

SESSION 2013

---

AGRÉGATION  
CONCOURS EXTERNE

Section : PHYSIQUE-CHIMIE  
Option : CHIMIE

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

---

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB :** *La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

**Tournez la page S.V.P.**

# Physique des interfaces

---

## Introduction

Une interface est une surface de séparation entre deux milieux distincts. Cette situation lui confère souvent des propriétés bien plus complexes et bien plus riches que celles que l'on peut observer à l'intérieur des milieux. Même lorsqu'elle se trouve à l'équilibre, une interface est nécessairement le siège de discontinuités de certaines grandeurs physiques, ce qui occasionne souvent des phénomènes physiques surprenants et très intéressants.

Ce problème a pour objet d'étudier quelques aspects de la physique des surfaces liés au phénomène de capillarité. Dans la première partie, nous abordons précisément le phénomène de capillarité qui est au cœur de la formation et de la dynamique des gouttes et des bulles. La deuxième partie est consacrée à l'étude de quelques propriétés des gouttes. La troisième partie a pour but de montrer comment le phénomène d'interférence peut permettre d'étudier quelques propriétés des gouttes.

Les trois parties sont indépendantes les unes des autres. A l'intérieur même des parties, les sous-parties sont souvent indépendantes les unes des autres également.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>La capillarité</b>	<b>4</b>
1.1	La tension superficielle . . . . .	4
1.2	Contact entre deux phases liquides . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Les gouttes</b>	<b>10</b>
2.1	La loi de Laplace . . . . .	10
2.2	Le mouillage . . . . .	12
2.3	Croissance des gouttes . . . . .	15
2.4	Formation de gouttes par l'instabilité de Plateau-Rayleigh . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Mesures optiques des caractéristiques d'une goutte</b>	<b>23</b>
3.1	Principe des interférences lumineuses . . . . .	23
3.2	Détermination optique des caractéristiques de la goutte . . . . .	28

## Formulaire

### 1. Formules mathématiques

1. Formule de Stirling : si  $n$  est un entier tel que  $n \gg 1$  alors

$$\ln(n!) \simeq n \ln(n) - n$$

2. Développement de Taylor : si  $x$  est un réel tel que  $x \ll 1$  et  $n$  un entier relatif alors

$$(1+x)^n \simeq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

3. Formules trigonométriques : si  $p$  et  $q$  sont réels alors

$$\cos p \times \cos q = \frac{1}{2} (\cos(p+q) + \cos(p-q)) .$$

$$\cos p + \cos q = 2(\cos(\frac{p+q}{2}) \times \cos(\frac{p-q}{2})) .$$

4. Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques : si  $\vec{J}$  est un champ de vecteur et  $f$  un champ scalaire alors

$$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rJ_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial J_z}{\partial z}, \quad \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

5. Laplacien en coordonnées sphériques pour une fonction  $f(r)$  :

$$\Delta f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} .$$

### 2. Constantes fondamentales

Lorsque les unités ne sont pas exprimées explicitement, il est entendu que les grandeurs sont données dans le système d'unités international (SI).

Constante de Boltzman :  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Constante des gaz parfaits :  $R_g = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Masse volumique de l'eau liquide :  $\rho = 1,00 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Tension superficielle de l'eau dans l'air (à  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ) :  $\gamma_e = 73,0 \times 10^{-3} \text{ SI}$

Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

# 1 La capillarité

La capillarité est l'étude des interfaces entre un liquide d'une part et un autre liquide non miscible, un solide ou un gaz d'autre part. Ses manifestations sont nombreuses dans la vie de tous les jours. Le but de cette partie est d'aborder la notion importante de tension superficielle qui est au cœur de la capillarité. Dans un premier temps, nous introduirons la tension superficielle d'un constituant en phase liquide en contact avec l'air. Dans un second temps, nous étudierons les interactions entre deux constituants distincts, non miscibles et en phases liquides, afin de comprendre comment définir la tension de surface entre eux.

## 1.1 La tension superficielle

### a. Energie superficielle et force capillaire

Une enceinte de volume  $V$  enferme un constituant dans sa phase liquide plongée dans l'air. Cette phase est séparée de l'air par une surface de contact (ou interface) d'aire  $S$ . On déforme de façon infinitésimale l'interface de telle sorte que son aire augmente de  $d^2S$ . Le travail infinitésimal  $\delta W$  nécessaire à fournir pour réaliser cette déformation est alors donné par

$$\delta W = \gamma d^2S \quad (1)$$

où la constante  $\gamma$  est la tension superficielle entre les deux phases. On supposera que la tension superficielle  $\gamma$  entre deux phases est uniforme dans la suite du problème.

1. Donner la dimension de  $\gamma$ .
2. Sachant que  $\gamma$  est positive, justifier brièvement que l'existence d'une tension superficielle tend à minimiser l'aire de l'interface entre la phase liquide et l'air.
3. Pour illustrer cela, on considère un exemple concret : une baguette de verre mobile sépare un cadre rectangulaire en deux rectangles. Le rectangle de gauche (voir figure 1) est occupé par une lame de liquide et le tout est plongé dans l'air : sa largeur fixe est notée  $\ell$  et sa longueur variable  $x$ . Calculer alors le travail nécessaire pour augmenter la longueur du côté de longueur variable d'une quantité infinitésimale  $dx$  si on ne tient compte que de l'interface entre le liquide et l'air. On veillera à tenir compte du fait que la lame de liquide possède deux faces. En déduire que  $\gamma$  peut être interprétée comme la norme d'une force par unité de longueur dont on précisera la direction et le sens. Il s'agit de la force capillaire.

