Troisième partie

Tuyaux sonores - Instruments à vent

Dans cette partie, on s'intéresse à la propagation d'ondes sonores dans l'air contenu dans une cavité possédant la symétrie de révolution autour de l'axe Oz.

L'air est assimilé à un gaz parfait non visqueux, de masse molaire $M = 29$ g.mol^{-1}. Le rapport entre les capacités thermiques à pression constante c_p et à volume constant c_v est $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = 1,4$. On prendra la constante des gaz parfaits égale à $R = 8,31$ J.K^{-1}.mol.$^{-1}$.

Au repos, l'état du fluide est décrit par la pression P_0 et la masse volumique μ_0.

En présence de l'onde sonore, l'état du fluide est décrit par :

- la pression $P(M,t) = P_0 + p_1(M,t)$;
- la masse volumique $\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$;
- la vitesse particulaire $\overrightarrow{u}(M,t)$.

A. Approximation des ondes sonores - Équation d'ondes

1. Préciser le cadre de l'approximation des ondes sonores en donnant des ordres de grandeurs pour la pression au repos P_0 et pour la surpression $p_1(M,t)$.

2. Quels sont les ordres de grandeurs :

- de la célérité du son dans l'air ?
- de la gamme de longueurs d'onde des ondes sonores dans le domaine audible ?

3. a) Écrire l'équation d'Euler.

b) Comparer l'ordre de grandeur de l'accélération de la pesanteur et celui de l'accélération locale pour une onde de fréquence de l'ordre du kilohertz et une vitesse particulaire de l'ordre de 1 mm.s^{-1}. Compte tenu de ce résultat, expliquer pourquoi malgré tout on ne tient pas compte du terme de pesanteur dans l'étude des ondes sonores.

c) Linéariser alors l'équation d'Euler dans le cadre de l'approximation des ondes sonores.

4. Établir la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} = \Delta p_1$$

5. On suppose le comportement du fluide décrit par une équation de la forme : $\mu = \mu(P)$.

a) Linéariser cette équation pour trouver une relation entre μ_1, p_1 et $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P}\right)_{p_1=0}$. En déduire que la surpression $p_1(M,t)$ vérifie une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta p_1$$

et donner l'expression de c en fonction de $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P}\right)_{p_1=0}$.

b) i) Comparer la durée caractéristique de diffusion thermique sur une longueur L et la durée caractéristique de variation des grandeurs comme la surpression sur la même longueur L en choisissant correctement la valeur de L. On donne la valeur numérique de la diffusivité thermique de l'air : $D_{\mathrm{th}} \simeq 2\ 10^{-5}$ m^2.s^{-1}.

ii) Conclure quant aux caractéristiques thermodynamiques de l'évolution des particules de fluide. En déduire l'expression de la célérité des ondes sonores en fonction de μ_0 et du coefficient de compressibilité isentropique de l'air au repos, χ_{S0}.

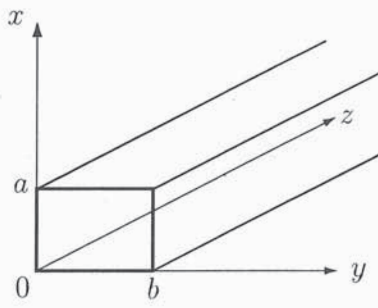
c) **i)** Dans le cas où l'air est assimilé à un gaz parfait, établir l'expression de c en fonction de la constante des gaz parfaits R, de la masse molaire de l'air M, de γ et de la température T.

ii) Effectuer l'application numérique à 20 °C. Conclure quant à la validité du modèle.

d) Proposer une expérience permettant de mesurer la célérité c du son dans l'air.

B. Propagation guidée dans une cavité infinie

Le tuyau dans lequel on étudie la propagation des ondes sonores est à section rectangulaire, de très grande longueur selon l'axe Oz :



1. Onde plane

On considère une onde plane décrite par la surpression $p_1(z,t)$.

a) Quelle condition doivent satisfaire les dimensions a et b pour que seule cette onde plane puisse se propager ?

b) Établir alors la relation entre la surpression et la vitesse particulaire pour une onde plane progressive dans le sens des z croissants puis pour une onde plane progressive dans le sens des z décroissants et enfin dans le cas général.

