

SESSION 2013

---

AGRÉGATION  
CONCOURS INTERNE  
ET CAER

Section : PHYSIQUE - CHIMIE

COMPOSITION SUR LA PHYSIQUE  
ET LE TRAITEMENT AUTOMATISÉ DE L'INFORMATION

Durée : 5 heures

---

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB :** *La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

## Indications générales :

- Les vecteurs sont notés en caractères gras. Par exemple la norme du vecteur  $\mathbf{A}$  sera notée  $A = \|\mathbf{A}\|$

# À la recherche des ondes gravitationnelles

Cette composition, dont le thème central est la mise en évidence des ondes gravitationnelles, est constituée de deux parties indépendantes.

- Dans une première partie, on étudie le système binaire de deux étoiles compactes découvert par Hulse et Taylor en 1974 qui met en évidence de façon indirecte l'existence d'ondes gravitationnelles.
- La seconde partie porte sur un dispositif de détection directe d'ondes gravitationnelles par une technique interférométrique qui pourrait permettre d'ouvrir une nouvelle fenêtre observationnelle sur l'Univers.

## I Le système binaire PRS 1913+16

On étudiera dans cette première partie quelques caractéristiques d'un système de deux étoiles à partir d'informations générales contenues dans un texte documentaire et des données de Hulse et Taylor (*Discovery of a pulsar in a binary system*, Hulse and Taylor, *Astro. Phys. Journal* **195**, L51-L53, 1975).

### I.1 Quelques informations sur l'objet céleste répertorié sous la désignation : PSR B1913+16.

#### I.1.1 Analyse d'un document

Le questionnement de la première partie de l'épreuve (partie I) s'appuie sur les informations données dans le document 1 et utilise les données rassemblées dans les annexes A.1, A.3, A.4 et A.5

On répondra aux questions Q1 à Q7 après avoir pris connaissance du document 1.

- Q1.** Donner la définition d'une année-lumière. Dédire de cette définition sa valeur en unités SI.
- Q2.** Qu'appelle-t-on « Voie lactée » ? Quel est l'ordre de grandeur de ses dimensions en années-lumière ? Comparer la distance séparant le pulsar 1913+16 de la Terre à celle séparant le Soleil de la Terre.
- Q3.** Quels sont ces « instruments actuels » qui peuvent permettre de détecter les pulsars ?
- Q4.** Peut-on affirmer que le pulsar existe au moment de son observation, en 1974 ?
- Q5.** Calculer, d'après les données du texte, un ordre de grandeur de la masse volumique d'un pulsar. Proposer alors une justification de l'appellation « *d'étoile à neutrons* » en utilisant les données de l'annexe A.1.
- Q6.** Si le document 1 était donné à lire à des élèves de classe de terminale S, il serait certainement utile de s'assurer de leur bonne compréhension du texte, dès la lecture du premier paragraphe. Les expressions suivantes : « *sources radios* », « *après avoir consommé tout son carburant nucléaire* », « *s'effondre* », sont chargées d'implicite. Rédiger, pour chacune de ces expressions, une ou plusieurs questions écrites à poser aux élèves qui leur permettent d'en décoder le sens physique. Rédiger également, en quelques lignes, les réponses attendues.

- Q7. Ce texte laisse entendre que la découverte du pulsar est le fruit du hasard. Pensez-vous qu'il faille conforter les élèves dans cette vision de l'élaboration du savoir scientifique par les chercheurs ? Argumenter votre réponse à l'aides d'exemples décrits brièvement.

#### Document 1 – Les pulsars

*Le premier pulsar a été découvert en 1967. Il s'agit d'une étoile à neutrons, c'est-à-dire une étoile arrivée à l'ultime étape de son évolution ; l'étoile, après avoir consommé tout son carburant nucléaire, s'effondre sous l'action des forces gravitationnelles. Elle renferme alors une masse proche de celle du Soleil, dans une sphère de quelques dizaines de kilomètres de diamètre.*

*Un pulsar tourne sur lui-même à une fréquence qui peut aller jusqu'à plusieurs centaines de tours par seconde et émet un fort rayonnement électromagnétique dans la direction de son axe magnétique. Comme celui-ci n'est en général pas parfaitement aligné avec l'axe de rotation, le pulsar émet un faisceau qui balaie un cône au cours du temps, un peu à la manière d'un phare côtier. Un pulsar se signale donc pour un observateur situé sur son cône d'émission par un signal périodique, dont la période est la période de rotation de l'astre. Un pulsar est une horloge naturelle très stable au cours du temps. Les astronomes ont aujourd'hui recensé presque 1800 pulsars dans la Voie lactée.*

*C'est en 1974, au cours d'une recherche systématique des sources radios stellaires, que les radioastronomes Hulse et Taylor découvrirent le pulsar PSR B1913+16 situé à une distance de  $2,3 \times 10^4$  années-lumière (al) de la Terre. Celui-ci présente une variation cyclique inhabituelle de sa période qu'ils attribuèrent à la présence d'un compagnon invisible avec les instruments actuels. La masse de ce compagnon, connue très précisément, suggère qu'il s'agit aussi d'une étoile à neutrons qui pourrait éventuellement être un pulsar, mais dont le faisceau d'émission ne balaierait pas notre système solaire. PSR B1913+16 est le premier représentant découvert de la classe des pulsars binaires.*

*Il est aussi l'un des plus étudiés, du fait de ses caractéristiques orbitales très intéressantes. En effet, l'orbite de ce système est extrêmement resserrée, les deux astres orbitant dans un volume qui pourrait presque être compris à l'intérieur du Soleil, sa période orbitale étant voisine de 7,75 heures. Le pulsar et son compagnon suivent des orbites elliptiques autour de leur centre de masse. Chaque étoile se déplace sur son orbite en accord avec les lois de Kepler : à tout instant les 2 étoiles se situent aux extrémités d'un segment passant par le centre de masse.*

*L'étude de ce pulsar, poursuivie durant de nombreuses années, a permis de mettre en évidence une diminution progressive de la période orbitale du système, correspondant à un resserrement des orbites, qu'on attribue à une perte d'énergie par rayonnement d'ondes gravitationnelles. Cette découverte, qui valide de façon indirecte la théorie de la relativité générale, valut le prix Nobel en 1993 aux deux découvreurs.*

#### I.1.2 Estimation de la taille d'un pulsar

On suppose qu'une étoile est une sphère homogène de masse  $M$  et de rayon  $R$ , assimilable à un solide en rotation autour d'un axe passant par son centre, avec une vitesse angulaire  $\Omega$ .

- Q8. Ces hypothèses sont-elles réalistes ?