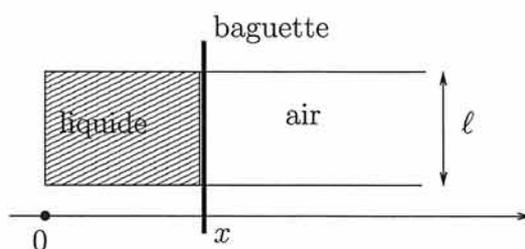


FIG. 1 – Baguette mobile sur un cadre rigide. Le rectangle de gauche est occupé par une lame liquide : sa largeur est notée  $\ell$  ; sa longueur mobile est  $x$ .

4. Donner un autre exemple qui permet d'illustrer l'idée que la tension superficielle tend à minimiser les interfaces.
5. Que se passerait-il si la tension superficielle  $\gamma$  entre la phase liquide et l'air était négative ?

### b. Origine microscopique de $\gamma$ pour les liquides dans l'air

Dans la phase liquide, les molécules exercent les unes sur les autres des forces attractives qui permettent d'assurer la cohésion du liquide. Pour celles à la surface du liquide, seule la moitié des forces de cohésion existent et, pour cette raison, le liquide va avoir tendance à réduire l'interface. Cette partie a pour objet de comprendre précisément pourquoi cela est effectivement le cas. On négligera les interactions entre les molécules du liquide et celles de l'air.

1. Donner deux exemples de forces de cohésion attractives dans les liquides.
2. On suppose que la force d'interaction entre deux molécules (supposées ponctuelles) dérive de l'énergie potentielle de Lennard-Jones

$$E_p(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6} \quad (2)$$

où  $r$  est la distance entre les molécules alors que  $A$  et  $B$  sont des constantes positives.

- a. Interpréter physiquement les deux termes de l'énergie potentielle  $E_p(r)$ . Quel terme correspond à la force de cohésion attractive dans le liquide ?
  - b. Tracer la courbe de l'énergie potentielle. En déduire l'existence d'une position d'équilibre  $r_0$  entre les deux molécules. Cette position d'équilibre est-elle stable ? Justifier la réponse.
  - c. Définir et déterminer l'énergie de cohésion, entre deux molécules, que l'on notera  $\varepsilon$ , en fonction de  $A$  et  $B$ . On remarquera que  $\varepsilon$  est négative.
  - d. On suppose, seulement dans cette question, que l'une des molécules est beaucoup plus lourde que l'autre, et que le système est à une dimension. La molécule légère, de masse  $m$ , se met alors à vibrer sous l'effet d'une perturbation extérieure alors que la molécule lourde reste immobile. En supposant que l'amplitude de cette vibration est « faible », déterminer la pulsation  $\omega$  de la vibration en fonction de  $A$ ,  $B$  et  $m$ . Préciser ce que signifie l'affirmation « l'amplitude de la vibration est faible ».
3. Afin d'établir un lien entre l'énergie de cohésion  $\varepsilon$  et la tension superficielle, on propose un modèle très simplifié de la réalité. On suppose que les molécules du liquide sont rangées de façon régulière dans un cube de côté  $L$ . Chaque molécule est distante de sa voisine d'une longueur  $r_0$  et on suppose que les molécules interagissent entre plus proches voisines seulement. On dit qu'il existe une liaison entre deux molécules si elles sont plus proches voisines. Ce modèle est en fait très loin de la réalité puisque les molécules d'un liquide ne sont pas rangées d'une façon si régulière mais il permet d'obtenir un très bon ordre de grandeur de la tension superficielle.
    - a. Déterminer le nombre total de molécules  $N$  présentes dans le cube en fonction de  $L$  et de  $r_0$ . On posera par la suite  $N = n^3$  où  $n$  est le nombre de molécules réparties le long d'une arête du cube.
    - b. On considère une molécule qui ne se trouve pas sur le bord du cube. Quel est son nombre de plus proches voisines ? En déduire, si on néglige dans un premier temps

les contributions des molécules qui se trouvent sur le bord du cube, que le nombre de liaisons entre toutes les molécules du cube est :

$$n_{\ell}^{int} = 3N = 3n^3. \quad (3)$$

- c. Maintenant, on ne néglige plus les effets de surface. On considère alors une molécule qui se trouve sur une surface du cube mais pas sur une arête. Quel est le nombre de ses plus proches voisines ?
- d. En déduire que, si on ne néglige pas les effets de surface mais si on néglige l'effet dû aux molécules qui se trouvent sur les arêtes du cube, le nombre de liaisons  $n_{\ell}$  entre les molécules est maintenant donné par

$$n_{\ell} = 3n^2(n - 1). \quad (4)$$

- e. En supposant que l'énergie de cohésion pour chaque paire de molécules voisines est donnée par  $\varepsilon$ , montrer que l'énergie potentielle de cohésion totale du système, notée  $U$ , s'écrit comme la somme  $U = U_V + U_S$  d'une énergie volumique  $U_V$  et d'une énergie surfacique  $U_S$  définies par

$$U_V = 3\varepsilon \frac{V}{r_0^3} \quad \text{et} \quad U_S = -\frac{1}{2}\varepsilon \frac{S}{r_0^2} \quad (5)$$

où  $V$  et  $S$  sont respectivement le volume et la surface du cube. On admet maintenant que cette expression de l'énergie de cohésion est vraie quelle que soit la forme du liquide :  $V$  est alors le volume du fluide et  $S$  l'aire de l'interface entre le fluide et l'air.

