelle	$x(t)$	$X(p)$	$X(z)$
	$\delta(t)$	1	1
	$\delta(t - kT_e)$	$e^{-kT_e p}$	$z^{-k}$
	$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
	$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
	$t^2 \cdot u(t)$	$\frac{2}{p^3}$	$\frac{T_e^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$
	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p + a}$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$
	$(1 - e^{-at}) \cdot u(t)$	$\frac{a}{p(p + a)}$	$\frac{(1 - \alpha) z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}$
	$(at - 1 + e^{-at}) \cdot u(t)$	$\frac{a^2}{p^2(p + a)}$	$\frac{aT_e z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{(1 - \alpha) z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}$
	$te^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(p + a)^2}$	$\frac{T_e \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$
	$[1 - (1 + at) e^{-at}] \cdot u(t)$	$\frac{a^2}{p(p + a)^2}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} - \frac{aT_e \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$

Notation :  $\alpha = e^{-aT_e}$  où  $T_e$  est la période d'échantillonnage.



## IV. Identification selon le modèle de Broïda

### Méthode de Broïda

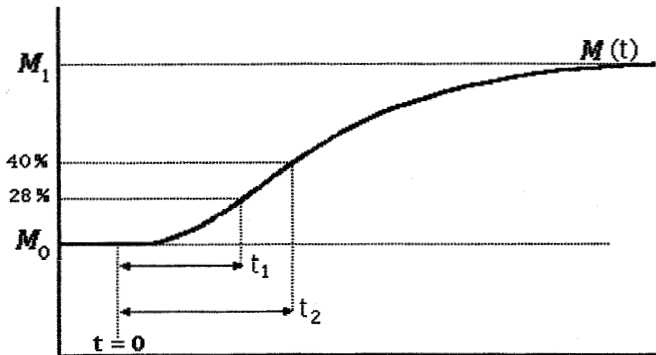
Méthode de Broïda

$$\tau = 5,5 \cdot (t_2 - t_1)$$

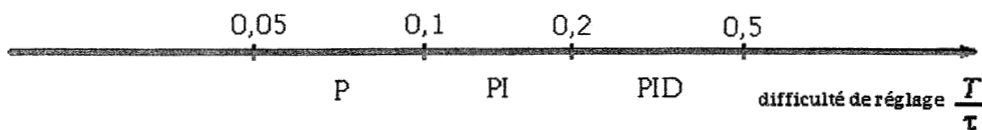
$$T = 2,8 t_1 - 1,8 t_2$$

on obtient graphiquement les valeurs de  $t_1$  et  $t_2$  à partir de l'enregistrement de la réponse indicielle.

NB Le repérage de l'instant  $t = 0$  est très important.



### Choix d'un mode de régulation



Réglage de Ziegler et Nichols : méthode des oscillations TOR  
tableau 1

Régulation paramètres	P	PI	PID
$X_p$ %	$O_{CC}$	$1,2 O_{CC}$	$0,8 O_{CC}$
$T_i$		$\frac{3}{4} T_0$	$0,5 T_0$
$T_d$			$0,1 T_0$

Réglage de Ziegler et Nichols : méthode d'identification préalable  
tableau 2

Régulation paramètres	P	PI	PID
$X_p$ %	$100 K \frac{T}{\tau}$	$120 K \frac{T}{\tau}$	$80 K \frac{T}{\tau}$
$T_i$		$3 T$	$2 T$
$T_d$			$0,4 T$