

SESSION 2014

AGRÉGATION CONCOURS EXTERNE

Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE

PROBLÈME DE PHYSIQUE

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Optique atomique guidée

Dans ce problème, nous proposons d'étudier deux exemples de situations physiques pour lesquelles les concepts d'optique ondulatoire sont transposés à l'optique atomique. Le problème comporte trois parties indépendantes. La première pose les bases du traitement semiclassique de la polarisabilité atomique. La deuxième s'attache à transposer le concept de miroir diélectrique aux ondes de matière. Elle est subdivisée en deux parties, l'une sur l'optique ondulatoire traditionnelle, l'autre sur le traitement quantique d'une situation analogue pour des ondes de matière. La dernière partie étudie les guides d'onde pour atomes. Elle aborde notamment la condensation de Bose-Einstein en dimension réduite.

Il sera tenu le plus grand compte de la clarté de la rédaction, des applications numériques et de l'homogénéité dans les formules. Les réponses aux questions qualitatives doivent être succinctes mais précises.

Valeurs numériques :

Masse de l'électron : $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg.

Masse de l'atome de rubidium (isotope 87) : $m = 1,45 \times 10^{-25}$ kg.

Charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C.

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ kg⁻¹.m⁻³.A².s⁴.

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K⁻¹.

Vitesse de la lumière : $c = 3,00 \times 10^8$ m.s⁻¹.

Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s ou encore $\hbar = h/(2\pi) = 1,06 \times 10^{-34}$ J.s.

Magnéton de Bohr : $\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 9,27 \times 10^{-24}$ J.T⁻¹.

Rayon de Bohr : $a_B = \hbar^2\epsilon_0/(\pi m_e e^2) = 52,92 \times 10^{-12}$ m.

Energie de Rydberg : $R_y = m_e c^2 \alpha^2 / 2 = 13,61$ eV avec $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$.

Rappel :

- Les fonctions de Bose d'indice n (entier ou demi-entier) sont définies par

$$g_n(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p^n}.$$

Ces fonctions sont monotones et croissantes dans l'intervalle $0 < x < 1$. Quelques valeurs et cas limites pour certaines de ces fonctions

$$g_{3/2}(1) \simeq 2,61, \quad g_{5/2}(1) \simeq 1,34, \quad g_3(1) \simeq 1,2, \quad g_1(x \rightarrow 1^-) \rightarrow \infty, \quad g_{1/2}(x \rightarrow 1^-) \rightarrow \infty.$$

- La fonction delta de Dirac vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad \text{et par suite } \delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x).$$

- Quelques intégrales utiles

$$\int_0^{\infty} u^2 e^{-u} du = 2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- Quelques séries utiles

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{avec } |x| < 1.$$

- Formule trigonométrique

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

- Pour une distribution de probabilité centrée de la variable x , la variance est définie par

$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx,$$

et l'écart type σ par la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{\Delta x^2}$.

1 – Partie liminaire : Modèle semiclassique de polarisabilité

Nous considérerons dans la suite plusieurs situations d'interactions entre un atome et la lumière. Lorsque la lumière laser utilisée est proche d'une résonance atomique, elle induit une action mécanique sur l'atome qui résulte de l'interaction entre le champ électrique $\vec{E}$ du laser et le dipôle induit par ce champ électrique $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$, où α représente la polarisabilité de l'atome.

- 1 – Montrer que α est homogène à un volume.
- 2 – Le hamiltonien associé à cette interaction s'écrit $U_R = -\vec{p} \cdot \vec{E}/2$. Préciser l'origine du facteur 2.
- 3 – Montrer que U_R est proportionnel à l'intensité instantanée (*i.e.* la puissance surfacique) du laser assimilé à une onde localement plane dans le vide.

Pour estimer la valeur de α , nous nous appuyons sur le modèle de l'électron élastiquement lié. L'électron de la couche extérieure de l'alcalin considéré (ici le rubidium) est supposé lié au reste de l'édifice atomique par une force effective de rappel harmonique $\vec{F}_h = -m\omega_0^2 \vec{r}$. Pour tenir compte des effets dissipatifs, on introduit un terme de frottement fluide $\vec{F}_f = -m\vec{v}/\tau$. Pour l'atome de rubidium, $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ avec $\lambda_0 = 780,2$ nm et $\tau = 30$ ns.

