ministère
Éducation
nationale

EAI MAT 2
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2011

AGREGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

SECONDE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Dans tout le problème, les espaces vectoriels sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels.

▷ On note $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Cet espace vectoriel est muni de sa norme naturelle $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall \varphi \in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R}), \quad \|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |\varphi(x)| .$$

On sait que muni de cette norme, $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet).

▷ On note $BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions φ de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que φ et φ' soient bornées. On admettra qu'il s'agit d'un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{BC^1}$ définie par :

$$\forall \varphi \in BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}), \quad \|\varphi\|_{BC^1} = \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty .$$

▷ On rappelle que si E et F sont deux espaces vectoriels normés, un homéomorphisme de E sur F est une application bijective de E sur F, continue et dont la bijection réciproque est continue.

▷ On rappelle que si $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, une application linéaire $L : E \to F$ est continue si et seulement s'il existe une constante $C \in \mathbf{R}_+$ telle que pour tout $x \in E$,

$$\|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E .$$

Étant donnée une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on considère les applications (en général non linéaires) $\mathcal{N}_f : BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$, dont l'existence sera justifiée en **I-1.**, définies par :

$$\forall \varphi \in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R}), \quad \mathcal{N}_f(\varphi) = f \circ \varphi ,$$
$$\forall \varphi \in BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}), \quad \mathcal{L}_f(\varphi) = \varphi' + f \circ \varphi .$$

Le but du problème est d'étudier l'inversibilité de l'application $\mathcal{L}_f$, ce qui revient essentiellement à étudier les solutions bornées d'une équation différentielle de la forme $y' + f \circ y = h$, la fonction h étant elle-même continue et bornée sur $\mathbf{R}$.
On démontrera notamment un cas particulier du théorème suivant :

Théorème. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) L'opérateur $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est un homéomorphisme.
(ii) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un homéomorphisme.

La partie I fait établir plusieurs résultats utiles dans les parties suivantes.
La partie II propose une étude limitée au cas où f est linéaire.
La partie III propose l'étude de l'opérateur $\mathcal{N}_f : \varphi \mapsto f \circ \varphi$ et fait établir l'implication suivante : *si $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme, alors f est un homéomorphisme.*
La partie IV propose d'établir que $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme si f vérifie une hypothèse additionnelle (H) plus restrictive que la stricte monotonie.
Enfin, la partie V propose l'étude d'un exemple.

Partie I : Préliminaires

I-1. Existence de $\mathcal{N}_f$ et de $\mathcal{L}_f$
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

a) Soit $y \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Montrer que $f \circ y$ est continue et bornée.
On donne ainsi un sens à $\mathcal{N}_f$ comme application de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ dans lui-même.

b) Montrer de même que $\mathcal{L}_f$ est bien définie comme application de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vers $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

I-2. Un opérateur intégral
Soit $b \in \mathbf{R}_+^*$ et $g \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

a) Montrer que la formule

$$T_g(x) = e^{-bx} \int_{-\infty}^{x} e^{bs} g(s)\, ds$$

permet de définir une fonction T_g de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, solution sur $\mathbf{R}$ d'une équation différentielle linéaire que l'on écrira.

b) Donner un majorant de $\|T_g\|_{BC^1}$ en fonction de b et de $\|g\|_\infty$.

I-3. Caractérisation des homéomorphismes de R
L'objet de cette question est d'établir l'équivalence entre les assertions :
(i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et bijective.
(ii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur lui-même.

a) On suppose que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et injective. Soit $\Pi_+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x < y\}$ et Δ la fonction définie sur Π_+ par $\Delta(x, y) = f(x) - f(y)$. En étudiant le signe de Δ sur Π_+, démontrer que f est strictement monotone sur $\mathbf{R}$.

b) Justifier que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et bijective, alors f^{-1} est continue.

c) Conclure.

I-4. Solutions d'une équation différentielle non linéaire
Soit y une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad y' + f \circ y = h\,,$$

où f désigne une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et h une fonction de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
Démontrer que si y appartient à $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ alors elle est aussi dans $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Partie II : Le cas linéaire

Soient une fonction $h \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et un nombre $a \in \mathbf{R}$ fixés. Dans toute cette partie, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(\mathcal{E}_L) \qquad y' + ay = h\,.$$

On rappelle que les solutions (maximales) de $(\mathcal{E}_L)$ sont définies sur $\mathbf{R}$. On cherche à savoir s'il existe des solutions y de $(\mathcal{E}_L)$ qui appartiennent à $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

II-1. On suppose dans cette question que $a = 0$.

a) La fonction h étant donnée, montrer que :
▷ ou bien toutes les solutions de $(\mathcal{E}_L)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sont bornées ;
▷ ou bien aucune des solutions de $(\mathcal{E}_L)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ n'est bornée.