2. Modes propres de la cavité

On suppose que la condition précédente n'est pas vérifiée. Dans ce cas, on cherche des solutions de l'équation d'onde sous la forme :

$$\underline{p}_1(M,t) = X(x)Y(y)Z(z)\exp(j\omega t)$$

où $j^2 = -1$.

a) Montrer que les fonctions $X(x)$, $Y(y)$ et $Z(z)$ vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X(x)}\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -k_x^2 \\ \dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = -k_y^2 \\ \dfrac{1}{Z(z)}\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = -k_z^2 \end{cases}$$

où k_x, k_y et k_z sont trois constantes réelles.

Quelle est la relation entre k_x, k_y, k_z, ω et c ?

b) Quelles sont les conditions aux limites imposées par la présence des parois ?

c) En déduire que la surpression $\underline{p}_1(x,y,z,t)$ se met sous la forme :

$$\underline{p}_1(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \underline{p}_{n,m}(x,y,z,t)$$

avec

$$\underline{p}_{n,m}(x,y,z,t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\left(\underline{A}_{n,m}\exp\big(i(\omega t - k_z z)\big) + \underline{B}_{n,m}\exp\big(i(\omega t + k_z z)\big)\right)$$

où n et m sont deux entiers positifs ou nuls.

Le mode propre décrit par la surpression $\underline{p}_{n,m}(x,y,z,t)$ est appelé *mode* (n,m).

d) À quelle condition sur k_z l'onde se propage-t-elle dans le guide ? Montrer que la cavité se comporte comme un filtre passe-haut pour le mode (n,m) et déterminer la fréquence de coupure f_c de ce filtre.

e) i) On appelle λ_g la longueur d'onde de l'onde dans le guide et λ la longueur d'onde de l'onde de même pulsation se propageant dans un milieu illimité. Établir la relation entre λ_g, λ et λ_c où $\lambda_c = \dfrac{c}{f_c}$.

ii) Établir l'expression de la vitesse de groupe de l'onde dans le cas où elle se propage, en fonction de c, λ et λ_g. La comparer à c.

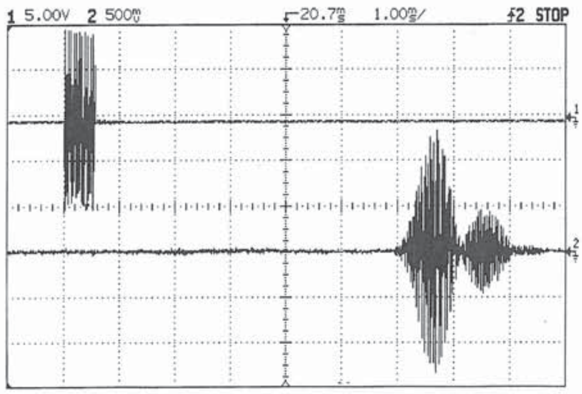
f) On suppose que $a < b$. Quelle est la plus basse fréquence pouvant se propager dans le tuyau pour un mode $(n,m) \neq (0,0)$? Effectuer l'application numérique pour $b = 1$ cm. Conclure quant à l'hypothèse d'une onde plane dans le tuyau.

g) Les instruments réels à section constante sont cylindriques, de rayon a. L'étude se fait de la même façon mais le résultat fait intervenir des fonctions de Bessel de première espèce. La fréquence de coupure la plus basse est alors : $f_c = \dfrac{1,84c}{2\pi a}$.

Effectuer l'application numérique pour un tuyau de rayon $a = 1$ cm. Reprendre la conclusion de la question précédente quant à l'hypothèse d'une onde plane dans le tuyau.

h) On étudie le mode particulier $(0,0)$. Écrire la surpression et la vitesse particulaire associée. On appellera A et B les constantes $A_{0,0}$ et $B_{0,0}$.

i) On réalise l'expérience suivante : un émetteur d'ultrasons envoie des trains d'onde de fréquence $f_e = 40$ kHz, de durée $\Delta t = 500$ μs, dans un tuyau cylindrique de diamètre 35 mm. Un récepteur est placé à l'autre extrémité du tuyau, sur l'axe de celui-ci, face à l'émetteur. La distance entre l'émetteur et le récepteur est $L = 201$ cm. On observe à l'oscilloscope les signaux suivants :



L'émetteur est relié à la voie 1 de l'oscilloscope, le récepteur à la voie 2.

i) Expliquer le signal observé au niveau du récepteur.

ii) Mesurer la vitesse de propagation des modes observés. Les résultats sont-ils qualitativement en accord avec l'étude théorique ?

