

59 – Pourquoi présente-t-il des zones discrètes de transmission parfaite à basse vitesse ?

60 – Commenter la partie haute vitesse ($v > v_R$).

On considère maintenant un double puits de potentiel sinusoïdal :

$$V(x) = -U_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 2d \quad \text{et} \quad V(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

61 – Rappeler les propriétés des énergies et états propres du double puits. Commenter.

La probabilité de transmission est représentée sur la figure 6.b.

62 – Commenter la partie basse vitesse du graphe 6.b.

63 – Commenter la partie haute vitesse du graphe 6.b.

64 – La forme du potentiel affecte significativement la probabilité de transmission dans les cas des figures 6.a et 6.b. De manière plus générale, si nous connaissons pour toutes les énergies incidentes le coefficient de probabilité de transmission $T = |t|^2$ (et par suite celui de réflexion), est-il possible de reconstruire la forme du potentiel de diffusion ?

La figure 6.c représente la probabilité de transmission d'une succession importante de puits de potentiels sinusoïdaux

$$V(x) = -U_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq Nd \quad \text{et} \quad V(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

avec $N \gg 1$.

65 – Considérons un paquet d'onde incident de vitesse de groupe v_g et dont la distribution des vitesses a un écart type petit en regard de sa vitesse de groupe. À profondeur U_0 donnée, un paquet d'onde de vitesse de groupe v_g supérieure à v_R est-il réfléchi après avoir pénétré significativement dans le réseau ou est-il réfléchi dès qu'il aborde le premier puits de potentiel ? Commenter.

66 – La figure 6.c comporte des « langues » de réflexion totale qui convergent pour $U_0 \rightarrow 0$ vers un ensemble discret de vitesses : $v_n = nv_R/2$ où n est un entier positif non nul. Interpréter cette relation comme résultant de la diffraction de Bragg d'une onde de matière sur un motif périodique de pas d .

Mise en oeuvre expérimentale : le réseau optique

Le réseau périodique est produit par l'interférence de deux faisceaux laser cohérents de longueur d'onde $\lambda = 852$ nm. Ces lasers sont décalés en fréquence par rapport aux résonances atomiques de l'atome utilisé dans l'expérience. Soient les vecteurs d'onde $\vec{k}_1 = k \cos(\theta/2)\vec{e}_z - k \sin(\theta/2)\vec{e}_x$ et $\vec{k}_2 = k \cos(\theta/2)\vec{e}_z + k \sin(\theta/2)\vec{e}_x$ associés aux ondes planes qui représentent les deux faisceaux lasers 1 et 2 (figure 7.a). Les champs électriques associés aux deux ondes planes ont même amplitude et sont polarisés linéairement selon l'axe $\vec{e}_y$. Le champ électrique total s'écrit

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = E_0 [\cos(\phi_1 - \omega t) + \cos(\phi_2 - \omega t)] \vec{e}_y. \quad (8)$$