Tournez la page S.V.P.

b) Montrer que chacun de ces deux cas peut se produire.

II-2. L'objectif de cette question est de montrer que si a est non nul alors l'équation $(\mathcal{E}_L)$ admet une solution bornée sur **R** et une seule.

a) On suppose que $a > 0$.
En utilisant la question **I-2.**, mettre en évidence une solution y_0 de $(\mathcal{E}_L)$ qui appartient à $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Donner un majorant de $\|y_0\|_{BC^1}$ en fonction de $\|h\|_\infty$ et de a.

b) Démontrer que si $a > 0$ alors $(\mathcal{E}_L)$ possède une et une seule solution bornée sur **R**.

c) On suppose que $a < 0$. Démontrer que $(\mathcal{E}_L)$ possède une et une seule solution bornée sur **R**. On pourra introduire la fonction z telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $z(x) = y(-x)$.

II-3. On considère la fonction $f : x \mapsto ax$ de **R** dans lui-même et on définit l'application linéaire $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ par l'expression : $\mathcal{L}_f(y) = y' + ay$.
Démontrer que f est un homéomorphisme si et seulement si $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme.

Partie III : À propos des opérateurs $\mathcal{N}_f$ et $\mathcal{L}_f$

Dans cette partie, f désigne une fonction continue de **R** dans **R**.
Pour les questions **III-2.** et **III-4.**, on note, pour tout réel α, $h_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction constante $x \mapsto \alpha$.

III-1. Continuité de l'opérateur $\mathcal{N}_f$
On veut établir que $\mathcal{N}_f : BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est continu. Soit $g \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, et $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ convergeant vers g au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

a) Justifier l'existence du nombre réel $\rho = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \|g_n\|_\infty$ et montrer que $\|g\|_\infty \leqslant \rho$.

b) En utilisant la restriction de f à $[-\rho, \rho]$, montrer que $\mathcal{N}_f(g_n)$ tend vers $\mathcal{N}_f(g)$ (au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$) lorsque n tend vers $+\infty$. Conclure.

III-2. Cas où $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme
On souhaite établir dans cette question que f est un homéomorphisme si et seulement si $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme.

a) On suppose d'abord que f est un homéomorphisme.
Vérifier que $\mathcal{N}_f$ est bijectif et que $\mathcal{N}_f^{-1} = \mathcal{N}_{f^{-1}}$. En déduire que $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme.

b) Réciproquement, on suppose que l'opérateur $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ sur lui-même. Soit $y \in \mathbf{R}$ arbitraire ; justifier l'existence de $\xi \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $\mathcal{N}_f(\xi) = h_y$. Démontrer que ξ est constante (on pourra introduire, pour $a \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction η définie par $\eta(x) = \xi(x + a)$ et considérer $\mathcal{N}_f(\eta)$). En déduire que f est un homéomorphisme de **R** sur **R**.

III-3. L'opérateur différentiel $\mathcal{L}_f$
Démontrer que $\mathcal{L}_f$ est une application continue de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vers $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

III-4. Cas où $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme
Dans cette question, on suppose que l'opérateur $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ sur $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

a) Soit $y \in \mathbf{R}$ et soit $\xi \in BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $\mathcal{L}_f(\xi) = h_y$. Montrer que ξ est une fonction constante.

b) Démontrer que f est surjective.

c) Démontrer que f est injective.

d) En déduire que f est un homéomorphisme de **R** sur **R**.

Partie IV : Un problème de point fixe

Dans cette partie, on considère une fonction continue $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

▷ **Rappel :** une fonction f réelle de variable réelle est dite k–lipschitzienne (k étant un réel positif fixé), ou encore lipschitzienne de rapport k, si on a

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| .$$

▷ On dira que f satisfait la propriété (H) s'il existe deux nombres réels m et M, *strictement positifs*, et tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x \neq y) \Rightarrow \left(m \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant M \right) .$$

On notera qu'on a nécessairement $m \leqslant M$.

IV-1. Dans cette question seulement, on suppose que f est dérivable sur $\mathbf{R}$; donner une condition nécessaire et suffisante pour que f satisfasse la propriété (H).

On suppose dans toute la suite de la partie **IV** que f satisfait la propriété (H).