- 4 – Que représente τ dans un modèle d'atome à deux niveaux d'énergie ?
- 5 – Nous supposons que l'atome est soumis à un champ laser polarisé linéairement de vecteur champ électrique $\vec{E} = E_L \cos(\omega t) \vec{u}_z$ et de fréquence angulaire ω proche de la résonance. Écrire l'équation différentielle qui pilote le mouvement de l'électron élastiquement lié, supposé non relativiste.
- 6 – En utilisant la notation complexe, résoudre cette équation et en déduire une expression de $\vec{p}$ en fonction de $E_L \vec{u}_z$.
- 7 – Donner l'expression de la polarisabilité complexe α en fonction de e , m , ω_0 , ω , τ et ϵ_0 . Préciser les expressions de sa partie réelle $\mathcal{Re}(\alpha)$ et de sa partie imaginaire $\mathcal{Im}(\alpha)$.
- 8 – Donner l'expression réelle de $\vec{p}$ en fonction de ϵ_0 , $\mathcal{Re}(\alpha)$, $\mathcal{Im}(\alpha)$ et de E_L .

- 17 – Quel est l'intérêt de ces expériences de diffraction ?
- 18 – Rappeler l'expression de l'impulsion d'un photon associé à une onde électromagnétique plane de longueur d'onde λ .
- 19 – Montrer que la condition (1) revient à dire que la réflexion de Bragg est spéculaire et que le réseau communique à chaque photon n quanta d'impulsion $\hbar k_d$ selon la normale à la surface. Exprimer k_d en fonction de d .
- 20 – À quelle époque et par qui la diffraction de Bragg d'ondes électroniques a-t-elle été observée ?
- 21 – Estimer l'ordre de grandeur de l'énergie que doit avoir un électron d'un faisceau incident monocinétique pour que la diffraction de Bragg par un cristal soit observée.
- 22 – Peut-on observer la diffraction de Bragg d'atomes d'hélium ? Justifier votre réponse.
- 23 – Connaissez-vous des découvertes récentes redevables à cette technique ?

2.2. Miroir de Bragg optique

Dans cette partie, nous allons étudier une famille de miroirs optiques, les miroirs diélectriques, mis au point grâce aux progrès de l'épitaxie. Les seuls miroirs utilisés auparavant étaient des miroirs métalliques.

- 24 – Donner l'ordre de grandeur de la réflectivité (*i.e.* du coefficient de réflexion en puissance) maximale d'un miroir métallique en incidence normale. Pourquoi n'est-elle pas de 100 % ?
- 25 – Dans quel domaine spectral les miroirs métalliques sont-ils réfléchissants ?
- 26 – Vous paraît-il astucieux d'utiliser des miroirs métalliques dans des cavités lasers ?
- 27 – Donner un exemple d'utilisation des miroirs métalliques.

Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notations et conventions utiles pour la suite dans le cas d'ondes planes se propageant selon la direction z dans un milieu diélectrique non-absorbant, linéaire, isotrope et homogène d'indice n . La pulsation de l'onde électromagnétique est notée $\omega = 2\pi\nu$ et $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ désigne la longueur d'onde de cette onde dans le vide.

- 28 – On considère dans cette question une onde plane associée à un vecteur champ électrique complexe $\vec{E} = E_0 e^{-ikz + i\omega t} \vec{u}_x$ où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire selon Ox . Préciser le sens de propagation de cette onde. Écrire sous forme vectorielle la relation liant le champ complexe $\vec{E}$ au champ complexe $\vec{B}$ associé à cette onde. En déduire l'expression de $\vec{B}$.

On considère désormais que le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_- + \vec{E}_+ \quad \text{avec} \quad \vec{E}_\pm = E_\pm e^{\pm ikz} \vec{u}_x. \quad (2)$$

- 29 – Donner l'expression de k en fonction de n et λ_0 .
- 30 – Préciser le sens de propagation de l'onde plane d'amplitude E_- , puis celui de celle d'amplitude E_+ .
- 31 – Donner l'expression du champ magnétique $B_\pm(z)$ en fonction de k , $E_\pm$ et ω , puis de n , c et $E_\pm$.