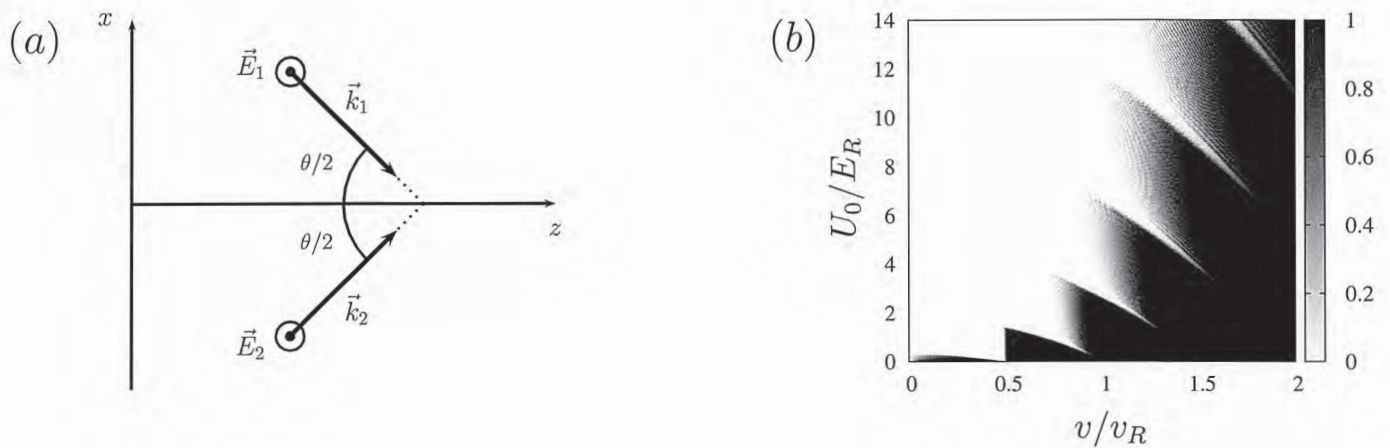


FIGURE 7 – (a) Configuration laser pour réaliser un réseau optique. (b) Probabilité de transmission après diffusion sur un réseau optique d'enveloppe gaussienne (voir texte). L'échelle de gris va du blanc (réflexion parfaite) au noir (transmission parfaite).

avec $\phi_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{r}$ et $\phi_2 = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}$.

67 – Calculer $||\vec{E}_T(\vec{r}, t)||^2$ en fonction de E_0 , ϕ_1 , ϕ_2 et ωt .

68 – En déduire la valeur moyenne $\langle ||\vec{E}_T(\vec{r}, t)||^2 \rangle$ sur une période de temps $2\pi/\omega$.

On considère un atome soumis à ce champ laser. Son énergie potentielle, qui résulte de l'interaction de son dipôle induit avec le champ électrique total, s'écrit $U_0(x) = -\zeta I(x)$ où $\zeta = 5,6 \times 10^{-36} \text{ J} \cdot \text{W}^{-1} \text{m}^2$ et $I(x) \propto \langle ||\vec{E}_T(\vec{r}, t)||^2 \rangle$ est l'intensité lumineuse moyenne.

69 – Montrer que $U_0(x)$ est un potentiel périodique de période spatiale $d = \lambda/[2 \sin(\theta/2)]$.

70 – Application numérique : on choisit $\theta = 81^\circ$. Calculer le pas du réseau d .

71 – Calculer v_R , E_R et E_R/k_B pour des atomes de rubidium ($m = 1,45 \times 10^{-25} \text{ kg}$).

Refroidissement par évaporation

D'après les ordres de grandeur de la section précédente, il apparaît que la gamme de température doit être extrêmement basse. Pour atteindre de telles températures, on exploite tout d'abord les techniques de refroidissement laser.

72 – Donner la période durant laquelle les premières recherches sur ce sujet ont été menées.

73 – Citer le nom d'un ou plusieurs prix Nobel de physique ayant contribué au développement de ce domaine de recherche.

Ces techniques ne s'avèrent toutefois pas suffisantes pour atteindre l'échelle de température de E_R/k_B . Pour pousser plus loin le refroidissement, on utilise, après un pré-refroidissement par laser, le refroidissement par évaporation. Nous proposons dans cette section un modèle thermodynamique simple qui permet de comprendre l'intérêt de cette méthode.

Considérons un gaz dilué composé de N atomes de rubidium dans un potentiel harmonique isotrope à trois dimensions de pulsation angulaire ω

$$U(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

74 – Ce gaz est thermalisé à une température T . Donner l'expression de l'énergie totale E de ce gaz d'après le théorème d'équipartition de l'énergie.