- Q9. À partir de la définition du moment d'inertie  $I$  d'un solide par rapport à son axe de rotation, montrer, par exemple par analyse dimensionnelle, que le moment d'inertie de l'étoile s'écrit sous la forme

$$I = kM^\alpha R^\beta$$

où  $k$  est une constante qu'on ne cherchera pas à expliciter, et  $\alpha$  et  $\beta$  des nombres entiers dont on établira les valeurs.

Donner l'expression du moment cinétique  $L$  de l'étoile en fonction de  $I$  et de  $\Omega$ .

- Q10.** Une étoile à neutrons est l'ultime étape d'évolution d'une étoile lorsque celle-ci, après avoir consommé tout son carburant nucléaire, s'effondre sous l'action des forces gravitationnelles, passant d'une étoile de rayon  $R_i$ , voisin du rayon du Soleil, à un rayon  $R_f$  beaucoup plus petit.
- (a) Si on néglige la perte de masse qui a lieu au cours de cette transformation et que l'on considère l'étoile comme isolée, exprimer le rayon final  $R_f$  en fonction de  $R_i$  et des périodes de rotation  $T_i$  et  $T_f$  de l'étoile avant et après la contraction.
- (b) Application numérique : on prendra  $R_i = R_\odot$  rayon du Soleil,  $T_i = 25$  jours et  $T_f = 1$  ms. Calculer  $R_f$  et commenter ce résultat.

## I.2 Effet Doppler-Fizeau

### I.2.1 Théorie

- Q11.** Indiquer deux exemples d'effet Doppler, l'un tiré de l'acoustique (effet Doppler proprement dit) et l'autre de l'optique (ou effet Doppler-Fizeau).
- Q12.** Quelle théorie repose sur l'hypothèse que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels galiléens ? Sur quelle autre hypothèse, impliquant les lois de la physique, cette théorie repose-t-elle également ?
- Q13.** On considère une source émettant périodiquement des impulsions et on suppose que cette source est en mouvement à la vitesse  $v$  constante en direction d'un observateur au repos dans le référentiel d'étude. On suppose  $v \ll c$  pour négliger tout effet relativiste, ce qui permet de mener les calculs dans le cadre de la physique classique. Soit  $T_p$  la période du signal mesurée dans un référentiel où la source est au repos et  $T'_p$  la période mesurée par l'observateur. Montrer que ces deux périodes sont reliées par la relation

$$T'_p = T_p \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

- Q14.** Vérifier que cette relation permet de rendre compte de l'effet Doppler-Fizeau mentionné plus haut.
- Q15.** On suppose à présent que le déplacement de la source se fait à une vitesse  $\mathbf{v}$  qui n'est pas colinéaire au vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  qui relie la source à l'observateur. Montrer que la variation relative de la période mesurée par l'observateur s'écrit

$$\frac{\Delta T_p}{T_p} = \frac{T'_p - T_p}{T_p} = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c}$$

En déduire la variation de longueur d'onde correspondante

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c}$$

- Q16.** Comment expliquer qualitativement la variation cyclique de la période du signal émis par le pulsar binaire PSR B1913+16 mentionnée dans le document 1 ?

### I.2.2 Mise en œuvre d'une activité expérimentale en classe de terminale S

Dans le cadre des programmes en vigueur (voir annexe A.5), un professeur souhaite faire réaliser à ses élèves de terminale S une détermination de la période de rotation de Jupiter autour d'elle-même à partir d'un traitement d'image réalisé avec un logiciel adapté. Il fait des recherches sur internet pour

obtenir des données d'observations astronomiques qui pourraient lui permettre de bâtir une activité d'exploitation de documents portant sur l'effet Doppler-Fizeau. Ce professeur trouve un site proposant des clichés de spectres de la lumière émise par la planète Jupiter réalisés par des astronomes amateurs et, notamment, l'image d'un spectre obtenu avec un télescope équipé d'un spectrographe à réseau de 2400 traits/mm, équipé d'une fente de largeur  $30\ \mu\text{m}$  alignée sur l'équateur de la planète Jupiter. Le spectre montre des raies inclinées et des raies droites, les deux plus contrastées étant identifiées comme les deux raies du sodium. Quelques commentaires des astronomes amateurs explicitent les données d'observation, le tout est rassemblé dans le document 2. Le professeur a exploité le cliché au moyen du logiciel de pointage d'image *SalsaJ* et les résultats de ses mesures figurent sur le document 3.

### Questions :

**Q17.** Quelques points importants devront être explicités aux élèves pour qu'ils parviennent à exploiter les informations contenues dans l'image. Répondre à ces questions :

- De quel type de spectre s'agit-il en comparaison avec les exemples qu'ils ont pu rencontrer au cours de leur scolarité ? Sachant qu'il n'y a pas d'atomes de sodium dans l'atmosphère de Jupiter, justifier la présence de ces raies de sodium dans le spectre observé.
- Proposer une expérience simple permettant de faire comprendre aux élèves comment il est possible, à l'aide d'un réseau, d'une part de visualiser le spectre d'émission d'une source et d'autre part de déterminer la longueur d'onde d'une raie de longueur d'onde inconnue si l'on connaît la longueur d'onde d'au moins deux raies présentes dans le même spectre. On s'appuiera sur un schéma du dispositif expérimental, et l'on s'attachera à souligner les analogies et les différences entre l'expérience proposée et le protocole retenu par les astronomes amateurs. Les hypothèses retenues pour l'exploitation quantitative du spectre seront explicitées.
- Pour une raie inclinée du spectre, quelles sont les parties de la raie associées au « bord » A et au « bord » B de la planète Jupiter ?
- Quel est le référentiel implicitement choisi pour déterminer la vitesse équatoriale de Jupiter ?
- Quelles justifications qualitatives peut-on formuler pour expliquer le facteur 4 dans la relation entre la vitesse équatoriale, l'écart de longueur d'onde et la longueur d'onde moyenne de la raie observée ?
- Déterminer la valeur de la vitesse équatoriale de Jupiter en conduisant l'exploitation que les élèves vont devoir faire avec le logiciel. Estimer l'incertitude de la mesure et en déduire un encadrement de la période de rotation de Jupiter autour d'elle-même. Comparer le résultat aux données numériques du document 2.

**Q18.** Concevoir une activité de deux heures environ destinée à des élèves de terminale S, utilisant les documents précédents. On fera l'hypothèse que les élèves disposent des prérequis nécessaires sur l'effet Doppler. La compétence exigible du programme particulièrement mobilisée dans l'activité à construire est la suivante : « *Mettre en œuvre une démarche expérimentale pour mesurer une vitesse en utilisant l'effet Doppler* ».

*Indications pour rédiger cette question :*

En 500 mots maximum et éventuellement quelques schémas :

- Préciser l'environnement matériel prévu pour cette séance, la gestion de classe envisagée, ainsi que les informations pratiques données aux élèves avant d'accomplir les tâches demandées.