C. Propagation dans une cavité de longueur finie. Impédance

On se place désormais dans l'hypothèse d'une onde plane, c'est-à-dire que l'on ne s'intéresse qu'au fonctionnement du tuyau en dessous de la première fréquence de coupure. Le tuyau a une section constante d'aire S. On note k le module d'onde et ω la pulsation de l'onde.

1. Impédance caractéristique

On définit l'impédance caractéristique du tuyau par la relation : $Z_c = \dfrac{p_1(z,t)}{Su(z,t)}$ pour une onde plane progressive dans le sens des z croissants.

Que représente la grandeur $Su(z,t)$?

Établir l'expression de Z_c en fonction de μ_0, S et c.

2. Impédance acoustique

On définit l'*impédance acoustique* $\underline{Z}_z$ en un point d'abscisse z par la relation :

$$\underline{Z}_z = \frac{\underline{p}_1(z,t)}{S\underline{u}(z,t)}$$

a) Établir l'équation suivante :

$$\underline{Z}_0 = Z_c \,\frac{\underline{Z}_L \cos(kL) + jZ_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) + j\underline{Z}_L \sin(kL)} \tag{5}$$

où $\underline{Z}_0$ et $\underline{Z}_L$ sont les valeurs de $\underline{Z}_z$ respectivement en $z = 0$ et en $z = L$.

b) Que devient $\underline{Z}_0$ si $\underline{Z}_L$ tend vers l'infini ? vers zéro ?

3. Fréquences d'une flûte et d'une clarinette

Pour les deux instruments, le tuyau est limité par les plans $z = 0$ et $z = L$. L'extrémité $z = L$ est ouverte. En première approximation, on suppose que l'impédance acoustique est nulle au niveau d'une extrémité ouverte.

a) Pour une flûte, l'extrémité $z = 0$ peut être considérée comme quasiment ouverte. Par contre, pour une clarinette, l'anche située en $z = 0$ se comporte comme un obstacle rigide.

i) En déduire les fréquences propres de la flûte.

ii) Que vaut alors l'impédance acoustique en $z = 0$ pour la clarinette ? En déduire les fréquences propres de cet instrument.

iii) Comment peut-on qualifier l'onde à l'intérieur du tuyau ? Que peut-on dire de la surpression en $z = 0$ pour chacun des instruments ? en $z = L$?

iv) Représenter la surpression à l'intérieur du tuyau pour les deux premiers modes de chacun des instruments.

v) Expliquer le rôle du *trou de registre* situé à la distance $L/3$ (environ) de l'extrémité $z = 0$ de la clarinette.

b) Déterminer la longueur approximative d'une flûte dont le fondamental est un mi de fréquence 330 Hz.

c) À longueur égale, quel instrument, flûte ou clarinette, produit le son le plus grave ? Comparer le timbre (c'est-à-dire les différents harmoniques émis) des deux instruments.

d) Comment évoluent les fréquences propres d'un instrument à vent quand la température augmente ? et celles d'un instrument à corde ?

4. Prise en compte de l'impédance de rayonnement

En réalité, une extrémité ouverte ne se comporte pas comme une impédance nulle. Il faut tenir compte de l'onde sonore rayonnée vers l'extérieur.

a) Justifier qualitativement ceci en exprimant la puissance sonore transmise à l'extrémité de l'instrument vers l'air extérieur.

Tournez la page S.V.P.

On étudie le cas d'un tuyau à section circulaire de rayon a. On suppose pour simplifier (et à peu près en accord avec les observations expérimentales) que l'onde rayonnée vers l'extérieur est sphérique. L'extrémité du tuyau se comporte en fait comme une source hémisphérique de rayon a.

b) On donne le laplacien d'une fonction $f(r,t)$ en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}$$

Quelle est alors la forme générale de la surpression dans l'air ?

Dans la suite, on ne considérera que des ondes sphériques harmoniques et on écrira la surpression sous la forme :

$$\underline{p}_1(r,t) = \frac{A}{r}\exp\big(j(\omega t - kr)\big)$$

c) En déduire l'expression du champ des vitesses puis celle de l'impédance acoustique $\underline{Z}_a$ en $r = a$, appelée *impédance de rayonnement*. Dans l'expression de l'impédance acoustique $\underline{Z}_a$, on prendra pour aire celle de la source, c'est-à-dire l'aire de la demi-sphère de rayon a.

d) Déterminer la puissance moyenne rayonnée par le tuyau vers l'extérieur.

e) On suppose $ka \ll 1$. Quelle est la signification concrète de cette hypothèse ?

