ministère
Éducation
nationale

EAI MAT 2
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2009

CONCOURS INTERNE
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS
ET CONCOURS D'ACCÈS A L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION

Section : MATHÉMATIQUES

SECONDE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

– NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

- On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.
- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle de $\mathbf{R}$, on note indifféremment f' ou $\mathrm{D}(f)$ ou simplement $\mathrm{D}f$ sa fonction dérivée. De même, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1, on note $\mathrm{D}^n f$ sa fonction dérivée $n^{\text{ème}}$. On convient de poser $\mathrm{D}^0 f = f$.
- On désigne par $\mathcal{L}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes et bornées sur $\mathbf{R}$. Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$.
- On désigne par $\mathcal{L}^1$ l'espace vectoriel des fonctions f continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes et intégrables sur $\mathbf{R}$. Pour toute fonction f de $\mathcal{L}^1$, on écrira indifféremment $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_{\mathbf{R}} f$ pour désigner $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. On définit une norme sur cet espace en posant $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
- On dit qu'une fonction f est de classe C^1 si elle dérivable en tout point de $\mathbf{R}$ et si sa dérivée f' est une fonction continue.
- Les espaces vectoriels $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont définis au début des parties III et IV de cet énoncé.

Les candidats sont invités à énoncer précisément les théorèmes d'intégration qu'ils comptent appliquer. Ils pourront éventuellement utiliser le résultat suivant qui sera admis :

Soit une fonction u continue sur $\mathbf{R}^2$ et telle que :

1. *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $y \mapsto u(x,y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, et*
2. *la fonction $x \mapsto \int_{\mathbf{R}} |u(x,y)|\,\mathrm{d}y$ est continue et intégrable sur $\mathbf{R}$, et*
3. *la fonction $x \mapsto \int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}y$ est continue sur $\mathbf{R}$, et*
4. *pour tout $y \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto u(x,y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, et*
5. *la fonction $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} |u(x,y)|\,\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbf{R}$, et*
6. *la fonction $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbf{R}$.*

Alors u est intégrable sur $\mathbf{R}^2$; de plus, la fonction $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}x$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et on a

$$\iint_{\mathbf{R}^2} u = \int_{\mathbf{R}}\Big(\int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}}\Big(\int_{\mathbf{R}} u(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y\,.$$

Les quatre parties s'enchaînent logiquement. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats établis dans les questions antérieures.

– Partie I : Transformation de Fourier –

1. Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1$.

   (a) Démontrer que, pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

   (b) On définit alors une nouvelle fonction, notée $\widehat{f}$, en posant pour tout $\xi \in \mathbf{R}$:

   $$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x$$

   Démontrer que la fonction $\widehat{f}$ est continue, bornée et que l'on a $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

La fonction $\widehat{f}$ est appelée *transformée de Fourier* de la fonction f et est notée indifféremment $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}f$. On pourra ainsi considérer $\mathcal{F}$ comme une application de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{L}^\infty$.

2. Soient a un nombre réel strictement positif et φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$. Vérifier que la fonction φ appartient à $\mathcal{L}^1$ et calculer sa transformée de Fourier.

3. Soient f et g deux fonctions appartenant à $\mathcal{L}^1$. Démontrer que l'on a $\int_{\mathbf{R}} f\widehat{g} = \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}g$.

4. Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1$ et telle la fonction $t \mapsto t \times f(t)$, notée xf, appartienne à $\mathcal{L}^1$. Démontrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que $\mathrm{D}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(-2\mathrm{i}\pi xf)$.

5. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et telle que f et $\mathrm{D}f$ appartiennent à $\mathcal{L}^1$.
   (a) Démontrer que f admet des limites nulles au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
   (b) En déduire que pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}$ on a $\mathcal{F}(\mathrm{D}f)(\xi) = (2\mathrm{i}\pi\xi)\mathcal{F}f(\xi)$.

6. **Calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne.**
   On considère la fonction γ définie sur $\mathbf{R}$ par $\gamma(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$.
   (a) Justifier le fait que γ est intégrable sur $\mathbf{R}$. *On admettra que* $\int_{\mathbf{R}} \gamma = 1$.
   (b) Pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}$, on note $\Omega(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}\,\mathrm{d}x$. Démontrer que la fonction Ω est constante. *Indication :* On pourra dériver la fonction Ω, ou bien intégrer suivant un chemin convenable dans le plan complexe.
   (c) En déduire que $\mathcal{F}\gamma = \gamma$.
   (d) Soit a un nombre réel strictement positif. Soit la fonction γ^a définie par $\gamma^a(x) \doteq \gamma(ax)$; exprimer la transformée de Fourier de γ^a en fonction de $\gamma^{\frac{1}{a}}$.