75 – On considère que, pendant une durée courte dt , la profondeur du potentiel de confinement est amenée à une valeur finie égale à $\eta k_B T$ ($\eta \sim 6$). Cette diminution de la profondeur entraîne la perte des dN atomes ayant en moyenne une énergie totale $(\eta + \kappa)k_B T$ plus grande que cette profondeur. Un modèle cinétique plus précis permet de montrer que $\kappa \ll 1$. Calculer l'énergie totale $E - dE$ du gaz qui reste confiné juste après la perte de ces dN atomes et avant que la thermalisation ne se fasse.

76 – On suppose à présent que la profondeur est à nouveau infinie. Le gaz thermalise. Calculer la nouvelle température du gaz $T - dT$ en fonction de N , dN , T , η et κ .

77 – On itère cette succession d'évaporation et de rethermalisation un grand nombre de fois. Montrer que la relation liant la température initiale T_i , le nombre d'atomes N_i , la température finale T_f et le nombre d'atomes final N_f après un grand nombre de cycle est

$$\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \left(\frac{N_f}{N_i}\right)^\alpha.$$

Exprimer α en fonction de η et κ .

78 – Estimer la valeur de α et interpréter physiquement le signe de cet exposant.

79 – Après refroidissement laser et une compression substantielle du confinement pour assurer un taux de collisions élevé, on mesure une température de typiquement $T_i = 200 \mu\text{K}$. Évaluer la température finale après évaporation de 99,9 % des atomes.

80 – Expliciter en fonction de N_f/N_i le facteur par lequel est diminué l'écart type de la distribution des vitesses des atomes du gaz.

81 – En abaissant la température du gaz qui reste confiné, on réalise de fait une opération qui diminue l'entropie. Expliquer pourquoi il n'y a pas de contradiction avec le second principe de la thermodynamique.

Mise en oeuvre expérimentale : lancement magnétique

Une fois le nuage froid obtenu, il est canalisé transversalement par un guide (similaire à celui étudié dans la partie suivante). Il s'agit de conférer au nuage d'atomes une vitesse donnée. Pour ce faire on exploite le fait que les atomes sont polarisés et disposent d'un moment magnétique permanent $\mu = \mu_B/2$ où μ_B est le magnéton de Bohr.

82 – Retrouver l'expression du magnéton de Bohr $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$ par un raisonnement qualitatif.

83 – Citer une méthode expérimentale qui permet de polariser un ensemble d'atomes.

84 – On applique le long de l'axe du guide un gradient de champ magnétique $b = 0,3 \text{ T.m}^{-1}$ pendant un temps τ . Proposer une méthode pour réaliser un tel gradient. Est-il possible de ne réaliser un gradient de champ magnétique que dans une seule direction ?

85 – Estimer la valeur de τ pour laquelle un atome initialement au repos acquiert une vitesse de 7 mm.s^{-1} sous l'effet de l'impulsion du champ magnétique.

Diffusion sur un réseau en présence d'une enveloppe

En pratique, les faisceaux laser utilisés ne sont pas des ondes planes mais des faisceaux d'enveloppe gaussienne. Ils se croisent dans une chambre à vide où l'expérience est menée. Du fait de cette contrainte, l'ouverture numérique disponible pour amener ces faisceaux est relativement faible. Le potentiel vu par les atomes prend alors la forme,

$$U(x) = -\frac{U_0}{2} \exp\left(-\frac{2x^2}{w^2}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right)\right).$$

La probabilité de transmission après diffusion sur un tel réseau optique est représentée sur la figure 7b.

86 – En considérant les contraintes expérimentales, comparer la valeur du col du faisceau w à celle du pas du réseau d (on rappelle que d est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ du laser).

87 – Expliquer l'origine physique des motifs de transmission en « dents de scie » visibles à basse vitesse $v \ll v_R$.

88 – Expliquer l'origine de zones de transmission pour différentes profondeurs dans la partie plus haute vitesse.

Pour les questions suivantes, on raisonnera sur le cas d'un paquet d'onde de vitesse de groupe v_g et d'écart type en vitesse Δv . On indiquera au besoin des exemples de valeurs numériques.