Donner l'expression de $\underline{Z}_a$ successivement à l'ordre 0, 1 puis 2 en ka, et commenter les résultats obtenus. Pourquoi faut-il pousser le développement à l'ordre 2 ?

5. Application au son émis par une flûte.

On s'intéresse dans cette question au fonctionnement d'une flûte dont l'extrémité $z = 0$ correspond à une impédance nulle et l'extrémité $z = L$ à une impédance de rayonnement $\underline{Z}_a = Z_c(R + jX)$ où Z_c est l'impédance caractéristique du tuyau et R et X des réels sans dimension, dépendant de k et de a.

Par exemple, dans le cadre du modèle de la question précédente avec $ka \ll 1$, $R = \frac{1}{2}(ka)^2$ et $X = \frac{1}{2}ka$. Des modèles plus réalistes donnent $X = \alpha ka$ avec α variant de $0,61$ à $0,85$ selon le modèle.

On fera les hypothèses simplificatrices suivantes :

- $ka \ll 1$,
- X est proportionnel à ka (on prendra $X = \alpha ka$),
- R est proportionnel à $(ka)^2$,
- les fréquences propres du tuyau sont peu différentes de celles que l'on obtient dans le cas où on suppose $\underline{Z}_L = 0$ donc $\tan(kL) \ll 1$.

a) En utilisant la relation (5), déterminer l'expression de l'impédance acoustique en $z = 0$ en fonction de Z_c, R, X et $\tan(kL)$. La simplifier compte tenu des hypothèses ci-dessus.

b) Montrer que les nouvelles fréquences propres vérifient la relation :

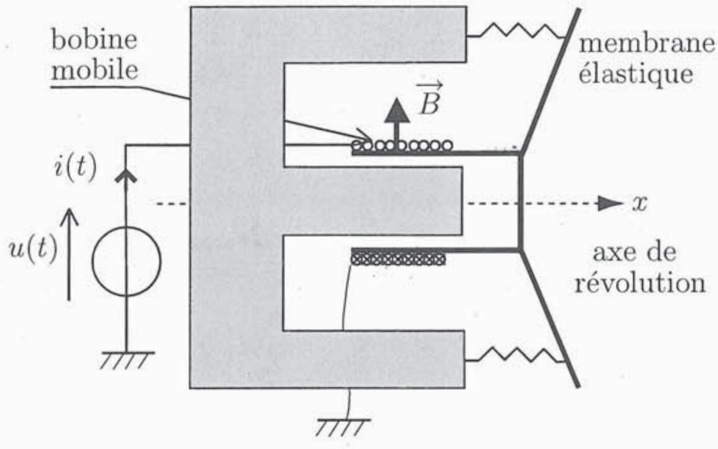
$$\tan(kL) = -\alpha ka$$

c) Par une étude graphique, montrer que les fréquences propres sont légèrement inférieures à celle qu'on obtient en considérant $\underline{Z}_L = 0$ (tuyau idéal). Expliquer pourquoi on peut ramener l'étude à celle d'un tuyau idéal à condition de remplacer la longueur L de celui-ci par une longueur $L + \Delta$ où $\Delta \simeq \alpha a$.

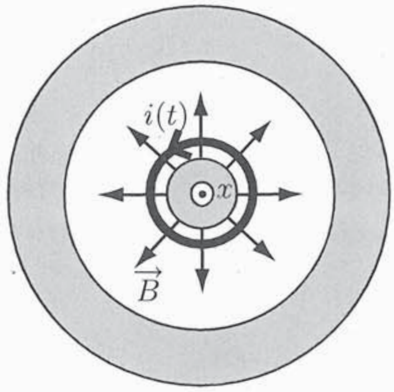
Quatrième partie

Restitution du son - Haut-parleur

Un haut-parleur électrodynamique peut être schématisé de la façon suivante :



Vue de côté



Vue de face

Il est constitué :

- d'un aimant annulaire d'axe Ox, créant un champ magnétique radial permanent $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_r}$ de norme quasiment uniforme B dans la région utile de l'entrefer ;
- d'une bobine indéformable de même axe Ox comportant N spires de rayon a, placée dans l'entrefer de l'aimant ;
- d'une membrane $\mathcal{M}$ perpendiculaire à l'axe et pouvant effectuer de faibles déplacements axiaux autour de sa position d'équilibre, grâce à un système élastique modélisé par un ressort unique de raideur k.