– Partie II : Convolution –

1. On considère deux fonctions f et g continues sur $\mathbf{R}$ et à valeurs complexes. Démontrer que si f et g vérifient l'hypothèse

   (H1) f appartient à $\mathcal{L}^\infty$ et g appartient à $\mathcal{L}^1$

   alors la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.
   Démontrer que ce résultat est encore vrai si f et g vérifient l'hypothèse

   (H2) f appartient à $\mathcal{L}^1$ et g appartient à $\mathcal{L}^\infty$.

   Lorsque l'une au moins des deux hypothèses précédentes est vérifiée, on définit la fonction $f * g$ par $f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ pour tout nombre x réel.
   Cette fonction s'appelle le *produit de convolution de f et de g.*

2. Démontrer, sous l'hypothèse (H1), que $f * g = g * f$. Dans toute la suite, l'expression $f * g$ sera utilisée en supposant que l'une des deux fonctions appartient à $\mathcal{L}^1$ et l'autre à $\mathcal{L}^\infty$ (hypothèses (H1) ou (H2)).
   Démontrer, sous l'hypothèse (H1), que $f * g$ appartient à $\mathcal{L}^\infty$ et que $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$.

3. On suppose dans cette question que f et g vérifient l'hypothèse (H1) et que, de plus, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\mathrm{D}f$ appartient à $\mathcal{L}^\infty$.
   Démontrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que $\mathrm{D}(f * g) = \mathrm{D}f * g$.

4. On suppose que f et g appartiennent à $\mathcal{L}^1$ et que l'une au moins des deux fonctions appartient à $\mathcal{L}^\infty$.

   (a) Démontrer que $f * g$ est dans $\mathcal{L}^1$ et que $\int_{\mathbf{R}} f * g = \int_{\mathbf{R}} f \times \int_{\mathbf{R}} g$.

   (b) Montrer que $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \times \mathcal{F}g$.

5. Soit θ une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1$ et telle que $\int_{\mathbf{R}} \theta(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

   Pour tout nombre $\varepsilon \in]0,1[$ on définit la fonction θ_ε par la formule $\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\theta(\frac{x}{\varepsilon})$, x étant un nombre réel quelconque.

   Soit J un segment de $\mathbf{R}$.

   Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^\infty$, on veut démontrer que $f * \theta_\varepsilon$ converge vers f uniformément sur J quand ε tend vers zéro, c'est-à-dire que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\sup_{x \in J} |f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \Big) = 0 .$$

   (a) Soit un nombre $\delta > 0$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $A > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-A} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{A}^{\infty} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x < \delta .$$

   (b) Démontrer, pour tout x réel fixé, que $|f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f(x - \varepsilon y) - f(x)||\theta(y)|\,\mathrm{d}y$.

   (c) En déduire que

$$\sup_{x \in J} |f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \leqslant 2\delta \|f\|_\infty \ + \int_{-A}^{A} |\theta(y)| \sup_{x \in J} |f(x - \varepsilon y) - f(x)|\,\mathrm{d}y .$$

   (d) Conclure en utilisant la continuité de f sur un compact convenablement choisi.

6. **Théorème d'inversion de Fourier.**

   (a) Soit $x \in \mathbf{R}$ (x fixé). Soit $\varepsilon > 0$, et soit Φ_ε la fonction définie par $\Phi_\varepsilon(\xi) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x\xi - \pi\varepsilon^2\xi^2}$ pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}$. Vérifier que cette fonction appartient à $\mathcal{L}^1$ et exprimer sa transformée de Fourier à l'aide de la fonction γ_ε définie par $\gamma_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}\gamma(\frac{y}{\varepsilon})$ (la fonction γ a été définie en I.6).

   (b) Soit une fonction f de l'espace $\mathcal{L}^1$; on note $\mathcal{G}(f)$ la fonction définie par $\mathcal{G}(f)(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$ pour tout ξ appartenant à $\mathbf{R}$; on peut ainsi considérer $\mathcal{G}$ comme une application de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{L}^\infty$.

   On suppose que f est aussi dans $\mathcal{L}^\infty$ et que $\mathcal{F}f$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

   Démontrer alors que $f = \mathcal{G}(\widehat{f})$.

   Indication : on pourra écrire $\int_{\mathbf{R}} \Phi_\varepsilon(\xi)\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}} \widehat{\Phi_\varepsilon}(y) f(y)\,\mathrm{d}y$, puis faire tendre ε vers zéro, et utiliser la question II.5.

   Dans la suite la transformation $\mathcal{G}$ sera parfois notée $\mathcal{F}^{-1}$.