- f. Conclure que le liquide a plutôt intérêt à réduire l'aire de son interface avec l'air.
- g. Donner une expression de la tension superficielle  $\gamma$  en fonction de  $\varepsilon$  et de  $r_0$ .
- h. Pour la plupart des huiles, les interactions intermoléculaires sont de type Van der Waals. Quels sont les ordres de grandeur de l'énergie  $\varepsilon$  et de la distance  $r_0$  pour une liaison de type Van der Waals ? En déduire un ordre de grandeur de la tension superficielle  $\gamma$  d'une huile dans l'air.
- i. Pourquoi la tension superficielle de l'eau dans l'air est-elle en général plus grande que celle des huiles ?
- j. Dans ce modèle, la tension superficielle  $\gamma$  ne dépend que des caractéristiques intrinsèques du liquide seulement. Or en réalité ce n'est pas le cas. Comment peut-on alors améliorer ce modèle ?

## 1.2 Contact entre deux phases liquides

On considère maintenant deux phases liquides en contact. Il n'est possible de définir la tension superficielle entre ces deux fluides que s'ils ne sont pas miscibles. Le but de cette partie est alors de montrer, via un modèle simplifié, sous quelles conditions les deux phases ne sont pas miscibles. Il sera dans ce cas possible d'évaluer la tension superficielle à leur interface.

Pour cela, on supposera que chaque fluide n'est constitué que d'un seul type de molécules que l'on notera  $M_1$  et  $M_2$ . On suppose, comme dans la partie précédente, que les molécules

$M_1$  et  $M_2$  sont réparties régulièrement dans un même cube de côté  $L$  (figure 2). On notera  $N$  le nombre total de molécules;  $N_1$  et  $N_2$  le nombre de molécules de types  $M_1$  et  $M_2$ . La grandeur  $\varepsilon_1$  (respectivement  $\varepsilon_2$ ) est l'énergie de cohésion entre deux molécules voisines de type  $M_1$  (respectivement de type  $M_2$ ) et  $\varepsilon_{12}$  l'énergie de cohésion entre deux molécules voisines de types différents. Ces énergies sont supposées négatives.

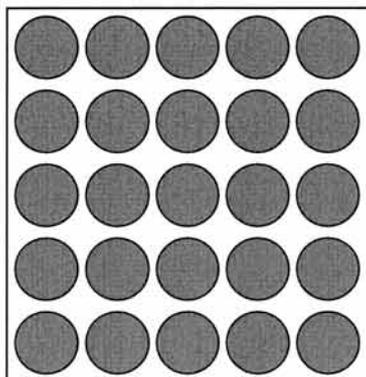


FIG. 2 – Répartition régulière des molécules dans un cube. Les molécules sont de deux types  $M_1$  et  $M_2$ . Ici, on propose une vue en coupe mais la répartition est tridimensionnelle.

### a. Etude énergétique

Pour commencer, nous allons comparer l'énergie du système formé des deux types de molécules lorsqu'elles sont totalement mélangées et lorsqu'elles sont totalement séparées. Sauf mention contraire, on négligera les interactions avec l'air et tous les effets de surface dans le calcul de l'énergie.

1. On suppose que les phases sont totalement séparées. Montrer que l'énergie de cohésion du système  $U_s$  est donnée par

$$U_s = N(x\chi_1 + (1-x)\chi_2) \quad (6)$$

où  $x = N_1/N$  est la fraction volumique des deux liquides alors que  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont des grandeurs que l'on déterminera en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ .

2. Pour calculer l'énergie de cohésion du système  $U_m$  lorsque les phases sont mélangées, on adopte une approche statistique. Pour cela, on suppose que  $N$ ,  $N_1$  et  $N_2$  sont très grands. Déterminer alors le nombre moyen de liaisons  $d_1$  entre molécules de type  $M_1$ ,  $d_2$  entre molécules de type  $M_2$  et le nombre moyen de liaisons  $d_{12}$  entre molécules de types différents.
3. En déduire que l'énergie  $U_m$  est donnée en moyenne par l'expression

$$U_m = N(x^2\chi_1 + (1-x)^2\chi_2 + 2x(1-x)\chi_{12}) \quad (7)$$

où  $\chi_{12}$  est une grandeur proportionnelle à  $\varepsilon_{12}$  que l'on déterminera.

4. En déduire que la différence  $\Delta U = U_m - U_s$  est donnée par

$$\Delta U = Nx(1-x)\chi \quad (8)$$

où  $\chi$  est la dissimilitude chimique des molécules que l'on déterminera en fonction de  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  et  $\chi_{12}$ .

5. Lorsque les interactions sont de type Van der Waals, on remarque que  $\chi_1 = -\delta_1^2$ ,  $\chi_2 = -\delta_2^2$  et  $\chi_{12} = -\delta_1\delta_2$  où  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont des grandeurs positives. Commenter ces relations. Est-ce alors l'état totalement mélangé ou bien l'état totalement séparé qui est favorisé d'un point de vue énergétique dans ce cas ?

## b. Etude entropique

Les considérations énergétiques ne sont pas suffisantes pour conclure si les deux liquides ont plutôt tendance à se mélanger ou bien à se séparer. Il est nécessaire de tenir compte des effets entropiques, et cette partie a pour but de comparer les entropies des états totalement séparé et totalement mélangé du système.