Matrice d'interface diélectrique

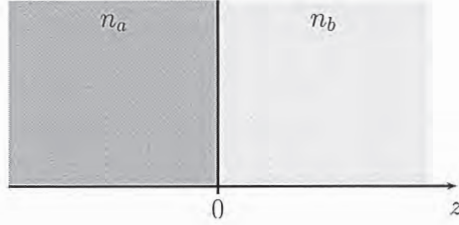


FIGURE 2 – Interface entre un milieu diélectrique d'indice n_a et un milieu diélectrique d'indice n_b .

Dans cette section, nous considérons que l'onde électromagnétique se propage dans deux milieux diélectriques d'indice respectif n_a et n_b présentant une interface commune en $z = 0$ (voir figure 2).

Les amplitudes des ondes électromagnétiques dans les deux milieux sont les parties réelles de

$$E_\ell(z) = E_{-, \ell} e^{-ikz} + E_{+, \ell} e^{+ikz} \quad (3)$$

où $\ell = a, b$ selon le milieu considéré. On introduit les notations suivantes

$$\tau_{ab} = \frac{2n_a}{n_a + n_b} \quad \text{et} \quad \rho_{ab} = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b}.$$

Pour simplifier les calculs on donne également la relation d'inversion matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta & -\eta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1/\eta \\ 1 & -1/\eta \end{pmatrix}.$$

32 – Rappeler quelles sont les grandeurs vectorielles continues lorsqu'une onde électromagnétique franchit une interface diélectrique. On suppose pour la suite qu'il n'y a ni courant surfacique ni charge surfacique libre à l'interface.

33 – En déduire l'expression de la matrice d'interface I_{ab} qui relie les amplitudes du champ électrique de part et d'autre de l'interface

$$\begin{pmatrix} E_{-,a} \\ E_{+,a} \end{pmatrix} = I_{ab} \begin{pmatrix} E_{-,b} \\ E_{+,b} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

34 – Montrer que

$$I_{ab} = \frac{1}{\tau_{ab}} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{ab} \\ \rho_{ab} & 1 \end{pmatrix}.$$

On démontre facilement que $(I_{ab})^{-1} = I_{ba}$. Interpréter cette dernière relation.

35 – Exprimer le déterminant $\det(I_{ab})$ de la matrice I_{ab} en fonction de n_a et n_b .

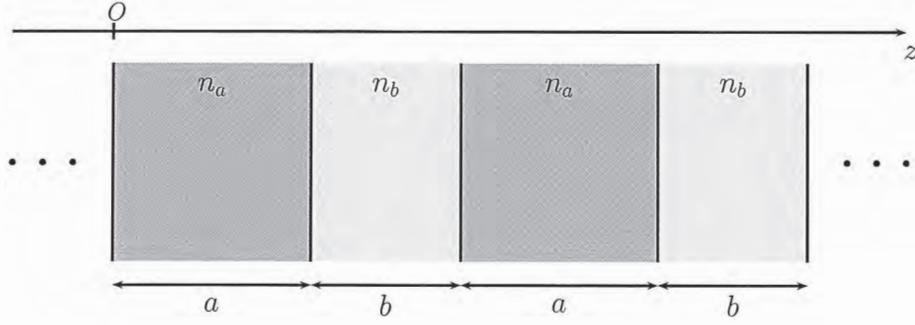


FIGURE 3 – Succession de milieux diélectriques

Matrice de propagation de l'onde électromagnétique

On note $(E_{+,b}, E_{-,b})$ les amplitudes du champ électrique juste *après* une interface a/b . On note $(\tilde{E}_{+,b}, \tilde{E}_{-,b})$ les amplitudes du champ électrique juste *avant* l'interface suivante b/a (figure 3).

36 – Établir la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{-,b} \\ \tilde{E}_{+,b} \end{pmatrix} = P_b \begin{pmatrix} E_{-,b} \\ E_{+,b} \end{pmatrix} \quad (5)$$

qui traduit la propagation dans le milieu d'indice b . On exprimera les coefficients de P_b en fonction de $\varphi_b = k_0 n_b b$.