89 – Expliquer dans quelle mesure il est possible de réaliser grâce à ce dispositif un filtre en vitesse passe-bas.

90 – Expliquer dans quelle mesure il est possible de réaliser grâce à ce dispositif un filtre en vitesse passe-haut.

91 – Expliquer dans quelle mesure il est possible de réaliser grâce à ce dispositif un filtre en vitesse passe-bande.

92 – Proposer une autre méthode pour réaliser un filtre passe haut.

3 – Ondes de matière guidées

3.1. Gaz de Bose dans un potentiel harmonique isotrope

Dans ce paragraphe, nous établissons la condition d'existence d'un phénomène de condensation de Bose-Einstein à l'aide du concept de saturation des états individuels excités accessibles. Cette méthode nous permettra ensuite de traiter le cas de gaz d'atomes confinés.

93 – Comment sait-on si un atome est un boson ou un fermion ? L'atome d'hydrogène ^1H est-il un boson ? Qu'en est-il des deux isotopes de l'hélium ^3He et ^4He ?

Nous considérons ci-après un gaz de Bose dans un potentiel harmonique isotrope $U(x, y, z) = m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)/2$. L'hamiltonien associé à une particule s'écrit

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (9)$$

94 – Les énergies propres de H s'écrivent

$$\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega,$$

où n_x, n_y, n_z sont trois entiers positifs ou nuls. Commenter cette expression.

95 – Montrer que la dégénérescence $g(n)$ d'un niveau d'énergie $\varepsilon_n = \varepsilon_{0,0,0} + n\hbar\omega$ s'écrit :

$$g(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

96 – Pour un gaz de N bosons à l'équilibre thermodynamique à la température T , le nombre d'occupation du niveau microscopique $\{n\} = (n_x, n_y, n_z)$ d'énergie $\varepsilon_{n_x, n_y, n_z}$ est

$$\nu(\{n\}; T, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} - \mu)/k_B T} - 1} \quad (10)$$

où μ est le potentiel chimique. Réécrire l'expression de $\nu(\{n\})$ à l'aide de la fugacité $\tilde{z}$ définie par $\tilde{z}^{-1} = e^{(\varepsilon_{0,0,0} - \mu)/k_B T}$.

97 – Déterminer l'expression de $N_0(T, \mu)$, nombre d'atomes dans l'état fondamental, en fonction de la fugacité $\tilde{z}$.

98 – Montrer que $0 < \tilde{z} < 1$.

99 – Que dire de la limite $\tilde{z} \ll 1$?

100 – La conservation du nombre total d'atomes s'écrit $N = N_0 + N'$ où N' correspond au nombre d'atomes dans les états excités et $N_0(T, \mu)$ à la population dans l'état fondamental. Exprimer N' à l'aide d'une série faisant apparaître $g(n)$.

101 – Pour calculer l'expression de N' , nous allons faire une approximation semiclassique qui consiste à remplacer la sommation discrète sur les niveaux d'énergie par une intégrale, et qui est valable pour $\tilde{x} = \hbar\omega/k_B T \ll 1$. Justifier la forme intégrale de $N'(T, \mu)$:

$$N'(T, \mu) = \int_0^\infty \frac{u^2}{2} \frac{1}{\tilde{z}^{-1} e^{u\tilde{x}} - 1} du. \quad (11)$$

Expliquer pourquoi la borne inférieure est prise égale à zéro.

102 – En déduire que

$$N'(T, \mu) = \frac{g_3(\tilde{z})}{\tilde{x}^3}. \quad (12)$$

103 – Donner la valeur $\tilde{z}^*$ de $\tilde{z}$ pour laquelle $g_3(\tilde{z})$ est maximum.

