Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EAI MAT 2

SESSION 2016

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

Tournez la page S.V.P.

On attire l'attention des candidats sur le fait que le jury attend une rédaction *concise* mais *précise*, et ceci plus particulièrement encore dans la première partie.

Notations et rappels.

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers $\geqslant 0$, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R}, r \geqslant 0\}$ l'ensemble des nombres réels positifs, $\mathbb{R}_*^+$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Si $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ sont tels que $m \leqslant n$, on note $[\![m; n]\!] = [m, n] \cap \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers compris entre m et n.

Pour toute partie A non vide de $\mathbb{R}$, on note $\sup(A)$ la borne supérieure de A (qui existe toujours dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lorsque $A \neq \emptyset$). C'est un réel lorsque A est majorée, et $\sup(A) = +\infty$ lorsque A n'est pas majorée.

On étend l'addition des réels positifs à $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ en convenant que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, $a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty$, $+\infty + (+\infty) = +\infty$.

On désigne par $\mathbb{K}$ indifféremment le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. Le $\mathbb{R}$- espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ sera muni de sa base canonique, ce qui permet d'identifier les éléments de $\mathbb{R}^p$ aux vecteurs colonnes formés de leurs coordonnées. Dans l'écriture de produits matriciels, les éléments de $\mathbb{R}^p$ seront écrits en colonnes. Nous munirons $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire usuel :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$$

et de sa norme euclidienne associée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} x_j^2},$$

le rendant complet.
Rappelons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad \sum_{i=1}^{p} |x_i| \leqslant \sqrt{p}\|x\|.$$

Pour $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, nous noterons

$$\bar{B}(a, r) = \{z \in \mathbb{R}^p, \|z - a\| \leqslant r\}$$

la boule fermée de centre a et de rayon r. On rappelle qu'il s'agit d'un ensemble convexe, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\forall (x, y, t) \in \bar{B}(a, r) \times \bar{B}(a, r) \times [0; 1], \quad (1 - t)x + ty \in \bar{B}(a, r).$$

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel. On notera Id_E, ou Id s'il n'y a pas d'ambiguité sur E, l'identité de E. Rappelons que si f est un endomorphisme de E, on peut définir, pour tout polynôme $P = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j X^j$ de $\mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme :

$$P(f) = \alpha_0 Id_E + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + a_3 f^3 + \ldots + \alpha_N f^N,$$

où $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc. On rappelle que si P et Q sont deux polynômes, nous avons :

$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$

Si $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés et si $f : E \to F$, nous dirons que f est lipschitzienne s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant k\|y - x\|_E.$$

Tout réel k satisfaisant cette propriété s'appelle *une* constante de Lipschitz de f.

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (respectivement $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$) l'espace vectoriel des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ et indexées par $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$).

Nous admettrons les deux théorèmes de passage à la limite suivants :

Th 1. Soit $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une suite (double) de nombres réels positifs. On suppose que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n,k} \leqslant a_{n+1,k}$. Alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$) a une limite dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} a_{n,k} \right).$$

Th 2. Soit $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une suite (double) de nombres complexes. On suppose que :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{n,k})_{n\geqslant 0}$ a une limite v_k.
- il existe une suite $(w_k)_{k\geqslant 0}$ telle que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} w_k$ soit convergente et pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $|a_{n,k}| \leqslant w_k$.

Alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ est convergente, la suite $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{C}$, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Objet du problème. L'objet de ce problème est d'étudier l'existence et l'unicité de suites $x = (x_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ ayant certaines propriétés et satisfaisant une relation de récurrence du type :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \qquad a_0 x_t + \ldots + a_N x_{t+N} = b_t \tag{1}$$

où les données sont l'entier $N \in \mathbb{N}^*$, la suite $(b_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ et les réels $a_0, \ldots, a_N$. Nous supposerons de plus tout au long du problème que l'hypothèse suivante est satisfaite :

$$\exists j_0 \in [\![0; N]\!], \qquad a_{j_0} > \sum_{j \neq j_0} |a_j| \tag{2}$$

La résolution de ce problème fera apparaître une application, appelée schift, dont nous étudierons quelques propriétés dans différents espaces.