37 – Calculer le déterminant de la matrice P_b .

La matrice du motif périodique du miroir de Bragg optique

On se place juste après une interface b/a . On introduit les notations suivantes : $\varphi_a = k_a a = k_0 n_a a$ et $\varphi_b = k_b b = k_0 n_b b$.

38 – Établir l'expression de la matrice Σ qui relie les amplitudes des champs électriques juste après deux interfaces b/a successives en fonction de I_{ab} , I_{ba} , P_a et P_b (figure 3) :

$$\begin{pmatrix} E_-(z = a + b + \epsilon) \\ E_+(z = a + b + \epsilon) \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} E_-(z = \epsilon) \\ E_+(z = \epsilon) \end{pmatrix},$$

où la distance ϵ vérifie $0 < \epsilon \ll a, b$.

39 – Calculer le déterminant de Σ sans faire le calcul explicite de Σ .

40 – Calculer explicitement les éléments diagonaux de la matrice Σ en fonction de $\rho = \rho_{ba}$, $\tau = (\tau_{ab}\tau_{ba})^{1/2}$ (on remarquera que $1 - \rho^2 = \tau^2$), φ_a et φ_b .

41 – On rappelle que pour trouver les valeurs propres d'une matrice 2×2 que nous noterons A , il suffit de résoudre le système du deuxième degré :

$$\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

où $\text{Tr}(A)$ désigne la trace de la matrice A et $\det(A)$ son déterminant.

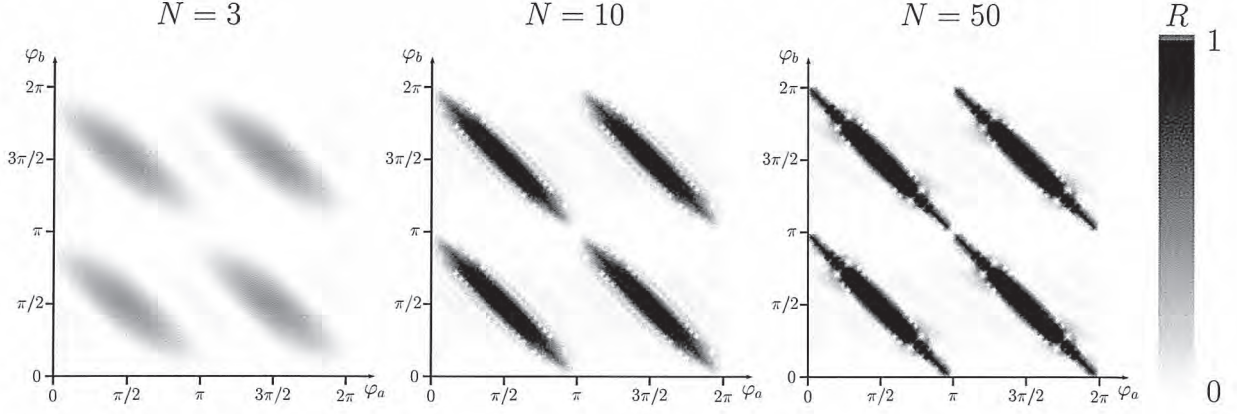


FIGURE 4 – Probabilité R_N de réflexion selon les valeurs de φ_a et φ_b pour $N = 3$, $N = 10$ et $N = 50$.

Montrer que les valeurs propres $X_{\pm}$ de la matrice Σ sont solutions de l'équation

$$X^2 - 2CX + 1 = 0 \quad (6)$$

avec

$$C = \frac{1}{\tau^2} [\cos(\varphi_a + \varphi_b) - \rho^2 \cos(\varphi_a - \varphi_b)] = \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \left(\frac{n_a}{n_b} + \frac{n_b}{n_a} \right) \sin \varphi_a \sin \varphi_b. \quad (7)$$

On ne cherchera pas à démontrer la dernière égalité de la relation (7).

42 – La matrice Σ peut facilement être diagonalisée : $\Sigma = T^{-1}DT$. Montrer qu'il en va de même pour la matrice $S_N = \Sigma^N$ traduisant la propagation à travers N bicouches.