104 – En déduire la borne supérieure du nombre d'atomes dans les états excités

$$N'_{\max}(T) = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(1).$$

105 – En déduire l'existence d'une température critique T_c en dessous de laquelle une fraction macroscopique d'atomes peuple l'état fondamental. Exprimer T_c en fonction de $\hbar, \omega, k_B, N$ et une constante numérique. On parle de saturation des états excités dans ce cas.

106 – Comparer les énergies $k_B T_c$ et $\hbar\omega$. Commenter.

107 – Montrer que pour $T < T_c$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (13)$$

3.2. Gaz de Bose dans un confinement anisotrope

Nous considérons dans ce paragraphe un gaz de Bose confiné selon l'axe z par une boîte de taille L et confiné par un potentiel harmonique de fréquence angulaire ω selon les axes transverses x et y .

L'hamiltonien associé à une particule s'écrit désormais sous la forme $H = H_{\perp} + H_{\parallel}$ avec

$$H_{\perp} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad H_{\parallel} = \frac{p_z^2}{2m}. \quad (14)$$

108 – Montrer que les énergies propres de H s'obtiennent comme la somme des énergies propres de $H_{\perp}$ et $H_{\parallel}$ pris séparément.

109 – Donner l'expression ε_{n_x, n_y} des niveaux d'énergie de $H_{\perp} = p_x^2/2m + p_y^2/2m + m\omega^2(x^2 + y^2)/2$. On introduira deux entiers positifs ou nuls n_x et n_y .

Pour obtenir l'expression des niveaux d'énergie dans la boîte selon l'axe z , nous devons déterminer les états stationnaires de l'équation de Schrödinger à une dimension en précisant les conditions aux limites choisies.

110 – Écrire l'équation de Schrödinger stationnaire associée à $H_{\parallel}$ pour une énergie $E_{\parallel} = \hbar^2 k^2/2m$. On notera $\psi_{\parallel}(z)$ la fonction d'onde correspondante.

111 – Nous supposons des conditions aux limites périodiques pour une boîte de longueur L entre $z = 0$ et $z = L$. On cherchera les fonctions propres sous la forme d'ondes planes

$$\psi_{\parallel}(z) = Ae^{ikz}.$$

Donner l'expression de A en fonction de L , et montrer que les états propres sont caractérisés par un ensemble discret infini de vecteurs d'ondes k_{n_z} .

112 – En déduire l'expression des énergies propres $\varepsilon(n_x, n_y, n_z)$ de H .

113 – On commence par considérer une situation purement unidimensionnelle pour laquelle $n_x = n_y = 0$.

(a) En utilisant la relation (10), Montrer que sous cette hypothèse, le nombre d'atomes dans les états excités du degré de liberté longitudinal (selon z) s'écrit sous la forme

$$N'(T, \mu) = \frac{L}{\lambda} g_{1/2}(\tilde{z})$$

où $\tilde{z}^{-1} = e^{(\hbar\omega - \mu)/k_B T}$ et $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ est la longueur d'onde de de Broglie thermique. On utilisera la limite semiclassique pour laquelle

$$\sum_{\{n_z\}} (...) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk (...).$$

(b) Déterminer, à température fixée, le domaine de variation de $N'(T, \mu)$ sur l'intervalle de variation de $\tilde{z}$.

(c) En déduire que, dans cette situation unidimensionnelle, le phénomène de condensation pour lequel une fraction macroscopique d'atomes peuple l'état fondamental en dessous d'une température critique ne peut se produire.

114 – On s'intéresse désormais au cas général pour lequel les valeurs de n_x et n_y ne sont pas prises égales à zéro. On introduit la quantité

$$N'_\perp(T, \mu) = \sum_{(n_x, n_y) \neq (0,0)} \sum_{n_z} \nu(\{n\}; T, \mu).$$

Donner la signification physique de cette quantité.