1. D'un point de vue entropique, est-ce l'état mélangé ou bien l'état séparé qui est favorisé ? Justifier la réponse par des arguments physiques.
2. L'entropie d'un système est donnée par la relation de Boltzmann  $S = k_B \ln \Omega$  où  $\Omega$  est le nombre total de configurations microscopiques du système. Justifier que, pour un système composé de  $N_1$  molécules de type  $M_1$  et de  $N_2$  molécules de type  $M_2$ , le nombre de configurations microscopiques est donné par

$$\Omega = \frac{N!}{N_1!N_2!} . \quad (9)$$

3. En utilisant la formule de Stirling rappelée dans le formulaire, montrer que lorsque le système contient un très grand nombre de molécules  $M_1$  et de molécules  $M_2$ , l'entropie se simplifie et s'écrit sous la forme

$$S = -Nk_B (x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x)) . \quad (10)$$

4. Retrouver à partir de l'expression précédente que l'entropie  $S_s$  du système formé des deux liquides séparés est nécessairement nulle.
5. On notera  $S_m$  l'entropie associée à l'état mélangé. Déterminer le signe de la variation d'entropie  $\Delta S = S_m - S_s$  lorsque le système passe d'un état séparé à un état mélangé. Pour cela, on tracera la courbe de la fonction  $f(x) = x \ln x$  lorsque  $x \in [0, 1]$ .
6. Justifier alors le résultat de la question 1.2.b.1. ci-dessus de façon plus rigoureuse.

## c. Potentiel thermodynamique

En fait, pour déterminer si le système est dans l'état séparé ou mélangé, il faut tenir compte à la fois des considérations énergétiques et entropiques, ce que nous allons faire dans cette partie. Pour cela, on interprète l'énergie de cohésion  $U$  du système comme une énergie interne.

1. Le cube est plongé dans un thermostat de température  $T$ . Le bon potentiel thermodynamique pour décrire les états d'équilibre du système est alors  $F = U - TS$ . Quel nom porte ce potentiel thermodynamique ?
2. Donner alors l'expression de la variation  $\Delta F = F_m - F_s$  lorsque le système passe de l'état séparé à l'état mélangé en fonction de  $x$  et  $T$  en particulier.
3. Quel devrait être le signe de  $\Delta F$  pour que l'état séparé soit favorisé par rapport à l'état mélangé ?

4. Pour avoir une idée du signe de  $\Delta F$ , on suppose que les molécules de types  $M_1$  et  $M_2$  sont en nombre égal, par souci de simplification. En déduire que la variation de  $F$  précédente se simplifie et devient :

$$\Delta F = N \left( \frac{1}{4}\chi - \ln(2)k_B T \right). \quad (11)$$

5. En déduire la condition entre  $\chi$  et  $T$  pour que l'état séparé soit favorisé par rapport à l'état mélangé. Discuter la dépendance de  $\chi$  en fonction de la température.
6. Quelle est la valeur limite de la dissimilitude chimique  $\chi_c$  pour pouvoir séparer les deux phases liquides à la température  $T = 298 \text{ K}$  ?
7. D'après ce qui précède, peut-on mélanger du n-décane liquide et du méthanol liquide en nombre de moles identique à  $298 \text{ K}$  ? On suppose que les interactions qui ont lieu dans ces fluides sont de type Van der Waals avec  $\delta_1 \simeq 25 \times 10^{-10} \text{ J}^{1/2}$  et  $\delta_2 \simeq 56 \times 10^{-10} \text{ J}^{1/2}$ . Les grandeurs  $\delta_1$  et  $\delta_2$  ont été définies dans la question (1.2.a.5).
8. On revient maintenant au cas général (avec  $N_1 = N_2$ ) et on suppose que les deux phases liquides sont en quantité identique et ne se mélangent pas. Comment se répartissent les molécules  $M_1$  et  $M_2$  dans le cube ?
9. En déduire alors dans ce cas une expression de la tension superficielle entre ces deux phases en fonction de  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  et  $\chi_{12}$ . Est-elle plus satisfaisante que celle obtenue dans la question (1.1.b.3.h) ? Justifier.
10. Notons que cette analyse compare seulement deux situations : l'une correspondant à un mélange total et l'autre à une séparation totale. En fait, les deux situations peuvent coexister en même temps dans le système sous certaines conditions. Ceci a été étudié en détail par Flory. A quels systèmes physico-chimiques intéressants peut s'adapter la théorie de Flory pour comprendre leurs comportements ?

## 2 Les gouttes

Les gouttes sont une belle illustration familière des effets de la tension superficielle. Leurs formes plus ou moins étonnantes selon les situations sont en grande partie le résultat de l'existence d'une tension superficielle entre le liquide qui constitue la goutte et les différents milieux avec lesquels elle est en contact. Cette partie a précisément pour but de comprendre certaines propriétés des gouttes.

### 2.1 La loi de Laplace

Lorsqu'elles sont plongées dans un fluide, les gouttes ont généralement une surface courbe qui marque la frontière entre deux liquides (par exemple, une goutte d'huile dans l'eau) ou entre un liquide et un gaz (par exemple, une goutte de pluie dans l'atmosphère). Cette surface est donc une interface qui est essentiellement caractérisée par une tension superficielle. Sa courbure est une manifestation d'une discontinuité de la pression de part et d'autre de l'interface courbée.

#### a. Les gouttes sphériques

On considère dans un premier temps une goutte sphérique d'huile dans l'eau. On note  $\gamma_{he}$  la tension superficielle entre l'huile et l'eau et  $R$  le rayon de la goutte. On néglige dans un premier temps la masse de la goutte d'huile; ainsi on ne considèrera pas ici le phénomène de pesanteur. Par conséquent, la pression à l'intérieur de la goutte  $P_{int}$  et celle à l'extérieur  $P_{ext}$  sont supposées uniformes.