L'ensemble mobile {bobine + membrane}, de masse m, repéré par l'abscisse $x(t)$, est de plus soumis à une force de frottement visqueux de la part de l'air de la forme $\overrightarrow{F} = -f\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_x}$, essentiellement due à l'onde sonore rayonnée par le haut-parleur.

La bobine a une résistance R et une inductance L.

A. Équations du mouvement

1. Expliquer qualitativement le fonctionnement du dispositif.

2. Établir l'équation mécanique du système en choisissant l'origine de l'axe (Ox) au niveau de la position d'équilibre lorsque la bobine n'est parcourue par aucun courant.

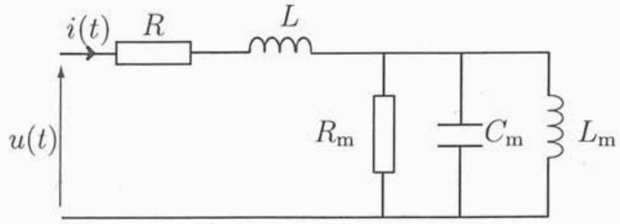
3. Le haut parleur est connecté à une source de tension parfaite délivrant la tension $u(t)$. Établir l'équation électrique du système.

B. Impédance du haut-parleur

La tension $u(t)$ est sinusoïdale : $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$.

1. a) Écrire l'équation électrique et l'équation mécanique en notation complexe.
En déduire que le schéma électrique équivalent du haut-parleur est :

Tournez la page S.V.P.



Établir les expressions de R_{m}, C_{m} et L_{m} en fonction de N, a, B, f, k et m.

b) Calculer les valeurs numériques de R_{m}, C_{m} et L_{m} pour un haut-parleur tel que :

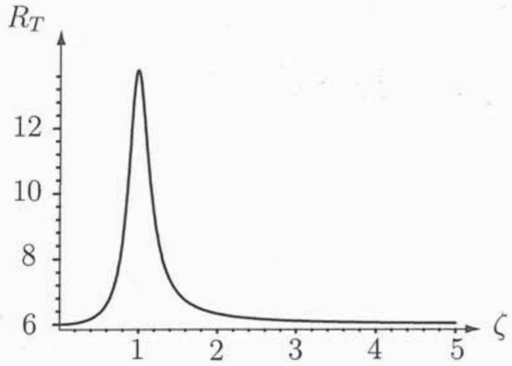
$$m = 3,85 \text{ g}, \quad k = 1200 \text{ N.m}^{-1}, \quad 2\pi NaB = 2,3 \text{ T.m}, \quad f = 0,68 \text{ kg.s}^{-1}.$$

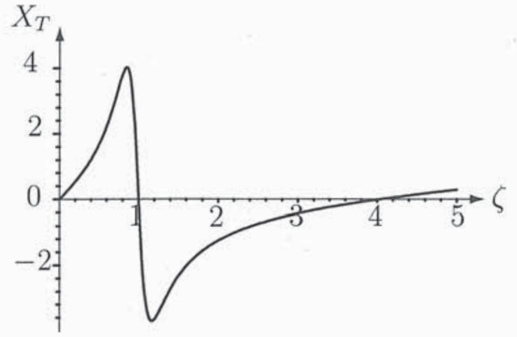
2. Proposer un montage permettant d'étudier expérimentalement l'impédance $\underline{Z}$ du haut-parleur en fonction de la fréquence délivrée par le générateur.

3. On pose $\underline{Z} = R_T + jX_T$ où $j^2 = -1$.

a) Donner l'expression de $R_T(\omega)$ et $X_T(\omega)$ en fonction de R, R_m, C_m, L_m et ω.

b) On pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\zeta = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Les courbes $R_T(\zeta)$ et $X_T(\zeta)$ pour le haut-parleur précédent ont l'allure suivante :





Il s'agit d'une simulation informatique pour laquelle, outre les valeurs numériques précédentes, on a pris : $R = 6\ \Omega$ et $L = 0,285$ mH.

Commenter ces courbes en précisant en particulier le comportement en très basse fréquence et en très haute fréquence et en étudiant les éventuelles résonances.