IV-2. Démontrer que f est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

IV-3. On pose $k = \frac{m+M}{2}$, et on introduit la fonction réelle de variable réelle $F_k : x \mapsto f(x) - kx$. Démontrer que F_k est lipschitzienne d'un rapport L que l'on déterminera.

IV-4. Soit h et φ deux éléments de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Démontrer que la fonction $s \mapsto -F_k(\varphi(s)) + h(s)$ est bornée sur $\mathbf{R}$. En déduire que la fonction G qui à h et φ fait correspondre

$$G(h,\varphi) : x \mapsto e^{-kx} \int_{-\infty}^{x} e^{ks}\Big(-F_k(\varphi(s)) + h(s)\Big)\,\mathrm{d}s$$

est bien définie et que $G(h,\varphi)$ appartient à $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

IV-5. Démontrer que les applications partielles $\varphi \mapsto G(h,\varphi)$ (pour $h \in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ fixée) et $h \mapsto G(h,\varphi)$ (pour $\varphi \in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ fixée) sont lipschitziennes ; on précisera leurs rapports en fonction de L et k.

IV-6. Démontrer que $G(h,\varphi)$ appartient à $BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et que

$$G(h,\varphi)' = k(\varphi - G(h,\varphi)) - f \circ \varphi + h .$$

IV-7. Soient deux fonctions h et φ dans $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Démontrer que la relation $G(h,\varphi) = \varphi$ a lieu si et seulement si φ appartient à $BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et que $\mathcal{L}_f(\varphi) = h$.

IV-8. L'opérateur $\mathcal{L}_f$ comme bijection
Soit une fonction $h \in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Démontrer que $\varphi \mapsto G(h,\varphi)$ a un unique point fixe dans $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. En déduire que l'opérateur $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est une bijection.

IV-9. L'opérateur $\mathcal{L}_f$ comme homéomorphisme

a) Soient $h_1, h_2, \varphi_1, \varphi_2$ des éléments de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tels que $\varphi_1 = G(h_1,\varphi_1)$ et $\varphi_2 = G(h_2,\varphi_2)$. Déduire de la question **IV-5.** qu'il existe un réel $r > 0$ vérifiant l'inégalité suivante :

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \leqslant r\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty + \frac{1}{k}\|h_1 - h_2\|_\infty .$$

b) Démontrer que l'opérateur $\mathcal{L}_f^{-1} : BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est lipschitzien ; on précisera son rapport.

c) En déduire que l'opérateur $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est un homéomorphisme.

Partie V : Un exemple

On s'intéresse à l'équation :

$$(\mathcal{F}) \qquad \varphi' + (2\varphi + \sin^2(\varphi)) = h\ ,$$

où h est une fonction continue et bornée sur $\mathbf{R}$.

V-1. Vérifier que les résultats de la partie **IV** s'appliquent.

V-2. On suppose dans cette question que h est constante.
Existe-t-il une solution bornée non constante de $(\mathcal{F})$?

V-3. On revient au cas général (h arbitraire dans $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$).

a) Montrer que l'équation $(\mathcal{F})$ a une unique solution bornée φ_0.

b) Soit φ une solution maximale de $(\mathcal{F})$, a priori définie sur un intervalle ouvert $J =]u, v[$. Démontrer que $\varphi' + 2\varphi$ est bornée sur J.

c) On suppose que v est fini. On introduit la fonction γ telle que, pour tout $x \in J$, $\gamma(x) = e^{2x}\varphi(x)$. Démontrer que γ admet une limite à gauche au point v, et en déduire une contradiction.

d) Déduire de ce qui précède que $J = \mathbf{R}$ et que φ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

V-4. On prend désormais $h = \sin$. Soit φ une solution arbitraire de l'équation $(\mathcal{F})$ distincte de φ_0. On note $\psi = \varphi - \varphi_0$.

a) Démontrer que la fonction φ_0 est périodique (on donnera une période de φ_0).

b) Démontrer qu'il existe une fonction w de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que ψ vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \psi'(x) + 2\psi(x) = w(x)\ .$$

Démontrer que ψ ne s'annule pas.

c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad |\psi(x)| \leqslant |\psi(0)| e^{-x}\ .$$

d) Trouver une constante $\alpha \in \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall c \in \mathbf{R}, \quad \exists (x_1, x_2) \in [c; +\infty[^2, \quad \varphi(x_1) < \alpha < \varphi(x_2)\ .$$

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

——————— FIN DU SUJET ———————

IMPRIMERIE NATIONALE – 11 0379 – D'après documents fournis