1. Pour quelle raison la goutte prend-elle une forme sphérique?
2. La pression est-elle plus importante à l'intérieur ou à l'extérieur de la goutte? Justifier la réponse par un argument physique.
3. Pour déterminer la discontinuité de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la goutte d'eau, on adopte un raisonnement énergétique. On cherche à déterminer le travail infinitésimal  $\delta W$  que doit fournir un opérateur pour augmenter le rayon de la goutte de  $dR$ .
  - a. Calculer les variations de volume  $dV$  et de surface  $dS$  de la goutte lorsque son rayon passe de  $R$  à  $R + dR$ .
  - b. En déduire l'expression de  $\delta W$ .
  - c. Conclure que lorsque la goutte d'eau est à l'équilibre mécanique, la discontinuité de pression est donnée par la loi de Laplace pour les sphères :

$$P_{int} - P_{ext} = \frac{2\gamma_{he}}{R}. \quad (12)$$

- d. Pour une bulle de savon de rayon  $R$  dans l'air, on trouve que la discontinuité de pression entre l'extérieur et l'intérieur de la bulle est donnée par

$$P_{int} - P_{ext} = \frac{4\gamma_{sa}}{R} \quad (13)$$

où  $\gamma_{sa}$  est la tension superficielle entre l'air et l'eau savonneuse. Qu'est-ce qui explique la différence entre les deux formules précédentes?

- e. Comment la pression  $P_{int}$  dans les bulles ou les gouttes varie-t-elle en fonction du rayon  $R$ ? Décrire une expérience qui permet d'illustrer ce résultat.

## b. Les interfaces de forme quelconque

Lorsque l'interface a une forme quelconque (non nécessairement sphérique), la discontinuité de pression en un point  $M$  de l'interface est donnée par la formule de Laplace générale

$$P_{int} - P_{ext} = \gamma C = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (14)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les deux rayons de courbure principaux de la surface au point  $M$ , et  $C$  est définie comme la courbure de l'interface en  $M$ . Ces notions sont illustrées dans la figure (3).

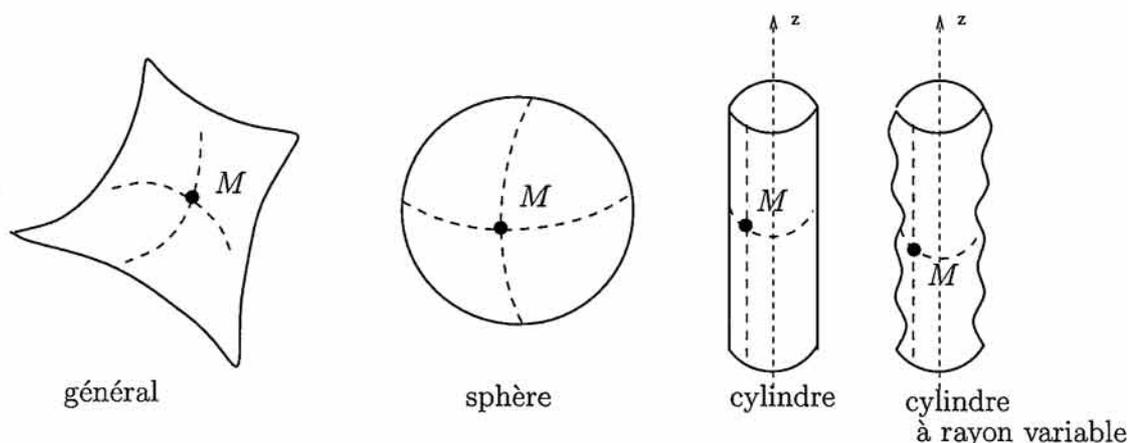


FIG. 3 – Illustrations de la notion de courbure. La courbure en  $M$  est la somme de l'inverse des deux rayons de courbure principaux. Les rayons principaux sont les rayons des cercles dont les arcs ont été représentés en pointillé. Plusieurs situations sont présentées : la sphère, le cylindre et le tube à symétrie cylindrique dont le rayon est variable. Dans chacun de ces cas,  $P_{int}$  est la pression à l'intérieur de la sphère ou des cylindres et  $P_{ext}$  est la pression à l'extérieur.

1. Retrouver la formule de Laplace pour les interfaces sphériques de rayon  $R$ .
2. Que devient la relation de discontinuité de la pression si l'interface est un cylindre de rayon  $R$ ?
3. Lorsque la membrane est un tube à symétrie cylindrique dont le rayon  $r(z)$  varie avec l'altitude  $z$  selon une loi du type

$$r(z) = R + \epsilon(z) \quad (15)$$

où  $\epsilon(z)$  reste toujours très petit devant  $R$  alors la courbure en un point d'altitude  $z$  sur l'interface est donnée (approximativement) par

$$C = \frac{1}{r} - \frac{d^2\epsilon}{dz^2}. \quad (16)$$

L'axe ( $Oz$ ) est confondu avec l'axe de symétrie du cylindre (comme indiqué sur le schéma 3) et  $O$  est un point quelconque de cet axe.

- a. Interpréter physiquement cette expression de la courbure et en vérifier l'homogénéité.
- b. Calculer  $C$  lorsque  $\epsilon(z) = \epsilon_0 \cos(kz)$  où  $\epsilon_0$  et  $k$  sont des constantes. On supposera que  $\epsilon$  est négligeable devant  $R$ . Interpréter également le résultat obtenu.