C. Rendement énergétique

1. Écrire l'énergie mécanique E_m du haut-parleur et l'énergie E_L de la bobine puis effectuer un bilan énergétique détaillé du dispositif.

2. Expliquer le rôle du champ magnétique dans le transfert de puissance.

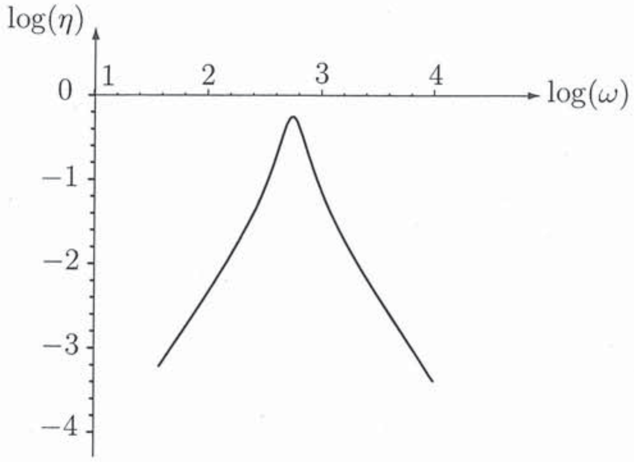
3. a) En régime sinusoïdal, comment se répartit la puissance moyenne fournie par le générateur ?

b) Définir alors le rendement η du haut-parleur et l'exprimer en fonction de R et R_T uniquement.

c) Pour le haut-parleur étudié ci-dessus dont les caractéristiques numériques sont données aux questions **B.**1b et **B.**3b, on donne la courbe $\eta(\omega)$ en échelle logarithmique (voir page suivante).

Commenter. Pour quelle fréquence le rendement est-il maximal ? Est-ce en accord avec les valeurs numériques précédentes ?

Dans quelle gamme de fréquence l'utilisation du haut-parleur est-elle intéressante ? Expliquer pourquoi les enceintes acoustiques comportent plusieurs haut-parleurs.



D. Onde acoustique rayonnée

1. On fait dans un premier temps l'hypothèse que l'onde acoustique émise par le haut-parleur est une onde plane progressive harmonique. D'autre part, la force exercée par l'air sur la membrane s'écrit $\overrightarrow{F} = -Sp\overrightarrow{e_x}$ où S est l'aire de la membrane et p la surpression. Dans cette étude, nous ne considérons que la surpression associée à l'onde émise par le haut-parleur du côté des x positifs.

En déduire l'expression du coefficient f en fonction de la célérité c des ondes sonores dans l'air, de la masse volumique de l'air μ_0 et de l'aire de la membrane S. En déduire un ordre de grandeur de S. Commenter.

2. La membrane du haut-parleur est assimilée à un disque de rayon a, d'axe Oz. On suppose que l'ensemble des points de la membrane vibrent en phase, avec la vitesse $v_0 \exp(j\omega t)$.

a) Quelle condition sur la taille de la membrane suppose cette hypothèse ?

b) On admet que chaque surface élémentaire $\mathrm{d}S_P$ autour d'un point P de la membrane se comporte comme une source élémentaire émettant une onde sonore dont la surpression en un point M de l'espace est :

$$\mathrm{d}\underline{p}_P(M,t) = \frac{j\omega\mu_0 v_0}{2\pi PM} \exp\left[j\omega\left(t - \frac{PM}{c}\right)\right] \mathrm{d}S_P \tag{6}$$

et que la surpression au point M est obtenue en sommant les surpressions émises par ces sources élémentaires. Dans l'expression (6), μ_0 est la masse volumique de l'air.

Établir l'expression de la surpression en un point $M(0,0,x)$ de l'axe du haut-parleur en fonction de μ_0, c, v_0, $k = \omega/c$, a et x.

c) **i)** Déterminer, en fonction de a et de λ (longueur d'onde des ondes émises), la position des points sur l'axe où le module de la surpression est maximal puis celle des points où il est minimal. Interpréter les résultats obtenus.

ii) À quelle condition sur a n'y a-t-il aucun extremum du module de la surpression sur l'axe ? Cette condition est-elle vérifiée en pratique ?

d) Que devient l'expression de $p(M,t)$ loin du haut-parleur ? Commenter.

e) Que devient l'expression de $p(M,t)$ au niveau du haut-parleur ? Commenter.

Fin