On introduit le polynôme :

$$P_0 = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k.$$

Nous étudierons également une version non-linéaire du problème :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \qquad A_t(x_t, \ldots, x_{t+N}) = b_t, \tag{3}$$

où $A_t : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ sont des applications satisfaisant à certaines conditions (Partie V).

I. Quelques propriétés des séries indexées par $\mathbb{Z}$.

Cette partie est consacrée à établir **à nouveau** quelques propriétés des séries indexées par l'ensemble des entiers naturels, puis à passer aux séries indexées par $\mathbb{Z}$.

Etant donnée une série de nombres réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite, si elle existe dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, de la suite des sommes partielles $(U_N)_{N\geqslant 0}$, où $U_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente lorsque la limite existe et est réelle (i.e. finie). Le cas des limites finies s'étend au cadre complexe.

1. On suppose tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}^+$. Rappeler l'argument clé permettant de conclure que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe, et que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup\{U_N, N \in \mathbb{N}\}.$$

2. On revient au cas des séries à termes complexes quelconques. Démontrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente, et donner un exemple montrant que la réciproque est fausse.

Dans la suite de cette partie, on considère $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$. On dira que la série (indexée par $\mathbb{Z}$), $\sum_{t\in\mathbb{Z}} u_t$, est convergente dans $\mathbb{K}$ (respectivement absolument convergente) si les deux séries $\sum_{t\in\mathbb{N}} u_t$ et $\sum_{t\in\mathbb{N}} u_{-(t+1)}$ sont convergentes (respectivement absolument convergentes). En cas de convergence, on note :
$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} u_t = \sum_{t=0}^{+\infty} u_t + \sum_{t=0}^{+\infty} u_{-(t+1)}.$$
On notera que lorsque la suite $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est à termes réels positifs, cette égalité a encore un sens et est satisfaite dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

3. On suppose dans cette question que u_t est un réel positif pour tout t.
   (a) Démontrer que :
$$\sup\left\{\sum_{k=M}^{N} u_k,\ (M,N)\in\mathbb{Z}^2, M\leqslant N\right\} = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} u_t.$$
   (b) On pose $V_N = \sum_{k=-N}^{N} u_k$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\lim_{N\to+\infty} V_N$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et que :
$$\lim_{N\to+\infty} V_N = \sup_{N\geqslant 1} V_N = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} u_t.$$
   (c) Démontrer que l'on a :
$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} u_{t+1} = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} u_t.$$

4. On revient au cas général.
   (a) Démontrer que si la série est absolument convergente, alors elle est convergente.
   (b) Démontrer par un contre-exemple que la convergence de $\left(\sum_{k=-N}^{N} u_k\right)_{N\geqslant 1}$ n'implique pas celle de $\sum_{t\in\mathbb{Z}} u_t$.

II. Quelques espaces de suites de dimension infinie.

5. On note $\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K}) = \left\{(u_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}, \quad \sup_{t\in\mathbb{Z}} |u_t| < \infty\right\}.$$

Pour $u = (u_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, on pose :

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{Z}} |u_t|.$$

Démontrer que $(\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé de dimension infinie.

6. On note $\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ pour lesquelles la série $\sum_{t\in\mathbb{Z}} u_t$ est absolument convergente. Pour $u = (u_t)_t \in \ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, on pose :

$$\|u\|_1 = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} |u_t|.$$

Démontrer que $(\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{K}), \|.\|_1)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé de dimension infinie.

7. Étudier l'appartenance des suites suivantes à $\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ ou à $\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ (avec discussion selon le paramètre $q \in \mathbb{C}^*$ ou $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$) :

- ▷ $u = (1)_{t\in\mathbb{Z}}$;
- ▷ $u = (q^t)_{t\in\mathbb{Z}}$;
- ▷ $u = (q^{|t|}))_{t\in\mathbb{Z}}$;
- ▷ $u = \left(\frac{1}{(|t|+1)^\alpha}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$.