## 2.2 Le mouillage

Dans la partie précédente, nous avons étudié quelques propriétés des gouttes liquides lorsqu'elles sont en contact avec un fluide seulement. Ceci nous a permis de comprendre la raison de leur sphéricité. Cette partie est consacrée à l'étude de la forme d'une goutte liquide sur un substrat solide. Sous certaines conditions, cette goutte ne s'étale pas et adopte une forme particulière. Ce phénomène est très familier et joue un rôle très important dans l'industrie, en biologie, ou dans d'autres domaines. L'étude des formes des gouttes s'inscrit dans la théorie du mouillage.

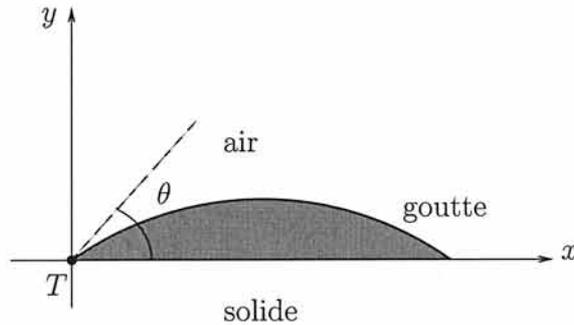


FIG. 4 – Profil d'une goutte d'eau sur un substrat solide. L'angle de contact est noté  $\theta$ . On associe un système de coordonnées cartésiennes à ce système centré sur le point de contact  $T$ .

On considère alors une goutte liquide posée sur un substrat solide, le tout étant plongé dans l'air (figure 4). Ainsi, trois phases sont en contact et la ligne de contact entre les trois phases s'appelle la ligne triple.

Lorsque la goutte ne s'étale pas totalement, elle forme une calotte sphérique qui forme un angle de contact  $\theta$  avec le substrat. L'angle de contact dépend de la valeur des tensions superficielles  $\gamma_{lg}$  (entre la goutte et l'air),  $\gamma_{sg}$  (entre le substrat et l'air) et  $\gamma_{sl}$  (entre le substrat et la goutte). On peut déterminer l'angle de contact  $\theta$  de deux façons équivalentes.

### a. Approche dynamique

La première consiste à considérer la ligne triple comme un système mécanique sur lequel s'appliquent les forces capillaires définies au début de la partie 1. Dans cette question, on négligera les forces de pesanteur.

1. Donner l'expression des normes des trois forces capillaires qui s'appliquent sur un élément infinitésimal de longueur  $dl$  de la ligne triple.
2. Reproduire le schéma de la figure (4) et représenter les trois forces capillaires qui agissent au voisinage du point  $T$  de la ligne triple. On justifiera les directions et les sens de ces forces.
3. Ecrire l'équilibre des forces capillaires suivant l'axe ( $Tx$ ) et en déduire la relation de Young

$$\gamma_{lg} \cos \theta = \gamma_{sg} - \gamma_{sl} \quad (17)$$

qui permet de déterminer l'angle de contact  $\theta$ .

4. Comment interpréter la projection sur l'axe ( $Ty$ ) de la relation traduisant le bilan des actions des trois forces capillaires sur un élément de longueur de la ligne triple ?

5. On suppose que le substrat solide est une lame de verre. Or, les propriétés élastiques du verre sont en partie caractérisées par son module d'Young  $E = 69 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}$ . Construire alors, par analyse dimensionnelle, une grandeur  $\delta$  homogène à une longueur faisant intervenir  $E$  et  $\gamma_{lg}$ , et en donner un ordre de grandeur. Interpréter cette longueur  $\delta$  à la lumière de la question précédente et discuter son ordre de grandeur.

### b. Approche énergétique

La deuxième façon de déterminer  $\theta$  consiste à utiliser un argument énergétique. On cherche à déterminer le travail  $\delta W$  que doit fournir un opérateur pour déplacer la ligne triple d'une longueur infinitésimale  $dx$  comme illustré sur la figure (5). On néglige toujours les forces de pesanteur.

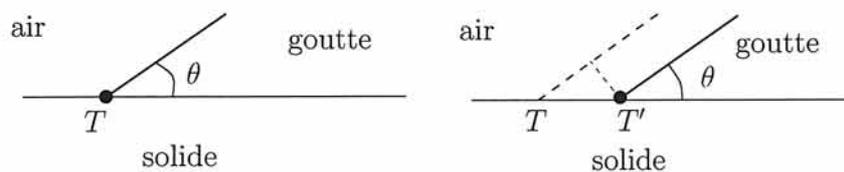


FIG. 5 – La ligne triple est déplacée d'une longueur  $dx$  du point  $T$  au point  $T'$  sur ce profil. L'angle de contact n'est pas modifié lors du déplacement.

1. Déterminer les variations de surfaces de contact  $\delta S_{lg}$  (entre la goutte et l'air),  $\delta S_{sg}$  (entre le substrat et l'air),  $\delta S_{sl}$  (entre le substrat et la goutte) induites par le déplacement d'un élément de longueur  $dl$  de la ligne triple.
2. En déduire le travail  $\delta W$  que doit fournir l'opérateur pour réaliser ce déplacement de la ligne triple.
3. Retrouver alors la relation de Young.

### c. Mouillabilité

Nous allons maintenant exploiter la relation de Young pour comprendre le phénomène de mouillage.