115 – Montrer que le nombre d'atomes N_p dans les états d'énergie transverse $\varepsilon_p = p\hbar\omega$ est donné par

$$N_p(T, \mu) = \frac{L}{\lambda} (p+1) g_{1/2} \left(\tilde{z} e^{-p\hbar\omega/k_B T} \right) \quad \text{avec } p = n_x + n_y.$$

116 – En déduire que

$$N'_\perp(T, \mu) = \frac{L}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^p}{p^{1/2}} \left(\frac{1}{(1 - e^{-p\hbar\omega/k_B T})^2} - 1 \right).$$

117 – Montrer que la quantité $(\lambda/L)N'_\perp(T, \mu)$ est bornée par une expression indépendante de μ et qui varie quadratiquement avec la température.

On utilisera l'inégalité suivante

$$\frac{1}{(1 - e^{-y})^2} - 1 < \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}.$$

118 – Conclure sur le type de condensation susceptible de se produire dans ce système.

3.3. Mesures des dispersions de vitesse par temps de vol

Un gaz de Bose parfait dans une boîte à une dimension longitudinalement et confiné harmoniquement transversalement permet de modéliser une onde de matière guidée. *Dans ce paragraphe, nous ne considérons qu'une seule dimension transverse afin de ne pas compliquer les raisonnements.* La fréquence angulaire associée au confinement transverse est notée ω .

Pour caractériser les états transverses peuplés par le gaz, une méthode classique consiste à réaliser une expérience dite de « temps de vol » au cours de laquelle on observe l'évolution de la taille du gaz en fonction du temps après coupure du confinement transverse.

119 – Expliquer pourquoi, une fois le confinement coupé, la distribution des vitesses du gaz reste constante dans ce type d'expérience.

Cas d'un gaz quantique représenté par une fonction d'onde

Considérons tout d'abord le cas d'un gaz quantique à température nulle. Il est représenté par sa fonction d'onde macroscopique associé à l'état fondamental de la boîte longitudinale et du confinement transverse. On notera N le nombre d'atomes du gaz.

On rappelle l'expression de la fonction d'onde de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique de pulsation angulaire ω à une dimension en représentation $\{|x\rangle\}$

$$\psi_0(x) = \langle x | \psi_0 \rangle = \mathcal{N}_0 e^{-x^2/(2a_0^2)},$$

où $a_0 = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ est la longueur caractéristique de l'oscillateur harmonique et $\mathcal{N}_0$ le facteur de normalisation.

120 – On note $\Psi_0(x, z)$ la fonction d'onde associée au gaz avant suppression du confinement transverse. Exprimer $\Psi_0(x, z)$ à l'aide de la fonction dans l'état fondamental d'un oscillateur harmonique $\psi_0(x)$ et de L .

Pour décrire l'évolution de la fonction d'onde lorsque l'on coupe le confinement transverse, nous allons utiliser une approche dite en loi d'échelle. Pour ce faire nous procédons en deux étapes.

121 – Premièrement, nous utilisons les variables adimensionnées $\hat{t} = \omega t$, $\hat{x} = x/a_0$ avec $a_0 = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ et $\hat{z} = z/L$. Montrer que, une fois le confinement coupé, la fonction d'onde $\hat{\Psi}(\hat{x}; \hat{t})$, exprimée en variables adimensionnées, obéit à l'équation différentielle

$$-2i \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \hat{x}^2}. \quad (15)$$

122 – Deuxièmement, montrer que la fonction d'onde $\hat{\Psi}$ de la forme

$$\hat{\Psi}(\hat{x}; \hat{t}) = \mathcal{N}(\hat{t}) \exp \left(\frac{i\dot{\beta}\hat{x}^2}{2\beta} - \frac{\hat{x}^2}{2\beta^2} \right)$$

est une solution exacte de l'équation (15) si le coefficient de dilatation dépendant du temps $\beta(\hat{t})$ obéit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\beta}{d\hat{t}^2} = \frac{1}{\beta^3}. \quad (16)$$

On ne cherchera pas à déterminer l'expression du facteur de normalisation $\mathcal{N}(\hat{t})$.