43 – Montrer que la structure à N bicouches, caractérisée par la matrice de passage S_N , a un coefficient de réflexion en puissance donné par

$$R_N = \left| \frac{(S_N^{-1})_{12}}{(S_N^{-1})_{11}} \right|^2$$

où $(S_N^{-1})_{ij}$ désigne l'élément de matrice (i, j) de la matrice (S_N^{-1}) .

44 – La figure (4) représente sous la forme d'un graphe bi-dimensionnel $R_N(\varphi_a, \varphi_b)$ pour différentes valeurs de N . En déduire, dans le cas d'un N grand, les valeurs de $\tilde{\varphi}_a$ de φ_a et $\tilde{\varphi}_b$ de φ_b qui maximisent la réflexion et assurent une réflexion robuste vis-à-vis des petites imperfections éventuelles de la taille des couches successives. Donner dans ce cas la valeur de l'intégrale de phase

$$\int_0^{a+b} k(z) dz.$$

Commenter ce résultat à la lumière de la relation de Bragg. Justifier l'appellation « miroir de Bragg ».

45 – Pour les valeurs $\varphi_a = \tilde{\varphi}_a$ et $\varphi_b = \tilde{\varphi}_b$, les matrices D et T sont données par

$$D^{-1} = -\frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} (1+\rho)^2 & 0 \\ 0 & (1-\rho)^2 \end{pmatrix}, T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

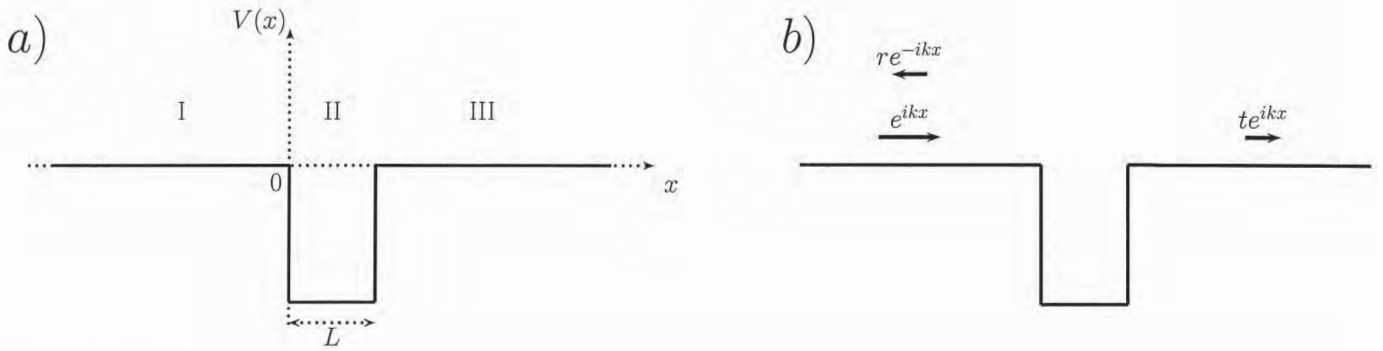


FIGURE 5 – Diffusion sur un puits de potentiel carré. a) les caractéristiques du potentiel. b) notations pour le cas quantique.

Montrer que

$$R_N = \left| \frac{1 - \left(\frac{n_a}{n_b}\right)^{2N}}{1 + \left(\frac{n_a}{n_b}\right)^{2N}} \right|^2.$$

46 – Application numérique. On souhaite réaliser un miroir diélectrique qui réfléchit la longueur d'onde $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ grâce à $N = 40$ bicouches de GaAs/AlAs. On donne la valeur des indices de ces deux matériaux à cette longueur d'onde $n_{\text{GaAs}} = 3,3$ et $n_{\text{AlAs}} = 2,9$. Calculer la réflectivité du miroir. Quelles sont les épaisseurs minimum nécessaires pour chaque couche ?