1. A quelles conditions sur les tensions superficielles existe-t-il un angle de contact  $\theta$  non nul ?
2. Que se passe-t-il si cette condition n'est pas vérifiée ? On distinguera les deux options suivantes :  $\gamma_{lg} + \gamma_{sl} < \gamma_{sg}$  et  $\gamma_{sg} + \gamma_{lg} < \gamma_{sl}$ . Préciser en particulier dans quel cas la goutte d'eau s'étale complètement.
3. Les propriétés de mouillage de l'interface dépendent de la nature du liquide mais surtout de la nature du substrat solide. Les surfaces qui ont une grande tension superficielle  $\gamma_{sg}$  dans l'air sont dites de haute énergie. Ces surfaces sont-elles plutôt mouillées ou plutôt non mouillées par les liquides ?
4. Décrire une situation concrète dans laquelle il est intéressant que le liquide ne mouille pas le substrat solide.
5. Décrire également une situation dans laquelle il est intéressant que le liquide mouille le substrat.

6. Décrire succinctement un protocole de mesure de tension superficielle des liquides dans l'air. Accompagner la description d'un schéma illustratif.

#### d. Effet du champ de pesanteur

Lorsque la goutte est « trop lourde », on ne peut plus négliger l'effet du champ de pesanteur dont on notera  $g$  l'accélération.

1. Déterminer par analyse dimensionnelle une grandeur  $\kappa$  homogène à l'inverse d'une longueur à partir de la masse volumique  $\rho$  de la goutte, de sa tension superficielle  $\gamma_{lg}$  dans l'air et de  $g$ . La grandeur  $\kappa^{-1}$  s'appelle la longueur capillaire.
2. Montrer que la longueur capillaire correspond au rayon  $R$  d'une goutte d'eau sphérique (illustrée dans la figure 6) pour lequel l'effet de la pression hydrostatique (due au champ de pesanteur) est équivalent à l'effet de la pression de Laplace (due à la capillarité). Les deux effets sont comparables lorsque la différence  $P_B - P_A$  est égale à la différence  $P_A - P_C$  où les points  $A, B, C$  sont indiqués sur le schéma (6). On suppose que  $\rho$  est uniforme dans la goutte.

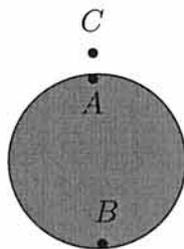


FIG. 6 – Profil d'une goutte parfaitement sphérique dans l'air. Les points  $A$  et  $B$  sont dans la goutte d'eau et correspondent aux points le plus haut et le plus bas de la goutte. Le point  $C$  se trouve à l'extérieur de la goutte.

3. Quelle forme prend alors la goutte si on la pose sur le substrat non mouillant ou partiellement mouillant lorsque  $R \ll \kappa^{-1}$  ?
4. Lorsque la goutte est « lourde », elle s'aplatit sous l'effet de la gravité lorsqu'on la pose sur un substrat solide (partiellement mouillant). Elle adopte alors un profil illustré dans la figure (7). Lorsqu'on se trouve loin de la ligne triple, la surface de la goutte est quasiment

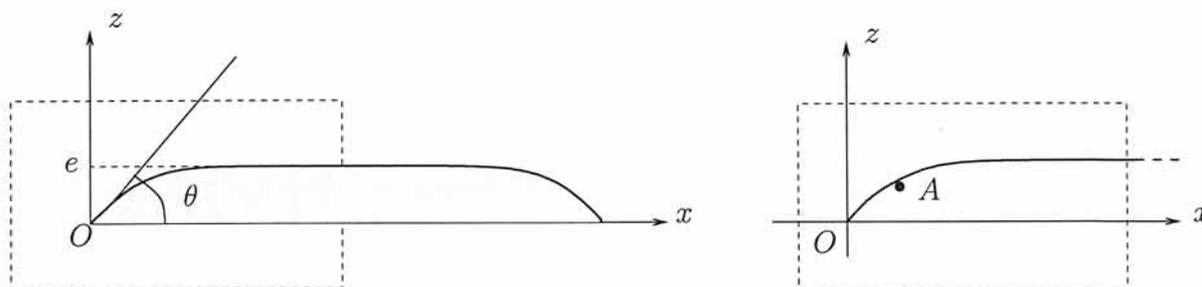


FIG. 7 – Goutte « lourde » posée sur un substrat solide. A droite est représentée la partie croissante de l'équation de la surface de la goutte  $z(x)$ . On cherchera à déterminer l'équation de cette partie de courbe seulement en supposant que la goutte est suffisamment « grosse ».

un plan horizontal d'équation  $z = e$  dans le système de coordonnées présenté dans la figure (7). Le but de cette question est de déterminer la forme de ce profil, caractérisée par une fonction  $z(x)$ . Pour simplifier le problème, on suppose que la forme de la goutte est invariante dans la direction  $y$  (l'axe  $(Oy)$  étant perpendiculaire au plan du dessin) et on ne s'intéresse qu'à la partie croissante de la fonction  $z(x)$  comme indiqué sur la partie droite de la figure (7). On notera  $P_0$  la pression de l'air supposée uniforme. La tension superficielle du fluide dans l'air est notée  $\gamma_{lg}$  et sa masse volumique  $\rho$ . Ces grandeurs sont supposées uniformes.

- a. En utilisant l'expression de la formule de Laplace généralisée (14), justifier que la pression  $P_A$  en un point  $A$  à la surface du fluide mais dans le fluide est donnée par

$$P_A = P_0 - \gamma_{lg} \frac{d^2z}{dx^2} \quad (18)$$

lorsque  $x$  est suffisamment grand. Justifier physiquement le signe moins devant le terme de Laplace et préciser ce que signifie que «  $x$  est suffisamment grand ».

- b. En utilisant la loi de l'hydrostatique, établir un lien entre  $P_A$ ,  $P_0$ , la masse volumique du fluide  $\rho$ , l'altitude  $z$  du point  $A$  et l'épaisseur maximale  $e$  de la goutte.  
c. En déduire l'équation différentielle que doit satisfaire l'équation caractérisant le profil de la surface du fluide. Montrer que sa solution est de la forme :

$$z(x) = e + z_0 \exp(-\kappa x) \quad (19)$$

où  $z_0$  est une constante d'intégration.