**Document 2** – Commentaires sur le spectre de la lumière issue de l'équateur de Jupiter, reçue par la fente du spectroscopie et dispersée par le réseau.

On obtient un spectre dans lequel certaines raies d'absorption sont inclinées. Cela est provoqué par la rotation de la planète : le bord qui s'approche de nous voit son spectre décalé vers le bleu par rapport au centre de la planète, par effet Doppler-Fizeau. Le bord qui s'éloigne de la même façon voit son spectre décalé vers le rouge. À noter les autres raies présentes dans le spectre mais bien verticales : ce sont les raies d'absorption de l'atmosphère terrestre (raies telluriques) ; il est normal qu'elles ne soient pas inclinées puisque l'atmosphère est fixe par rapport à nous.

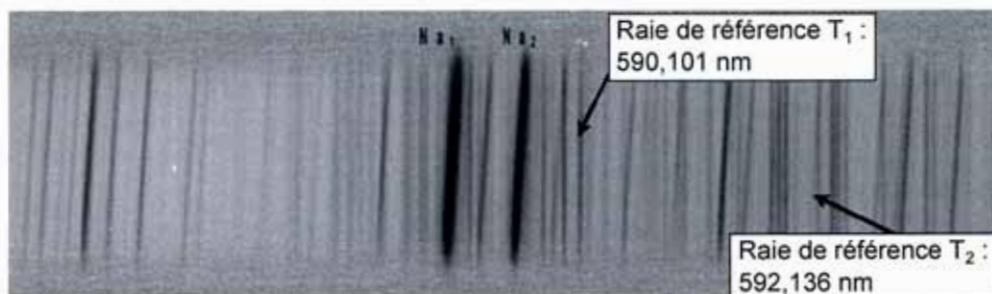
La simplicité de cette mesure tient, outre le faible temps de pose et la facilité de pointer l'objet, au fait que toute l'information est contenue dans l'image : c'est à l'inclinaison relative des raies de Jupiter par rapport à celles de l'atmosphère terrestre que l'on va s'attacher.

La période de rotation de Jupiter autour d'elle-même est de 9,92 heures, et son diamètre équatorial est de  $1,43 \cdot 10^5$  km. Au laboratoire, sur Terre, les raies du doublet du sodium ont pour longueur d'onde  $\lambda_1(\text{Na}) = 588,995$  nm et  $\lambda_2(\text{Na}) = 589,592$  nm.

En mesurant, avec un logiciel de traitement d'images le décalage de longueur d'onde aux deux bords extrêmes des raies inclinées, on peut calculer la vitesse d'un point de l'équateur de la planète par rapport au centre de la planète (qu'on nommera en raccourci vitesse équatoriale) par la relation :

$$V_e = \frac{1}{4} c \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

(a) Image du spectre recadré sur laquelle 2 raies telluriques connues sont repérées



(b) Positionnement de la fente du spectroscopie par rapport à l'équateur de Jupiter



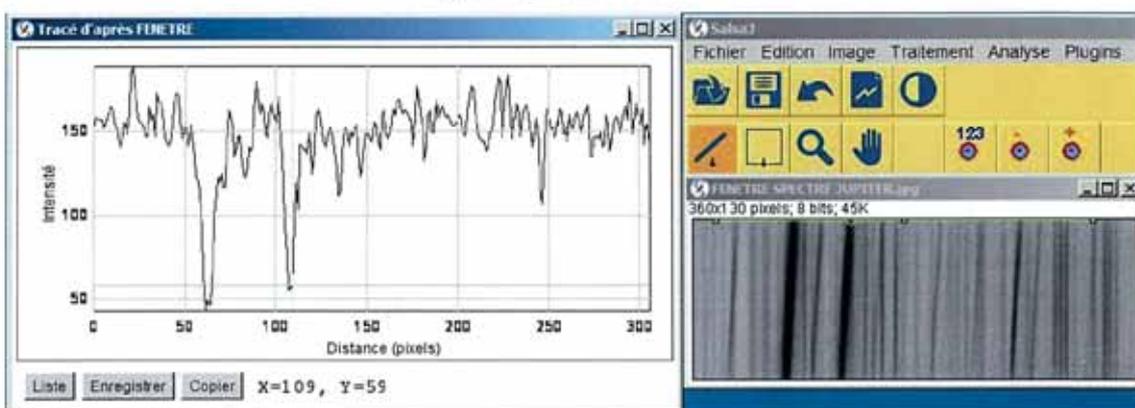
**Document 3** – Exploitation réalisée par le professeur avec le logiciel de traitement d'images SalsaJ 2.1

Développé dans le cadre du projet EU-HOU (Europe, Hands-On Universe), le logiciel gratuit SalsaJ permet aux élèves des collèges et lycées de s'initier au traitement et à l'analyse d'images en classe. À partir d'images d'astronomie obtenues par des télescopes professionnels, ou même directement depuis la classe avec des télescopes robotisés, les élèves peuvent découvrir des planètes, mesurer des cratères et des volcans, obtenir des « coupes » de spectres à partir d'une photographie, mesurer des longueurs d'ondes...

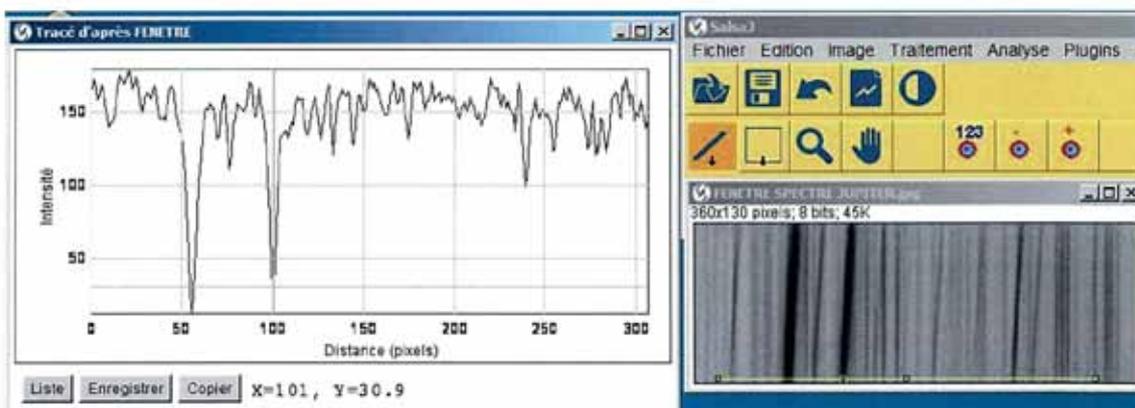
(a) Tableau d'étalonnage de l'écran

	Raie T1	Raie T2	Écart
Lecture en pixel	185	347	162
Longueur d'onde en nm	590,101	592,136	2,035

(b) Coupe haute du spectre



(c) Coupe basse du spectre



- Décrire les tâches demandées aux élèves en précisant les documents dont ils disposent. Rédiger les réponses attendues.