– Partie III : Espace $\mathcal{S}$ –

On dit qu'une fonction f de variable réelle et à valeurs complexes est *à décroissance rapide* si f est de classe C^∞ et que pour chaque couple d'entiers naturels (α, β) la fonction $x \mapsto x^\alpha \mathrm{D}^\beta f(x)$ est bornée sur $\mathbf{R}$ (on rappelle que D^β désigne l'opérateur de dérivation d'ordre bêta).
Pour simplifier les choses, on notera $x^\alpha \mathrm{D}^\beta f$ la fonction $x \mapsto x^\alpha \mathrm{D}^\beta f(x)$.
Enfin, on note $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des fonctions à décroissance rapide.

1. (a) Démontrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$ et pour tous entiers naturels m, α, β, la fonction $x \mapsto (1 + |x|^m) x^\alpha (\mathrm{D}^\beta f)(x)$ est bornée sur $\mathbf{R}$.
   (b) En déduire que la fonction $x^\alpha \mathrm{D}^\beta f$ appartient à $\mathcal{L}^1$ (en particulier, on a $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1$).
   (c) Vérifier que le produit de deux fonctions de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

2. **Topologie de $\mathcal{S}$.**
   Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et toute fonction $f \in \mathcal{S}$ on pose

$$p_n(f) \;=\; \max_{\substack{0 \leqslant \alpha \leqslant n \\ 0 \leqslant \beta \leqslant n}} \left(\sup_{x \in \mathbf{R}} |x|^\alpha |\mathrm{D}^\beta f(x)| \right) .$$

   (a) Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{S}$. Démontrer l'inégalité $p_n(f+g) \leqslant p_n(f) + p_n(g)$.
   (b) On définit une fonction, notée σ, qui à $x \geqslant 0$ associe $\sigma(x) = \frac{x}{1+x}$. Démontrer que σ est croissante, bornée et vérifie $\sigma(x+y) \leqslant \sigma(x) + \sigma(y)$ pour tous x, y positifs.
   (c) Étant données deux fonctions f, g de $\mathcal{S}$ on pose $d(f,g) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sigma\big(p_n(f-g)\big)$. Démontrer que d est une distance sur $\mathcal{S}$ et que cette distance est invariante par translation.
   L'espace $\mathcal{S}$ sera désormais muni de la topologie définie par cette distance.
   (d) Démontrer qu'une suite $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathcal{S}$ converge vers 0 (la fonction nulle) pour la topologie définie par la distance d (ce qu'on pourra noter $f_i \underset{\mathcal{S}}{\to} 0$) si, et seulement si, pour chaque couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$ on a

$$\lim_{i \to \infty} \left(\sup_{x \in \mathbf{R}} |x|^\alpha |(\mathrm{D}^\beta f_i)(x)| \right) = 0 .$$

   En déduire que l'application $\mathcal{I} : \begin{cases} f & \mapsto f \\ \mathcal{S} & \to \mathcal{L}^1 \end{cases}$ est continue.

3. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{S}$. Démontrer que $f * g$ est de classe C^∞, puis que $f * g$ appartient à $\mathcal{S}$.

4. **Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$.**
   (a) Soit un élément f de $\mathcal{S}$ et un entier α. Démontrer que $\mathrm{D}^\alpha(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}g$, où la fonction g est définie par $g(x) = (-2\mathrm{i}\pi x)^\alpha f(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbf{R}$ (ce qu'on peut aussi écrire à l'aide de la notation introduite en I.4 : $g = (-2\mathrm{i}\pi)^\alpha x^\alpha f$).
   (b) Démontrer, pour tout nombre réel ξ, la formule :

$$\mathcal{F}(\mathrm{D}^\alpha f)(\xi) \;=\; (2\mathrm{i}\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}f(\xi) .$$

   (c) En déduire que si f appartient à $\mathcal{S}$, alors $\widehat{f}$ appartient aussi à $\mathcal{S}$.

(d) Démontrer que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ (toujours au sens de la topologie définie par d).
Par abus de langage, on notera encore $\mathcal{F}$ cette application.

5. **Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}$.**
Démontrer que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ établit une bijection de $\mathcal{S}$ sur lui-même, admettant pour bijection réciproque la restriction de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{S}$.
Par abus de langage, on notera encore, dans ce nouveau contexte, $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$.

– Partie IV : Espace $\mathcal{S}'$ –

On note $\mathcal{S}'$ le dual topologique de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{C}$ ($\mathcal{S}$ étant muni de la distance d définie au III.2.c).

1. **Quelques exemples.**
   (a) Soit δ la forme linéaire définie par $\delta(f) = f(0)$ pour $f \in \mathcal{S}$. Démontrer que δ appartient à $\mathcal{S}'$.
   (b) Soit u une fonction continue par morceaux, intégrable sur $\mathbf{R}$ ou bornée. Démontrer, dans chacun de ces deux cas, que l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} uf$ a un sens ; en déduire qu'on définit bien un élément de $\mathcal{S}'$, noté T_u, en posant $T_u(f) = \int_{\mathbf{R}} uf$ pour f appartenant à $\mathcal{S}$.
   On utilisera cette notation T_u dans toute la suite du problème.