47 – La symétrie de la figure 4 montre que la bande passante du miroir peut se calculer sur la ligne $\varphi_a = \varphi_b$. On pose $\tilde{\lambda} = 4n_a a = 4n_b b$. Exprimer la largeur en longueur d'onde $\Delta\lambda$ du miroir en exploitant l'équation (7) en fonction de n_a , n_b et $\tilde{\lambda}$ (on remarquera que $|C| \geq 1$ dans la zone de réflexion).

2.3. Réseau optique pour des atomes

Dans cette partie, les photons sont remplacés par des atomes, et nous allons montrer qu'il est possible de réaliser un miroir de Bragg pour des ondes de matière. Le motif d'indice périodique est ici réalisé à l'aide d'interférences lumineuses. Le nuage d'atomes de rubidium à très basse température utilisé pour l'expérience a été produit par une méthode qui combine successivement le refroidissement laser et le refroidissement par évaporation. Notons que la motivation en physique atomique est différente de celle de l'optique vue précédemment. Il existe en effet différentes méthodes pour produire des miroirs à atomes parfaits. C'est l'aspect filtre en vitesse ajustable qui présente ici un intérêt.

Diffusion quantique sur un puits de potentiel carré

Dans ce paragraphe préliminaire, il s'agit de retrouver un certain nombre de caractéristiques de la diffusion d'une onde de matière sur un potentiel. Pour ce faire nous procédons en deux étapes : nous posons les calculs pour le cas d'un puits de potentiel carré en mettant en exergue

les propriétés non classiques, puis nous abordons grâce à une discussion physique, le cas d'un puits unique de potentiel de forme sinusoïdale.

On considère le puits de potentiel carré de la figure 5.a. Ce potentiel vaut

$$V(x) = -V_0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{et} \quad V(x) = 0 \quad \text{ailleurs,}$$

avec $V_0 > 0$. On distingue par suite trois régions : la région I ($x \leq 0$), la région II ($0 \leq x \leq L$) et la région III ($x \geq L$).

48 – Considérons tout d'abord le cas d'une particule *classique* d'énergie $E = mv_0^2/2 > 0$ se propageant de gauche à droite (de $x = -\infty$ vers $x = +\infty$). Décrire le mouvement de cette particule dans les trois régions I, II et III.

Dans un problème de diffusion quantique (voir figure 5.b), on considère traditionnellement une onde plane incidente en e^{ikx} correspondant à une énergie $E > 0$ (dans la région I) et on souhaite calculer loin de la zone du potentiel l'amplitude r de l'onde réfléchie en re^{-ikx} (région I) et celle t de l'onde transmise te^{ikx} (région III).

49 – Justifier la recherche d'une solution en ondes planes.

50 – Établir la relation entre k et E dans la région I.

51 – Exprimer la forme de la fonction d'onde dans la région II en fonction de $\kappa = (2m(E + V_0))^{1/2}/\hbar$.

52 – Énumérer les deux conditions aux limites aux frontières entre régions et donner leur signification physique.

53 – En déduire quatre équations reliant les amplitudes des ondes planes dans les différentes régions.

54 – Donner sans calcul la relation reliant $|r|^2$ et $|t|^2$ ainsi que sa signification physique.

55 – Montrer que, dans la limite $E \rightarrow 0$, $r \rightarrow -1$ (on suppose $\sin(\kappa L) \neq 0$).

56 – Ce résultat dispose-t-il d'un équivalent en mécanique classique ? Commenter.

57 – Donner la condition pour laquelle ce phénomène de réflexion persiste lorsque le puits de potentiel a une dérivée continue.

Diffusion quantique sur des puits de potentiel sinusoïdaux

On considère dans un premier temps un seul puits de potentiel sinusoïdal :

$$V(x) = -U_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq d \quad \text{et} \quad V(x) = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

L'échelle de longueur d permet d'introduire une échelle de vitesse $v_R = \hbar/md$ et une échelle d'énergie $E_R = mv_R^2/2$. La figure 6.a représente la probabilité de transmission lors d'une expérience de diffusion en fonction de la profondeur U_0 mesurée en unité de E_R et de la vitesse incidente v (énergie incidente $E = mv^2/2$) mesurée en unité de v_R .

58 – Commenter la présence de réflexion à basse vitesse ($v \ll v_R$) sur le graphe 6.a.