*Remarque :* Au cas où certains éléments correspondent à des réponses déjà écrites aux questions 17a à 17f, on évitera de les répéter en prévoyant alors de faire un renvoi vers la réponse donnée.

### I.3 Caractéristiques du système binaire

On se propose maintenant de déterminer les paramètres orbitaux du pulsar binaire.

#### I.3.1 Transformation du problème à deux corps en problème à un corps

On modélise le pulsar binaire par un système de deux étoiles de masse  $m_1$  et  $m_2$  supposées ponctuelles (1 désigne le pulsar et 2 son compagnon). On note  $G_1$  et  $G_2$  les centres de masse des 2 étoiles. On suppose de plus que les deux étoiles forment un système isolé du reste de l'Univers et agissent l'une sur l'autre au moyen de l'interaction gravitationnelle.

- Q19. Quels commentaires peut-on faire à des élèves de terminale S à propos des 2 hypothèses explicitées ci-dessus (étoiles supposées ponctuelles et système isolé) ?
- Q20. Rappeler l'expression de la force de gravitation universelle que chacune des étoiles exerce sur l'autre.
- Q21. Définir le centre de masse  $G$  du système et le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$  associé. Montrer que ce référentiel est un référentiel galiléen.
- Q22. Dans la suite, on se placera dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$ . Comment peut-on justifier ce choix ?
- Q23. Soit  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{GG}_1$  le vecteur position du pulsar et  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{GG}_2$  celui de son compagnon évalué dans  $\mathcal{R}^*$ . On notera  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  le vecteur position relative.
- (a) Montrer que l'étude du mouvement des deux étoiles se ramène à celui d'une particule fictive  $P$  de masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  soumise à une force centrale égale à la force  $\mathbf{F}$  qu'exerce l'étoile 2 sur l'étoile 1.
- (b) En déduire que les caractéristiques de la trajectoire du pulsar (resp. de son compagnon) se déduisent de celle de la particule fictive  $P$  par une homothétie dont on précisera le centre et dont on exprimera le rapport  $\eta$  (resp  $\eta - 1$  pour la particule 2) en fonction de  $m_1$  et  $m_2$ .
- Q24. Énergie et moment cinétique

- (a) Exprimer l'énergie mécanique  $E$  du système binaire dans  $\mathcal{R}^*$ . Montrer que celle-ci s'écrit à l'aide des paramètres de la particule fictive sous la forme

$$E = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 - \frac{k}{r}$$

où  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ,  $r = \|\mathbf{r}\|$  et  $k = Gm_1 m_2$ .

- (b) Exprimer le moment cinétique  $\mathbf{L}$  du système binaire et montrer que celui-ci s'écrit à l'aide des paramètres de la particule fictive

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mu \mathbf{v}$$

### I.3.2 Paramètres orbitaux

On admet que la trajectoire de la particule fictive introduite ci-dessus est une ellipse. En annexe, sont rappelées les propriétés essentielles des ellipses ainsi que les notations utilisées.

- Q25. Rappeler, dans le cadre du système solaire, l'énoncé des 3 lois de Kepler. Comment se situent chronologiquement les travaux de Kepler en comparaison des résultats connus en astronomie à son époque ? Décrire brièvement la démarche de Kepler pour aboutir à l'énoncé de ces lois.
- Q26. En utilisant le fait que le système est isolé, montrer que le mouvement de la particule fictive est contenue dans un plan.
- Q27. Par la suite on travaillera dans ce plan et on choisira un repère polaire  $(r, \theta)$  centré en  $G$ .
- (a) Démontrer la deuxième loi de Kepler (loi des aires).
- (b) On pose  $C = L/\mu$  avec  $L = \|\mathbf{L}\|$  le module du moment cinétique ; montrer que dans le cas d'une trajectoire elliptique on a la relation

$$C = \frac{2\pi}{T} ab$$

où  $a$  et  $b$  sont respectivement les demi-grand axe et demi-petit axe de l'ellipse de la *particule fictive* et  $T$  la période de révolution du système binaire.

- Q28. Troisième loi de Kepler. On considère le mouvement circulaire d'une masse  $m$  autour d'une masse  $M$  très supérieure à  $m$ . Établir que le rayon  $R$  de l'orbite et la période  $T$  de révolution sont reliés par

$$\frac{R^3}{T^2} = c^{ste}$$

où l'on exprimera la constante en fonction de  $G$ , de  $M$  et de constantes numériques.

On admettra que cette relation reste valable dans le cas d'un système binaire quelconque de trajectoire elliptique à condition de remplacer  $R$  par le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse et  $M$  par la masse totale du système binaire.

- Q29. L'observateur placé sur Terre est repéré par rapport au système binaire par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ , incliné d'un angle  $i$  par rapport à l'axe  $z$  perpendiculaire au plan de l'orbite (cf figure 1). L'étude complète des paramètres orbitaux montre de plus que le vecteur  $\mathbf{u}$  est situé dans le plan  $(yFz)$  avec une projection dans le plan orbital dirigée en sens opposé de l'axe  $Fy$ . Les axes  $x$  et  $y$  sont les axes « canoniques » de l'ellipse correspondant aux notations de l'annexe.

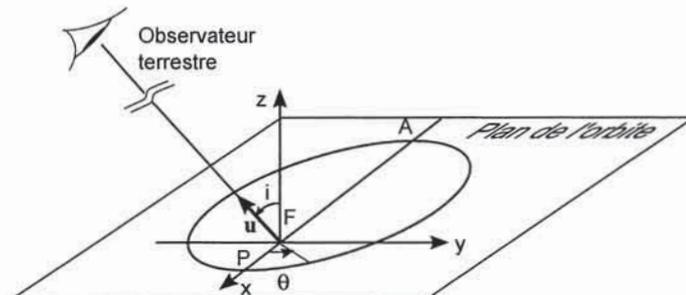


Figure 1 – Plan de l'orbite vu par un observateur terrestre

- (a) Établir que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  s'écrit

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = -K [e + \cos \theta]$$

où  $K = \frac{C \sin i}{p}$  et  $e$  est l'excentricité de l'orbite.

*Indications* : on montrera tout d'abord que la composante orthoradiale de la vitesse est  $v_\theta = \frac{C}{r}$ , puis, à l'aide de la relation 1 de l'annexe A.2 que la composante radiale de la vitesse est  $v_r = C \frac{\sin \theta}{p} e$ .

- (b) Montrer que l'on a la relation

$$K = \frac{2\pi a \sin i}{T\sqrt{1-e^2}}$$

où  $T$  est la période orbitale du système binaire.