8. Indiquer, à l'aide d'une démonstration ou d'un contre-exemple, s'il y a des inclusions entre $\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ et $\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$.

9. Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ et $x = (x_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z}$, $(x^{(n)})_t = x_t^{(n)}$.

(a) Démontrer que si la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $(x_t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_t, puis que la réciproque est fausse.

(b) Démontrer que $\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ est complet.

10. Reprendre la question **9** avec l'espace $\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$.

III. L'opérateur schift.

Dans cette partie, on étudie l'opérateur de schift

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} & \rightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \\ u & \mapsto & (u_{t+1})_{t\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

qui consiste à décaler les indices d'un cran, ainsi que les endomorphismes qu'il induit sur certains sous-espaces stables.

Tournez la page S.V.P.

À tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on associe $\sigma(f)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{C}$ pour lesquels $f - \alpha Id_E$ n'est pas bijective et $VP(f)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{C}$ pour lesquels $f - \alpha Id_E$ n'est pas injective.

A) Généralités.

11. Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Comparer, au sens de l'inclusion, les ensembles $\sigma(f)$ et $VP(f)$. Que dire de plus si E est de dimension finie ?

12. Soit E un espace vectoriel normé complet et $f : E \to E$ une application k–lipschitzienne, avec $k \in]0;1[$.

(a) Démontrer que l'application $Id_E - f$ est bijective. *Indication : on pourra utiliser le théorème du point fixe.*

(b) On suppose de plus que f est linéaire. Démontrer que pour tout $y \in E$:

$$(Id_E - f)^{-1}(y) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} f^n(y).$$

On écrira dans la suite $(Id_E - f)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f^n$.

B) Le schift sur des espaces de suites indexées par $\mathbb{N}$.

Dans cette partie, nous considérons des suites indexées par $\mathbb{N}$. De manière analogue à ce qui précède, on introduit les espaces vectoriels normés complets (de dimensions infinies) suivants :

$$\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ (u_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad \sup_{t \in \mathbb{N}} |u_t| < \infty \right\},$$

muni de $u \mapsto \|u\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{N}} |u_t|$, et :

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ (u_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{t=0}^{+\infty} |u_t| < \infty \right\},$$

muni de $u \mapsto \|u\|_1 = \sum_{t=0}^{+\infty} |u_t|$.

On considère ici le schift comme endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, i.e. l'application :

$$S : (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots).$$

13. Déterminer $VP(S)$ et $\sigma(S)$.

14. Soit $p \in \{1, \infty\}$. Démontrer que la restriction de S à $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ induit un endomorphisme de $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

15. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $p \in \{1, \infty\}$. Démontrer que si $|\alpha| > 1$, alors $S - \alpha Id$ induit un automorphisme de $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

16. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $p \in \{1, \infty\}$. Démontrer que si $|\alpha| < 1$, alors $S - \alpha Id$ n'induit pas un automorphisme de $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

17. On s'intéresse au cas où $\alpha = 1$ et $p = 1$. On cherche à trouver $x = (x_t)_{t\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ tel que

$$(S - Id)(x) = b,$$

où $b = \left(\frac{1}{(t+1)^2}\right)_{t\geqslant 0}$.

(a) Justifier que $b \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

(b) On suppose qu'il existe une suite solution x. Exprimer $x_t - x_{t+k}$ pour tous $t \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ en fonction uniquement des termes de la suite b. En déduire l'unique candidat possible.

(c) La suite obtenue est-elle dans $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$?

18. Déterminer $VP(S)$ et $\sigma(S)$ d'abord pour $p = \infty$, puis pour $p = 1$.

C) Le schift sur des espaces de suites indexées par $\mathbb{Z}$.

19. Démontrer que pour $p \in \{1, \infty\}$, S induit un isomorphisme isométrique de $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ sur lui-même.

20. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $p \in \{1, \infty\}$. Démontrer que si $|\alpha| \neq 1$, alors $S - \alpha Id$ est bijective sur $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ sur lui-même. On pourra distinguer les cas $|\alpha| > 1$ et $|\alpha| < 1$.