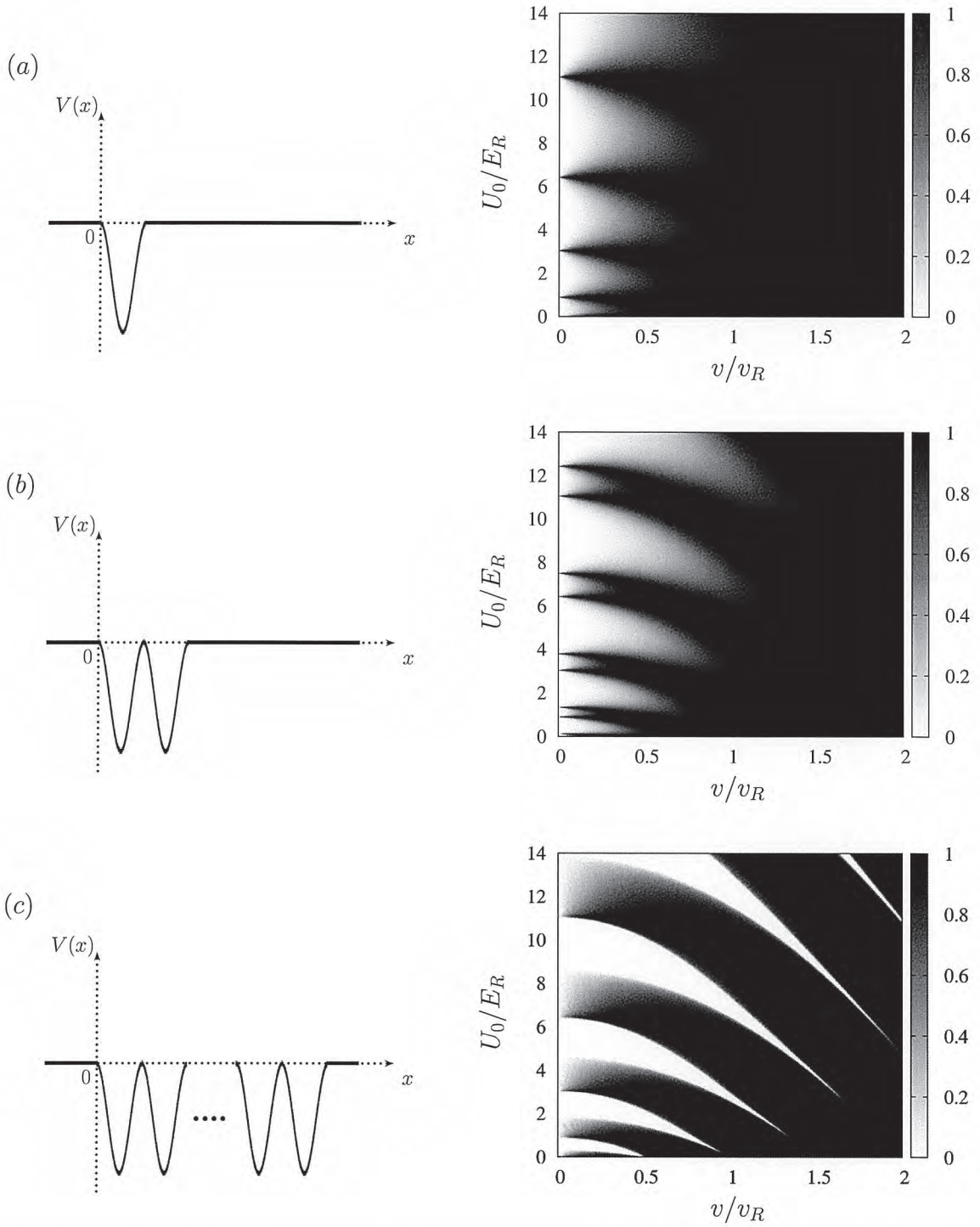


FIGURE 6 – Probabilité de transmission après diffusion sur a) un puits de potentiel sinusoïdal, b) un double puits de potentiel sinusoïdal, c) sur un très grand nombre de puits sinusoïdaux. L'échelle de gris va du blanc (réflexion parfaite) au noir (transmission parfaite).