- (c) On note  $\mathbf{v}_1$  la vitesse du pulsar et on définit sa vitesse radiale par  $V_{\text{rad}} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}$ . Montrer que

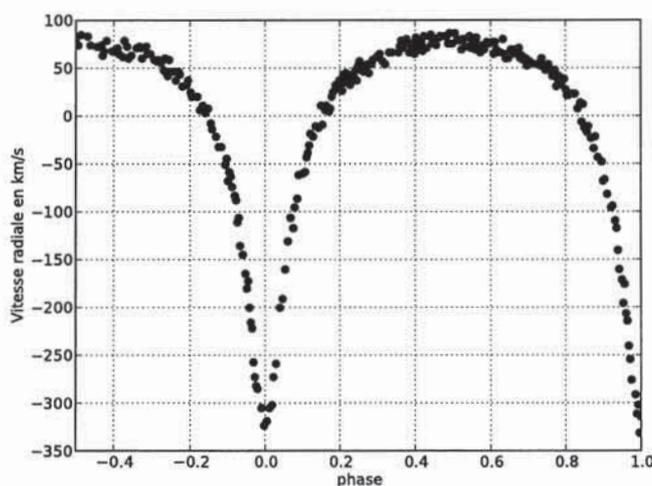
$$V_{\text{rad}} = -K_1 [e + \cos \theta]$$

avec

$$K_1 = \frac{2\pi a_1 \sin i}{T\sqrt{1-e^2}}$$

où  $a_1$  est le demi-grand axe de l'orbite du pulsar (et non de la particule fictive).

- Q30. Analyse du graphe donné par Hulse et Taylor.** (cf. figure 2) En abscisse est représentée la phase, c'est-à-dire le temps en unité de période de révolution  $T$  du système normalisé tel qu'à  $t = 0$  le pulsar est au périastre. En ordonnée est représentée la vitesse radiale mesurée en utilisant l'effet Doppler et exprimée en km/s.



**Figure 2** – Vitesse radiale du Pulsar PSR B1913+16, d'après l'article de Hulse et Taylor

- (a) Discuter qualitativement la forme de la courbe présentée.  
 (b) Déterminer la valeur de  $K_1$  et celle de l'excentricité  $e$  à partir de cette courbe.  
 (c) La période de révolution du système binaire est  $T = 7 \text{ h } 45 \text{ mn}$ . En déduire la valeur  $a_1 \sin i$  du produit du demi-grand axe de l'orbite du pulsar par le sinus de l'inclinaison de l'orbite par rapport à l'observateur.

**Q31.** Un paramètre important caractéristique des systèmes binaires est la fonction de masse  $f$  définie par la relation :

$$f = \frac{(m_2 \sin i)^3}{M^2}$$

(a) À partir de l'expression de  $K_1$  en fonction de  $a_1 \sin i$ ,  $T$  et  $e$  établie plus haut et la troisième loi de Kepler, montrer que

$$f = \frac{T}{2\pi G} K_1^3 (1 - e^2)^{3/2}$$

(b) En utilisant les valeurs numériques de  $K_1$  et  $e$  déterminées plus haut montrer que

$$f = 0,13 M_\odot$$

où on rappelle que  $M_\odot$  est la masse du Soleil.

(c) On a pu mesurer un peu plus tard que  $i = 46^\circ$ . En faisant l'hypothèse que  $m_1 = m_2$ , en déduire la masse du pulsar en unité de masse solaire.

## I.4 Ondes gravitationnelles

L'étude sur une dizaine d'années de ce système binaire a montré une diminution de la période orbitale correspondant à un resserrement de l'orbite du pulsar que l'on a pu attribuer à une perte d'énergie par rayonnement d'ondes gravitationnelles. Afin de retrouver un ordre de grandeur de cette diminution de la période orbitale, on se placera dans l'hypothèse simplificatrice d'une orbite circulaire et d'une masse identique pour le pulsar et son compagnon :  $m_1 = m_2 = m$ . Pour les applications numériques on prendra  $m = 1,4 M_\odot$ .

### I.4.1 Pertes par rayonnement

On montre en relativité générale que la puissance rayonnée  $P_r$  d'ondes gravitationnelles d'un système de moment cinétique  $L$  et tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  s'écrit

$$P_r = \frac{32GL^2\omega^4}{5c^5}$$

où  $G$  est la constante de gravitation universelle et  $c$  la vitesse de la lumière.

**Q32.** On note  $R$  la distance entre les deux étoiles du système binaire et on suppose pour le moment que le mouvement est parfaitement circulaire.

*Remarque :* on pourra utiliser les résultats de la question 24

(a) Montrer que le moment cinétique du système s'écrit avec ces hypothèses

$$L = \frac{m}{2} R^2 \omega$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire de rotation que l'on exprimera en fonction de la période de révolution  $T$ .

(b) Montrer que l'énergie totale du système s'écrit

$$E = -\frac{Gm^2}{2R}$$

(c) Montrer que  $R$  et la période de révolution  $T$  sont reliés par la relation

$$R = \left( \frac{Gm}{2\pi^2} \right)^{1/3} T^{2/3}$$

En déduire l'expression de l'énergie totale en fonction de  $T$

**Q33.** On tient compte à présent de la perte d'énergie par rayonnement.

- (a) Relier la perte d'énergie du système  $\frac{dE}{dt}$  à la puissance rayonnée.
- (b) Évaluer la perte d'énergie sur une révolution et la comparer à l'énergie totale du système.
- (c) En précisant la nature de l'approximation effectuée, déduire le taux de variation de la période orbitale du pulsar

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{384 \pi^2 (2\pi^2)^{1/3}}{5 c^5} \left( \frac{Gm}{T} \right)^{5/3}$$

(d) Application numérique : on prendra  $m = 1,4M_\odot$  et  $T = 7 \text{ h } 45 \text{ mn}$  qui est la période orbitale actuelle.

On notera  $\dot{P}_b \equiv \frac{dT}{dt}$  ce taux de variation de  $T$  évalué pour la période de révolution actuelle. Comparer et commenter les éventuels écarts avec la valeur mesurée :

$$\dot{P}_b = 2,4 \times 10^{-12}$$

#### I.4.2 Test du modèle

On appelle « décalage cumulé de la période » (*cumulative shift of period*) l'effet cumulé de la diminution de la période de rotation du système dû à la perte d'énergie par rayonnement gravitationnel depuis le moment de la première observation.