2. **Construction d'opérateurs sur $\mathcal{S}'$.**
Pour construire d'autres éléments de $\mathcal{S}'$ on procède de la manière suivante. On se donne tout d'abord une application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, notée L. On suppose qu'il existe une application linéaire continue L' de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ telle que pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{S}$ on ait $\int_{\mathbf{R}} L(f)\, g = \int_{\mathbf{R}} f\, L'(g)$. On admettra que, dans ces conditions, l'application L' est unique.
Enfin, pour tout élément T de $\mathcal{S}'$ on pose $\underline{L}(T) = T \circ L'$.
Justifier le fait que $\underline{L}$ est une application linéaire de $\mathcal{S}'$ dans lui-même.

3. **Dérivation dans $\mathcal{S}'$.**
   (a) On choisit d'abord $L = \mathrm{D}$ (opérateur de dérivation). Vérifier que la question IV.2 s'applique bien à cet opérateur et expliciter L'.
   (b) Donner alors l'expression de $\underline{\mathrm{D}}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$.
   (c) On choisit à présent $L = \mathrm{D}^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbf{N}$, $\alpha \geqslant 2$. Expliciter L' et $\underline{L}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$.
   (d) Soit Y la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $Y(x) = 1$ pour $x \geqslant 0$ et $Y(x) = 0$ pour $x < 0$.
   Démontrer que $\underline{\mathrm{D}}(T_Y) = \delta$ (avec les notations δ et T_Y introduites en IV.1).

4. **Multiplication par des fonctions dans $\mathcal{S}'$.**
On dit qu'une fonction P de classe C^∞ est *à croissance lente* si pour tout entier $\beta \geqslant 0$ il existe un entier $\alpha \geqslant 0$ et deux nombres réels M et N tels que $|\mathrm{D}^\beta P(x)| \leqslant (M + N|x|^\alpha)$ pour tout x réel.
Soit L l'opérateur défini sur $\mathcal{S}$ par : $L(f)(x) = P(x) \times f(x)$ (avec $f \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbf{R}$).
Démontrer que L satisfait aux hypothèses de la question IV.2, et préciser l'expression de L' et de $\underline{L}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$.
L'élément $\underline{L}(T)$ de $\mathcal{S}'$ sera noté $P \times T$ dans la suite.

5. **Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$.**

   (a) Démontrer que l'application L définie, pour $f \in \mathcal{S}$, par $L(f) = \widehat{f}$ (soit $L = \mathcal{F}$) vérifie les hypothèses de la question IV.2 ; donner l'expression de $\underline{L}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$. L'élément $\underline{L}(T)$ de $\mathcal{S}'$ sera noté dans la suite $\widehat{T}$ ou indifféremment $\underline{\mathcal{F}}(T)$.

   (b) Donner une définition analogue pour l'application $\underline{\mathcal{G}}$ (voir question II.6), et démontrer que $\underline{\mathcal{G}}$ réalise une bijection de $\mathcal{S}'$ sur lui-même, dont la réciproque est $\underline{\mathcal{F}}$ (voir la question III.5).

   (c) On se donne une fonction $u \in \mathcal{L}^1$. Démontrer que l'on a $\underline{\mathcal{F}}(T_u) = T_{\mathcal{F}(u)}$.

   (d) Démontrer que $\underline{\mathcal{F}}(\delta) = T_{\mathbf{1}}$, où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur $\mathbf{R}$, puis que $\underline{\mathcal{G}}(\delta) = T_{\mathbf{1}}$.

6. Soit un entier $\alpha \geqslant 0$. On définit deux fonctions P et Q par $P(x) = (-2\mathrm{i}\pi x)^\alpha$ et $Q(x) = (2\mathrm{i}\pi x)^\alpha$ pour tout x réel. Soit T appartenant à $\mathcal{S}'$; démontrer les relations

$$\underline{\mathrm{D}}^\alpha(\underline{\mathcal{F}}(T)) = \underline{\mathcal{F}}(P \times T) \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{F}}(\underline{\mathrm{D}}^\alpha(T)) = Q \times \underline{\mathcal{F}}(T) .$$

7. **Équation différentielle $-\underline{\mathrm{D}}^2 U + U = \delta$.**
   Chercher, au moyen de la transformation de Fourier et des résultats de la question I.2, quelles sont les solutions $U \in \mathcal{S}'$ de l'équation différentielle $-\underline{\mathrm{D}}^2 U + U = \delta$.

——— FIN DU SUJET ———

IMPRIMERIE NATIONALE – 9 156 – D'après documents fournis