123 – Déterminer les conditions initiales vérifiées par le coefficient β et sa dérivée temporelle à $t = 0$, juste avant la suppression du confinement transverse.

124 – Montrer en résolvant l'équation différentielle (16) que $\beta(t) = (1 + \omega^2 t^2)^{1/2}$.

125 – Calculer la variance en position $\Delta x^2(t)$ au cours du temps de vol en fonction de la variance initiale Δx_0^2 , de t et de ω .

126 – Justifier que l'on parle d'un « effet loupe » induit par le temps de vol.

On rappelle que pour une distribution de probabilité centrée gaussienne, $P(x) = \mathcal{N} \exp(-x^2/(2\sigma^2))$ la variance vaut

$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx = \sigma^2.$$

Le cas d'un gaz de Boltzmann

Considérons désormais que le gaz n'est pas condensé et est à suffisamment haute température pour suivre la statistique de Boltzmann.

Le gaz est caractérisé par une distribution transverse en position et vitesse $P_0(x_0, v_0) = P_x(x_0)P_v(v_0)$ avec

$$P_x(x_0) = \mathcal{N}_x e^{-m\omega^2 x_0^2 / 2k_B T} \quad \text{et} \quad P_v(v_0) = \mathcal{N}_v e^{-mv_0^2 / 2k_B T}.$$

et la normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x_0) dx_0 = N \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_v(v_0) dv_0 = 1,$$

où N représente le nombre total d'atomes du gaz. Avec ces définitions, on trouve $\mathcal{N}_x = N(m\omega^2/2\pi k_B T)^{1/2}$ et $\mathcal{N}_v = (m/2\pi k_B T)^{1/2}$.

127 – Rappeler la définition de la variance de la distribution des vitesses à l'aide de P_v .

128 – Calculer la variance de cette distribution $(\Delta v_0)^2$ en fonction de k_B , T et m à l'aide du formulaire de début d'énoncé. Commenter ce résultat. À partir de quel théorème de physique statistique ce résultat peut-il s'obtenir ? En préciser les conditions d'application.

129 – Calculer l'expression de la variance de la distribution des positions initiales

$$(\Delta x_0)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_0^2 P_x(x_0) dx_0 \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x_0) dx_0 \right).$$

Commenter.

Après un vol libre de durée t , la distribution transverse s'écrit

$$P(x, v; t) = P_0(x - vt, v).$$

130 – Commenter cette expression.

131 – Calculer explicitement la densité linéique

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dv P(x, v; t).$$

On donne la relation mathématique suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(2a)} e^{-(x-u)^2/(2b)} dx = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{ab}{a+b}} e^{-u^2/(2(a+b))}.$$

132 – En déduire sans calcul et en vous appuyant sur les questions précédentes que $(\Delta x)^2(t) = (\Delta x_0)^2 + (\Delta v_0)^2 t^2$.

133 – Expliquer, à partir de ce résultat, comment une expérience de temps de vol permet de mesurer la température du gaz.

134 – Nous n'avons pas évoqué jusqu'à présent les collisions élastiques entre atomes. Pour autant, ce sont ces collisions qui permettent de converger vers la distribution de Boltzmann d'équilibre qui nous a servi de point de départ.

Soit γ le taux de collisions élastiques. Rappeler, à un facteur numérique près, son expression en fonction de la section efficace totale σ , de la densité atomique à 3 dimensions n et de la vitesse moyenne $\bar{v}$. Sous quelle condition relative aux deux échelles de temps γ^{-1} et ω^{-1} de ce problème les calculs précédents sont-ils valables ?

135 – Comparer les résultats du calcul quantique et du calcul classique sur l'évolution de $\Delta x(t)$ au cours du temps de vol. Commenter.