On note  $T_0 = 7 \text{ h } 45 \text{ mn}$  la période de rotation à l'instant  $t = 0$  pris comme origine de la première observation (année 1975) et  $T_k$  la période de la  $k^{\text{ième}}$  rotation comptée à un instant  $t_k$  d'observation. Ainsi on écrira d'après les notations de la question précédente

$$T_k = T_0 - \dot{P}_b t_k$$

On gardera à l'esprit que la période de rotation est très courte au regard des durées d'observation du phénomène : plusieurs mois et à présent plusieurs dizaines d'années.

**Q34.** Si on note  $\Delta t_N$  le « décalage cumulé de la période » à l'instant  $t_N$  d'observation de la  $N^{\text{ième}}$  rotation, montrer que

$$\Delta t_N = -\frac{\dot{P}_b t_N^2}{2 T_0}$$

**Q35.** Vérifier que ce résultat est compatible avec les données de la figure 3. Conclure.

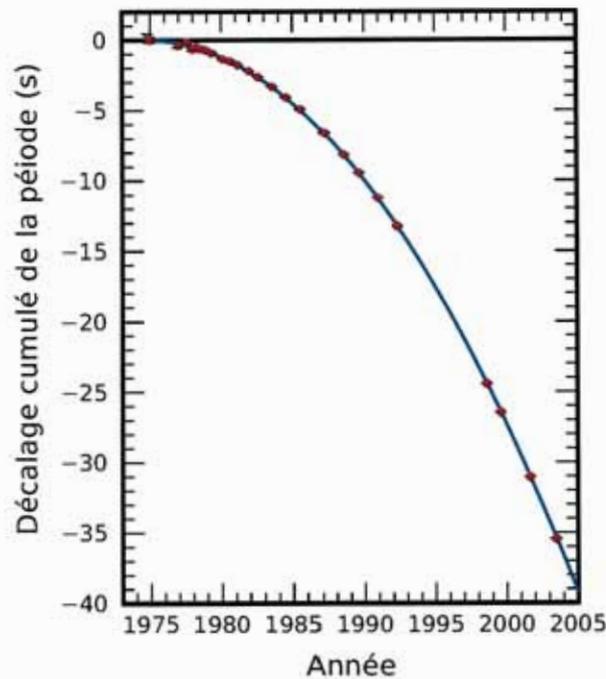


Figure 3 – « décalage cumulé de la période » d'après l'article de Weisberg et Taylor<sup>1</sup>

## II Détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles

Une onde gravitationnelle est une perturbation de la métrique qui se propage à la vitesse de la lumière. L'effet physique associé est donc une variation de la mesure de la distance  $L$  entre deux masses test lors du passage de l'onde.

Le passage d'une onde gravitationnelle a pour effet de déformer de façon différentielle un objet comme représenté de façon schématisée sur la séquence de la figure 4. On observe que lorsque les longueurs s'allongent dans une direction, elles rétrécissent dans la direction perpendiculaire.

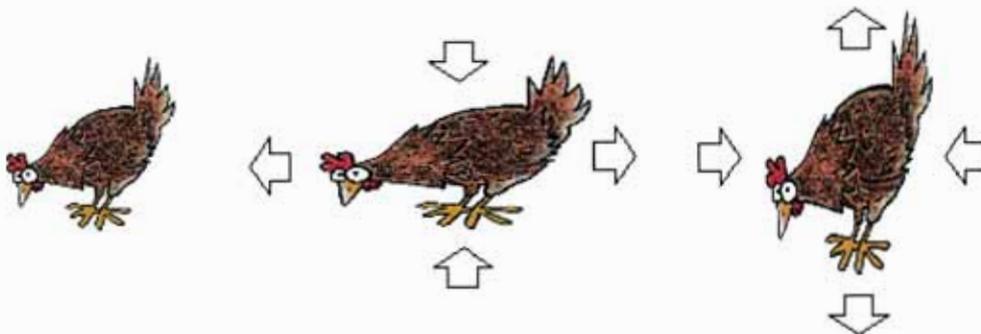


Figure 4 – Séquence temporelle indiquant de façon imagée l'action sur un objet (ici une poulette) d'une onde gravitationnelle se propageant perpendiculairement au plan de la feuille. On remarquera l'action de forces différentielles de type forces de marée.

1. J.M. Weisberg, J.H.Taylor : Relativistic Binary Pulsar B1913+16 : Thirty Years of Observations and Analysis, ASP Conference Series, Vol. TBD, 2004

### Présentation du dispositif

**Q36.** Le document 4 indique le principe de fonctionnement d'un détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles.

- (a) Qu'est-ce qu'une cavité Fabry-Perot ?
- (b) Pourquoi peut-on dire que « les photons y parcourent [...] un chemin optique de l'ordre de la centaine de kilomètres » tandis que « Virgo a [...] des bras de 3 kilomètres » ?
- (c) Qu'entend-on par « une source laser stable » ?

On fera les hypothèses suivantes concernant la réflexion et la transmission de la lumière dans l'interféromètre et la modélisation de l'onde émise par le laser :

- les miroirs  $A_1$  et  $A_2$ , parfaitement réfléchissants, ont des coefficients de réflexion en amplitude  $r_1$  et  $r_2$  égaux à  $-1$  ;
- la lame séparatrice semi-réfléchissante est supposée sans pertes ;
- pour un faisceau lumineux incident à  $45^\circ$ , le coefficient de transmission en amplitude  $t_s$  est indépendant du sens de la traversée, de valeur  $t_s = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ;
- toujours pour les amplitudes, le coefficient de réflexion « avant » (côté source)  $r_s$  est l'opposé du coefficient de réflexion « arrière » (côté miroir  $A_1$ )  $r'_s$ , avec  $r_s = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $r'_s = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ;
- on notera,  $L_x$  et  $L_y$  la longueur des bras du Michelson en l'absence de perturbation et  $L = \frac{L_x + L_y}{2}$  la longueur moyenne des bras.

L'onde incidente produite par un laser est monochromatique. En tout point du dispositif, l'onde se propage dans le vide et sera décrite par une onde plane scalaire. En notation complexe, son amplitude sera choisie, avec origine au niveau de la séparatrice et pour une direction de propagation selon  $Ox$ , de la forme

$$E_{in} = E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}$$

avec  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. On notera  $k = \frac{\omega}{c}$ .

### Questions :

**Q37.** Déterminer l'amplitude  $E_{out}$  de l'onde sortant vers la photodiode en fonction de celle de l'onde incidente  $E_0$ , de  $k$ ,  $L$  et  $\Delta L = L_x - L_y$ .