21. Dans cette question, on suppose que $b = (b_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, où $p = 1$ ou $p = \infty$, et l'on cherche à démontrer l'existence et l'unicité d'une solution à (1) appartenant à $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. On supposera que a_N est non nul (ce qui n'est pas restrictif en fait). L'équation s'écrit :

$$(P_0(S))(x) = b. \tag{4}$$

(a) Démontrer que sous l'hypothèse (2) introduite dans la partie **"objet du problème"**, P_0 n'a aucune racine complexe de module 1.

(b) Démontrer que sous (2), l'équation (1) a une unique solution $x \in \ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

(c) Justifier que $x \in \ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ *(on rappelle que les a_j et les b_t sont des réels)*.

(d) Conclure.

D) Le procédé d'Euler.

On considère ici S comme endomorphisme de $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On pose $A = S + Id$ et on fixe un réel $\gamma \in]0; 1[$.

22. Démontrer que $Id - \gamma S$ et $Id - \frac{\gamma}{1+\gamma}A$ sont inversibles, et déterminer leurs inverses.

23. En déduire que pour toute $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^n u_n = (1+\gamma)^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \right].$$

24. Le but de cette question est d'en déduire que pour toute $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \right).$$

Fixons $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Tournez la page S.V.P.

(a) Démontrer que :

$$\lim_{\gamma\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma^n u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n.$$

(b) On suppose que pour tout n, $u_n\in\mathbb{R}^+$. Démontrer que :

$$\lim_{\gamma\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k\right).$$

(c) Démontrer que le résultat précédent demeure vrai pour toute suite $u\in\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$, puis conclure.

IV. Un résultat de surjectivité.

Dans toute cette partie, on se fixe un entier $p\geqslant 2$.

Pour une fonction $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ de classe C^1, dont on note $f_i:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ les fonctions composantes, la matrice jacobienne de f en $x\in\mathbb{R}^p$, que l'on notera ici $J_f(x)$, est la matrice carrée dont la i−ème ligne est le gradient de f_i, c'est-à-dire :

$$J_f(x)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}.$$

E) Lipschitzianité de fonctions de plusieurs variables.

25. On se donne une application linéaire L de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même, dont on note $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Démontrer que L est de classe C^1 et déterminer sa matrice jacobienne.

26. Soit $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Fixons x, y dans $\bar{B}(a,r)$. On introduit la fonction

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}[0;1]&\to&\mathbb{R}\\ t&\mapsto&g((1-t)x+ty)\end{array}\right.$$

(a) Démontrer qu'il existe un majorant $K\in\mathbb{R}_*^+$ de toutes les dérivées partielles de g sur $\bar{B}(a,r)$.

(b) Démontrer que φ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

(c) En déduire que :

$$|g(y)-g(x)|\leqslant K\sqrt{p}\|y-x\|.$$

27. Soit $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ est de classe C^1. On note $K>0$ un majorant de toutes les dérivées partielles de f sur $\bar{B}(a,r)$. Démontrer que

$$\forall (x,y)\in\bar{B}(a,r)\times\bar{B}(a,r),\quad \|f(y)-f(x)\|\leqslant Kp\|y-x\|.$$

28. Soit $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ est de classe C^1. Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même dont on note $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^p$. En utilisant la question précédente, démontrer que :

$$\forall (x,y)\in\bar{B}(a,r)^2,\quad \|f(y)-f(x)-L(y-x)\|\leqslant p\sup_{(i,j,z)\in[\![1;p]\!]^2\times\bar{B}(a,r)}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z)-a_{ij}\right|\|y-x\|.$$

F) La méthode de Newton en dimension p.

On se donne une fonction $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 dont la matrice jacobienne $J_F(x)$ est inversible pour tout x. Le but est de montrer sous certaines hypothèses l'existence d'une solution à l'équation :

$$F(x) = 0 \tag{5}$$

Pour ce faire, on introduit la suite récurrente (indexée par $\mathbb{N}$) partant qu'un $z^{(0)} \in \mathbb{R}^p$ et donnée par :

$$\forall k \geqslant 0, \qquad z^{(k+1)} = z^{(k)} - (J_F(z^{(k)}))^{-1} F(z^{(k)}),$$

(le dernier produit a bien un sens puisque $F(z^{(k)})$, en tant qu'élément de $\mathbb{R}^p$, est indiqué en colonne).