3.4. Caractère monomode ou multimode de l'onde de matière guidée

Le confinement transverse est modélisé par un oscillateur harmonique à une dimension dont l'Hamiltonien est la somme de deux termes, le terme cinétique $H_{\text{cin}} = p_x^2/2m$ et le terme d'énergie potentielle $H_{\text{pot}} = m\omega^2 x^2/2$: $H_{\perp} = H_{\text{cin}} + H_{\text{pot}}$.

On rappelle l'action des opérateurs a et $a^\dagger$ de l'algèbre de l'oscillateur harmonique à une dimension et leur action sur les états nombres : $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ et $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

On rappelle également l'expression des opérateurs impulsion p_x et position x en fonction des opérateurs a et $a^\dagger$, $p_x = (m\hbar\omega/2)^{1/2}i(a^\dagger - a)$ et $x = (\hbar/2m\omega)^{1/2}(a + a^\dagger)$.

136 – Établir l'expression de $H_\perp$ en fonction de l'opérateur nombre $\hat{n} = a^\dagger a$ et de $\hbar\omega$.

137 – Les états propres de $H_\perp$ sont les états propres de l'opérateur nombre $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$. Expliciter les énergies propres E_n .

138 – Montrer que $\langle n|p_x|n\rangle = 0$.

139 – L'état du système est représenté par une fonction d'onde $|\Psi\rangle$. Cette fonction d'onde se développe sur les états propres orthonormés de l'oscillateur harmonique

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle.$$

Calculer l'expression de la valeur moyenne $\langle n \rangle = \langle \Psi | \hat{n} | \Psi \rangle$ en fonction des coefficients c_n .

140 – Déterminer les conditions sur les corrélations entre états nombres de $|\Psi\rangle$ sous lesquelles l'égalité suivante est valable

$$\langle H_{\text{cin}} \rangle = \langle \Psi | H_{\text{cin}} | \Psi \rangle = \langle H_{\text{pot}} \rangle.$$

Commenter.

141 – Dans la mesure où l'on souhaite décrire un gaz quantique thermalisé, nous sommes amenés à prendre une moyenne thermique notée

$$\langle\langle A \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \langle n | A | n \rangle.$$

Commenter cette expression.

142 – Donner l'expression des π_n dans la limite d'une distribution thermique correspondant à un gaz non dégénéré, puis dans le cas général d'un gaz de Bose.

143 – La variance de la distribution des vitesses $(\Delta v)^2$ pour le gaz quantique thermalisé est donnée par

$$(\Delta v)^2 = \frac{\hbar\omega}{m} \left(\langle\langle n \rangle\rangle + \frac{1}{2} \right)$$

où $\langle\langle n \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n$. Commenter cette expression.

144 – Par quel type d'expériences peut-on mesurer $\langle\langle n \rangle\rangle$?

145 – Des expériences de ce type sur des lasers à atomes sont effectuées avec des atomes de rubidium de masse $1,45 \times 10^{-25}$ kg dans un confinement harmonique de pulsation angulaire $\omega/(2\pi) = 300$ Hz fourni par un laser puissant très désaccordé. On mesure l'écart type de la distribution des vitesses égale à $\Delta v = 0,9$ mm.s⁻¹. Estimer $\langle\langle n \rangle\rangle$.

146 – Ce type de mesure ne donne pas les populations dans les différents états nombres. Pour autant, on peut déduire une borne inférieure à la population $\pi_0 = |c_0|^2$ dans l'état fondamental. Montrer en effet que

$$\pi_0 \geq 1 - \langle\langle n \rangle\rangle.$$

Faire l'application numérique avec les valeurs de la question précédente. Peut-on parler dans ce cas d'un laser à atomes quasi-monomode transverse ?

- 147 – Proposer une analogie optique pour ce système.
- 148 – Préciser l'équivalent atomique de la polarisation de la lumière.
- 149 – Donner la dimension de l'espace associé à la polarisation dans les deux cas.