**Q38.** Exprimer la puissance  $P_{out}$  du faisceau sortant en fonction de la puissance d'entrée  $P_{in}$ . Montrer que cette expression se met sous la forme :

$$P_{out} = P_{in} \sin^2(k\Delta L)$$

**Q39.** Au passage de l'onde gravitationnelle, le bras dans la direction  $i$  ( $i = x, y$ ) passe de  $L_i$  à  $L_i + \delta L_i$  avec  $\delta L_x = +h \frac{L_x}{2}$  et  $\delta L_y = -h \frac{L_y}{2}$ . Compte tenu de la petitesse de la perturbation, montrer que la puissance en sortie s'écrit

$$P_{out} = P_{dc} + \delta P_{grav}$$

où  $P_{dc}$  correspond à la puissance en l'absence de la perturbation et  $\delta P_{grav}$  est le terme associé à la perturbation et a pour expression

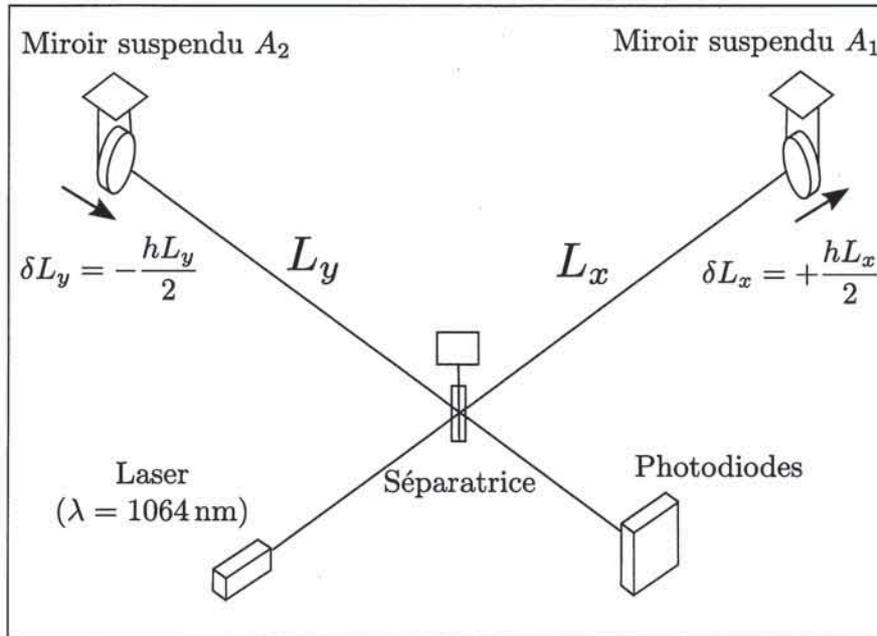
$$\delta P_{grav} = P_{in} k h L \sin(2k\Delta L)$$

Vérifier que ce résultat est bien conforme aux spécifications indiquées dans le document 4.

Document 4 – Principe du détecteur Virgo

Depuis une dizaine d'années un certain nombre de laboratoires dans le monde (projet VIRGO en Italie, LIGO aux USA...) tentent de monter des expériences susceptibles de détecter directement des ondes gravitationnelles. Tous les détecteurs actuels reposent sur une méthode interférentielle basée sur un interféromètre de Michelson dont chaque bras mesure plusieurs kilomètres ! La variation différentielle des bras se traduisant par un défilement de franges.

On considère l'interféromètre dont le principe est représenté figure ci-dessous.



Les deux miroirs suspendus sont parfaitement réfléchissants. La variation relative maximale de distance  $\delta L$  selon une direction donnée est alors reliée à l'amplitude  $h$  de l'onde gravitationnelle détectée par la relation  $\frac{\delta L}{L} = \frac{h}{2}$ .

L'interféromètre de Michelson éclairé par une source laser stable de longueur d'onde  $\lambda = 1064$  nm de puissance 20 W permet la mesure de la différence de phase de la lumière qui suit deux trajets orthogonaux selon les deux « bras » de longueur  $L$  de l'interféromètre. Ce déphasage est lui-même relié à la différence de chemin optique qui est justement l'effet induit par l'éventuel passage d'une onde gravitationnelle. Le déphasage est donc proportionnel à l'amplitude  $h$  de l'onde gravitationnelle détectée. Une mesure interférométrique de l'amplitude  $h$  est ainsi a priori possible. Pour atteindre une sensibilité qui permette de détecter un pulsar par exemple ( $h \sim 10^{-21}$ ) il faut cependant quelques raffinements...

Le premier paramètre sur lequel on peut jouer pour améliorer la sensibilité est la longueur des bras. Virgo a ainsi des bras de 3 kilomètres dans lesquels la lumière est « repliée » à l'aide de cavités Fabry-Perot de finesse modérée (de l'ordre de 50); les photons y parcourent alors un chemin optique de l'ordre de la centaine de kilomètres. De plus, une valeur élevée de  $L$  permet de diminuer l'influence des bruits de mesure (bruit sismique ou bruit thermique par exemple).

Un second facteur d'amélioration est lié à la puissance lumineuse  $P$  qui arrive sur la lame séparatrice de l'interféromètre. L'interféromètre est réglé sur une frange sombre en l'absence de perturbation. C'est un choix qui peut a priori surprendre, mais qui s'avère le plus pertinent pour recueillir de manière sélective le signal utile. Ce choix a pour conséquence de mettre en place un traitement adapté de ce signal de très faible puissance par des dispositifs complémentaires d'amplification ou de modulation.

- Q40.** Pour quelles valeurs du différentiel de longueur des bras  $\Delta L$  le signal utile  $\delta P_{grav}$  est-il maximal ? Former dans ces conditions le rapport  $\delta P_{grav}$  sur le signal continu  $P_{dc}$ , puis évaluer numériquement ce rapport à partir des données du document 4 et conclure quant au choix de se placer sur une « frange sombre ».
- Q41.** On choisit finalement de se placer sur une « frange sombre » c'est-à-dire telle que le signal continu  $P_{dc}$  soit nul. Indiquer la ou les valeurs de  $\Delta L$  correspondantes.  
En déduire que pour un réglage de « frange sombre » le signal utile  $\delta P_{grav}$  est proportionnel à  $h^2$ . En quoi ce résultat permet-il d'élucider le dernier paragraphe du texte ?

## A Annexes

### A.1 Données numériques :

- Constante de gravitation universelle	$G = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
- Masse du Soleil	$M_{\odot} = 2,0.10^{30} \text{ kg}$
- Rayon du Soleil	$R_{\odot} = 7,0.10^8 \text{ m}$
- masse d'un nucléon (proton ou neutron)	$m_n = 1,7.10^{-27} \text{ kg}$
- rayon d'un nucléon (proton ou neutron)	$r_n = 1,2.10^{-15} \text{ m}$
- Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,0.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

### A.2 Caractéristiques d'une ellipse

On a représenté sur le schéma une ellipse de foyer  $F$  et de centre  $O$  et d'axe principal  $Ox$ .  
On définit les différents paramètres de l'ellipse :

- le demi-grand axe :  $a = OA = OP$
- le demi-petit axe :  $b = OB$
- la distance du foyer au centre de l'ellipse :  $c = OF = OF'$
- l'excentricité :  $e = c/a$  avec  $0 \leq e < 1$  et  $e = 0$  dans le cas particulier du cercle
- $P$  le point le plus proche du foyer  $F$  est appelé périastre et  $A$  le point le plus éloigné du foyer  $F$  est appelé apoastre.