On se propose de montrer la convergence de la suite vers une solution de (5) sous l'hypothèse d'existence de $r > 0$ et $M > 0$ tels que, si $B = \bar{B}(z^{(0)}, r)$, on ait :

▷ **(H1)** $\forall x \in B, \forall h \in \mathbb{R}^p, \|(J_F(x))^{-1} h\| \leqslant M\|h\|$;

▷ **(H2)**

$$\sup_{(i,j,z,z') \in [\![1;p]\!]^2 \times (B)^2} \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(z) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(z') \right| \leqslant \frac{1}{2Mp} \quad ;$$

▷ **(H3)** $\|F(z^{(0)})\| \leqslant \frac{r}{2M}$.

29. Vérifier que pour tout entier k, on a :

$$F(z^{(k+1)}) = F(z^{(k+1)}) - F(z^{(k)}) - J_F(z^{(k)})(z^{(k+1)} - z^{(k)}),$$

et en déduire que si $(z^{(k)}, z^{(k+1)}) \in B^2$, alors :

$$\|F(z^{(k+1)})\| \leqslant \frac{1}{2M} \|z^{(k+1)} - z^{(k)}\|.$$

30. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 0$, on a :

$$\begin{cases} \|z^{(k+1)} - z^{(k)}\| \leqslant \frac{1}{2^k} \|z^{(1)} - z^{(0)}\| \\ z^{(k+1)} \in B \end{cases}$$

31. Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\|z^{(k+\ell)} - z^{(k)}\| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \|z^{(1)} - z^{(0)}\|$$

et en déduire que $(z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge. On note $\bar{z}$ sa limite.

32. Montrer que $\bar{z}$ est une solution de (5).

G) Un résultat de surjectivité.

On se donne dans cette partie une fonction $G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ de classe C^2. On suppose que toutes les dérivées partielles de G premières et secondes sont bornées par une constante commune K sur $\mathbb{R}^p$ et qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \quad \langle J_G(x)h, h \rangle \geqslant \gamma \|h\|^2.$$

33. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^p$. On suppose que l'équation $G(x) = y_0$ a une solution notée $z^{(0)}$. On se donne $y \in \mathbb{R}^p$ et l'on introduit la fonction :

$$F_y : x \mapsto G(x) - y.$$

On souhaite appliquer à F_y les résultats de **IV. F)**.

(a) Démontrer que $J_{F_y}(x)$ est inversible pour tout x et trouver une constante M de sorte que **(H1)** soit satisfaite.

(b) Démontrer que les dérivées partielles premières de F_y sont lipschitziennes, et trouver une constante de Lipschitz commune à toutes les dérivées partielles.

(c) Déduire de la question précédente une valeur de r pour laquelle l'hypothèse **(H2)** est satisfaite.

(d) Calculer $F_y(z^{(0)})$ en fonction de y et y_0. En déduire une valeur D strictement positive ne dépendant que de K, γ, p de sorte que si $\|y - y_0\| \leqslant D$, alors l'équation $G(x) = y$ a au moins une solution.

34. Déduire de la question précédente que G est surjective de $\mathbb{R}^p$ sur lui-même.

V. Un problème non linéaire périodique.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Nous dirons qu'une suite $(x_t)_t$ à valeurs réelles est $p-$périodique (ou périodique de période p) si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a :

$$x_{t+p} = x_t.$$

Ainsi les suites $1-$périodiques sont les suites constantes, les suites $2-$ périodiques ne prennent que deux valeurs, $x_t = x_1$ lorsque t est impair et $x_t = x_2$ lorsque t est pair. Plus généralement, si $\omega_p(t)$ désigne l'unique entier de $[\![0; p-1]\!]$ congru à t modulo p, nous avons $x_t = x_{\omega_p(t)}$. La connaissance des suites $p-$périodiques est donc équivalente à la connaissance des valeurs $x_0, \dots, x_{p-1}$.