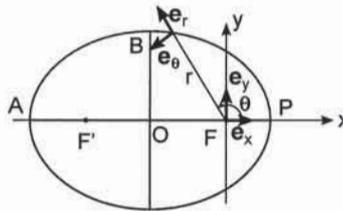


Figure 5 – Paramètres d'une ellipse

On a les propriétés suivantes :

- l'équation en coordonnées polaires de cette ellipse s'écrit

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (1)$$

où  $p$  est le paramètre de l'ellipse, relié aux demi-grand axe et demi-petit axe par la relation

$$p = \frac{b^2}{a}$$

- le demi-grand axe, le demi-petit axe et l'excentricité sont reliés par la relation

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

- l'aire d'une ellipse est

$$S = \pi ab$$

### A.3 Extrait des programmes de physique-chimie en classe de seconde générale et technologique en vigueur depuis la rentrée 2010 :

Notions et contenus	Compétences attendues
<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Description de l'Univers : l'atome, la Terre, le système solaire, la Galaxie, les autres galaxies, exoplanètes et systèmes planétaires extrasolaires.</li><li>▪ Propagation rectiligne de la lumière.</li><li>▪ Vitesse de la lumière dans le vide et dans l'air.</li><li>▪ L'année-lumière.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Savoir que le remplissage de l'espace par la matière est essentiellement lacunaire, aussi bien au niveau de l'atome qu'à l'échelle cosmique.</li><li>▪ Connaître la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide (ou dans l'air).</li><li>▪ Connaître la définition de l'année-lumière et son intérêt.</li><li>▪ Expliquer l'expression : « voir loin, c'est voir dans le passé ».</li><li>▪ Utiliser les puissances de 10 dans l'évaluation des ordres de grandeur.</li></ul>

#### A.4 Extrait des programmes de physique-chimie en classe de première S en vigueur depuis la rentrée 2011

<b>COMPRENDRE</b> <b>Lois et modèles</b> <i>Quelles sont les causes physiques à l'œuvre dans l'Univers ? Quelles interactions expliquent à la fois les stabilités et les évolutions physiques et chimiques de la matière ? Quels modèles utilise-t-on pour les décrire ? Quelles énergies leur sont associées ?</i>	
Notions et contenus	Compétences attendues
<b>Cohésion et transformations de la matière</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ La matière à différentes échelles : du noyau à la galaxie.</li> <li>▪ Particules élémentaires : électrons, neutrons, protons.</li> <li>▪ Charge élémentaire <math>e</math>.</li> <li>▪ Interactions fondamentales : interactions forte et faible, électromagnétique, gravitationnelle.</li> <li>▪ Cohésion du noyau, stabilité. Radioactivité naturelle et artificielle. Activité. Réactions de fission et de fusion.</li> <li>▪ Lois de conservation dans les réactions nucléaires. Équivalence masse-énergie ; défaut de masse.</li> <li>▪ Réactions nucléaires et aspects énergétiques associés.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Connaître les ordres de grandeur des dimensions des différentes structures des édifices organisés.</li> <li>▪ Connaître l'ordre de grandeur des valeurs des masses d'un nucléon et de l'électron. Savoir que toute charge électrique peut s'exprimer en fonction de la charge élémentaire <math>e</math>.</li> <li>▪ Associer, à chaque édifice organisé, la ou les interactions prédominantes. Utiliser la représentation symbolique <math>{}^A_ZX</math> ; définir l'isotopie et reconnaître des isotopes.</li> <li>▪ Utiliser les lois de conservation pour écrire l'équation d'une réaction nucléaire. Utiliser la relation <math>E = mc^2</math>.</li> <li>▪ Ordre de grandeur des énergies mises en jeu dans les réactions nucléaires.</li> <li>▪ Recueillir et exploiter des informations sur les réactions nucléaires (domaine médical, domaine énergétique, domaine astronomique, ...).</li> </ul>

**A.5 Extrait des programmes de physique-chimie en classe de terminale S en vigueur depuis la rentrée 2012 :**

<b>OBSERVER</b>	
<b>Ondes et matière</b>	
<i>Les ondes et les particules sont supports d'informations. Comment les détecte-t-on ? Quelles sont les caractéristiques et les propriétés des ondes ? Comment réaliser et exploiter des spectres pour identifier des atomes et des molécules ?</i>	
Notions et contenus	Compétences exigibles
<b>Ondes et particules</b>	
<p><b>Rayonnements dans l'Univers</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Absorption de rayonnements par l'atmosphère terrestre.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Extraire et exploiter des informations sur l'absorption de rayonnements par l'atmosphère terrestre et ses conséquences sur l'observation des sources de rayonnements dans l'Univers.</li> <li>▪ Connaître des sources de rayonnement radio, infrarouge et ultraviolet.</li> </ul>
<b>Caractéristiques et propriétés des ondes</b>	
<p><b>Propriétés des ondes</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Diffraction. Influence relative de la taille de l'ouverture ou de l'obstacle et de la longueur d'onde sur le phénomène de diffraction.</li> <li>▪ Cas des ondes lumineuses monochromatiques, cas de la lumière blanche.</li> <li>▪ Interférences.</li> <li>▪ Cas des ondes lumineuses monochromatiques, cas de la lumière blanche. Couleurs interférentielles.</li> <li>▪ Effet Doppler.</li> </ul>	<p>Savoir que l'importance du phénomène de diffraction est liée au rapport de la longueur d'onde aux dimensions de l'ouverture ou de l'obstacle. Connaître et exploiter la relation <math>\theta = \lambda/a</math>. Identifier les situations physiques où il est pertinent de prendre en compte le phénomène de diffraction.</p> <p>Pratiquer une démarche expérimentale visant à étudier ou utiliser le phénomène de diffraction dans le cas des ondes lumineuses.</p> <p>Connaître et exploiter les conditions d'interférences constructives et destructives pour des ondes monochromatiques.</p> <p>Pratiquer une démarche expérimentale visant à étudier quantitativement le phénomène d'interférence dans le cas des ondes lumineuses</p> <p>Mettre en oeuvre une démarche expérimentale pour mesurer une vitesse en utilisant l'effet Doppler. Exploiter l'expression du décalage Doppler de la fréquence dans le cas des faibles vitesses. Utiliser des données spectrales et un logiciel de traitement d'images pour illustrer l'utilisation de l'effet Doppler comme moyen d'investigation en astrophysique.</p>