Dans cette partie, on se donne une suite de fonctions $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$,

$$A_t : [y = (y_0, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{N+1}] \mapsto [A_t(y_0, \dots, y_N) \in \mathbb{R}]$$

de sorte que toutes les fonctions A_t soient de classe C^2, et $t \mapsto A_t$ est $p-$périodique, c'est-à-dire :

$$\forall (t, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{N+1}, \quad A_{t+p}(y) = A_t(y).$$

On suppose de plus qu'il existe des constantes $M_0, \dots, M_N$ et $(M_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant N}$ de sorte que :

▷ $\forall (t, y, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{N+1} \times [\![0; N]\!], \quad \left|\frac{\partial A_t}{\partial y_i}(y)\right| \leqslant M_i$;

▷ $\forall (t, y, i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{N+1} \times [\![0; N]\!] \times [\![0; N]\!], \quad \left|\frac{\partial^2 A_t}{\partial y_i \partial y_j}(y)\right| \leqslant M_{i,j}$.

On suppose de plus l'hypothèse :

$$\exists j_0 \in [\![0; N]\!], \quad \inf_{(t,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}^p} \frac{\partial A_t}{\partial y_{j_0}}(y) > \sum_{j\neq j_0} M_j \tag{6}$$

satisfaite. On notera $m_1 = \inf_{(t,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}^p} \frac{\partial A_t}{\partial y_{j_0}}(y)$. Pour plus de facilité, on pourra abréger $\frac{\partial A_t}{\partial y_j}$ en $\partial_j A_t$ pour $j \in [\![0; N]\!]$.

Étant donnée une suite b périodique de période p, on s'intéresse à l'existence d'une solution p−périodique à l'équation (3) :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \qquad A_t(x_t, \ldots, x_{t+N}) = b_t.$$

35. Donner un exemple de suite de fonctions $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ non affines satisfaisant toutes les hypothèses.

36. **(a)** Démontrer que :

$$\forall (t,j) \in \mathbb{Z}^2, \quad \omega_p(\omega_p(t) + j) = \omega_p(t+j).$$

(b) Fixons i. Montrer que l'application $\varphi_i : k \mapsto \omega_p(i+k)$ est une bijection de $[\![0;p-1]\!]$ sur lui-même.

(c) Soit b p−périodique. Montrer x est une solution p−périodique de (3) si et seulement si x est p−périodique et :

$$\forall i \in [\![0;p-1]\!], \quad A_i(x_{\omega_p(i)}, \ldots, x_{\omega_p(i+N)}) = b_i.$$

La question précédente ramène notre problème à montrer la surjectivité de la fonction $G_p = (G_{0,p}, \ldots, G_{p-1,p})$ de classe C^2 où $\forall i \in [\![0;p-1]\!]$, $G_{i,p}$ est définie par

$$G_{i,p} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (s_0, \ldots, s_{p-1}) & \mapsto & A_i(s_{\omega_p(i)}, s_{\omega_p(i+1)}, \ldots, s_{\omega_p(i+N)}) \end{array} \right.$$

37. On suppose dans cette question uniquement que $p = 1$, et que N est quelconque.

(a) Que vaut pour $j \in \mathbb{Z}$, $\omega_1(j)$?

(b) Calculer la dérivée de $G_{0,1}$.

(c) Démontrer que $G_{0,1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même, puis conclure.

38. Le but de cette question est de montrer que l'on peut appliquer **IV. G)** à G_p. Nous supposerons désormais que $j_0 = 0$ et que $N + 1 = p$ (ce qui n'est en fait pas restrictif).

(a) Proposer une valeur de K.

(b) Démontrer que pour tous $(s,h) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, on a :

$$\langle J_{G_p}(s)h, h\rangle = \sum_{i=0}^{p-1} \partial_0 A_i(s_{\omega_p(i)}, \ldots, s_{\omega_p(i+N)}) h_i^2 + \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \partial_k A_i(s_{\omega_p(i)}, \ldots, s_{\omega_p(i+N)}) h_i h_{\omega_p(i+k)} \right).$$

(c) Conclure.

FIN DU SUJET