- d. Déterminer la constante  $z_0$ .  
e. En fait, cette solution est pertinente lorsque  $x$  est suffisamment grand dans le sens de la question (4.a.) ci-dessus. A courte distance, la solution est plus compliquée. Si on suppose que cette solution (19) reste vraie malgré tout, déterminer une relation entre l'épaisseur  $e$  de la goutte et l'angle de mouillage  $\theta$  du fluide sur la surface solide.  
f. En fait, l'expression exacte de  $e$  en fonction de  $\theta$  est donnée par  $e = 2\kappa^{-1} \sin(\theta/2)$ . Montrer que l'expression exacte de  $e(\theta)$  et celle obtenue dans la question précédente coïncident lorsque  $\theta$  est un angle très petit.  
5. Pour conclure, décrire succinctement deux situations où la compétition entre les forces capillaires et la gravité se manifeste.

### 2.3 Croissance des gouttes

En raison de la loi de Laplace, on comprend que les gouttes de petite taille se vident dans celles de grande taille lorsqu'elles sont mises en contact. On observe un phénomène similaire dans une émulsion, par exemple d'huile dans l'eau, lorsque les petites gouttes disparaissent au profit des grosses. Cette partie a pour objet l'étude de ce phénomène en s'inspirant de la théorie d'Ostwald (simplifiée) sur la croissance des gouttes.

Pour cela, on considère une émulsion d'huile dans l'eau. L'huile est en très faible quantité par rapport à l'eau et forme des gouttes supposées parfaitement sphériques. Comme cela a déjà été souligné ci-dessus, les petites gouttes sont défavorisées par rapport aux grandes gouttes du point de vue de la capillarité. Ainsi, les petites gouttes ont tendance à perdre leurs molécules

qui vont diffuser dans l'eau vers les plus grandes gouttes. Capillarité et diffusion sont les deux ingrédients essentiels pour comprendre la dynamique des gouttes dans une émulsion.

Pour simplifier le problème, on considère, dans cette émulsion, une seule goutte de rayon  $R(t)$  dont on désire comprendre la dynamique. On se fixe alors un système de coordonnées sphériques dont le centre  $O$  est confondu avec celui de la goutte (figure 8).

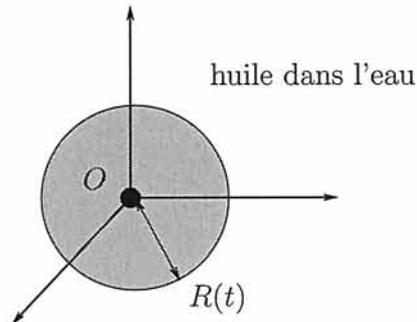


FIG. 8 – Goutte d'huile dans l'eau dont le rayon  $R(t)$  varie avec le temps. A l'extérieur de la goutte, les molécules d'huile sont diffusées dans l'eau et leur concentration est notée  $c(\vec{r}, t)$  au point de vecteur position  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$ .

La concentration de l'huile dans l'eau n'est ni uniforme ni constante dans le temps a priori (sauf mention contraire) et on notera  $c(\vec{r}, t)$  sa valeur en un point repéré par le vecteur position  $\vec{r}$ . La grandeur  $c(\vec{r}, t)$  s'exprime en  $\text{mol.m}^{-3}$ .

### a. Phénomène de diffusion

Nous commençons par étudier la diffusion des molécules d'huile dans l'eau qui s'échappent des petites gouttes pour aller vers les plus grosses gouttes. On notera  $D$  le coefficient de diffusion correspondant.

1. Rappeler la loi de Fick pour la diffusion des molécules d'huile dans l'eau qui relie la concentration  $c(\vec{r}, t)$  au vecteur densité de courant de particules  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ . Quel est le sens physique de cette loi ?
2. Ecrire l'équation de diffusion pour la concentration  $c(\vec{r}, t)$  des molécules d'huile dans l'eau.
3. On suppose que l'on peut négliger les variations temporelles de la concentration qui sera alors notée  $c(\vec{r})$  seulement. En déduire que  $c(\vec{r})$  satisfait l'équation

$$\Delta c = 0 \tag{20}$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien.

4. On cherche maintenant à résoudre cette équation à l'extérieur de la goutte d'huile. On suppose que le système possède une symétrie sphérique et donc  $c(r)$  ne dépend que de la coordonnée radiale  $r$  qui est la distance au centre de la goutte. Montrer que

$$c(r) = X + \frac{Y}{r} \tag{21}$$

est solution de l'équation (20) lorsque  $X$  et  $Y$  sont des constantes.

5. Tout le problème se réduit maintenant à la détermination des constantes d'intégration  $X$  et  $Y$ . Pour cela, il faut comprendre comment se comporte la concentration aux limites du système. A des distances  $r$  très grandes devant  $R$  tout d'abord, la concentration  $c$  est donnée par la concentration moyenne  $c_{moy}$  des molécules d'huile dans l'eau. Justifier cette hypothèse et en déduire la valeur de  $X$ .
6. Afin de déterminer la constante  $Y$ , il est maintenant nécessaire de comprendre comment la concentration  $c(r)$  se comporte lorsque  $r$  est très proche de  $R$ . Si on ne tenait pas compte de la tension superficielle de l'huile dans l'eau, alors la concentration  $c(R)$  serait égale à une valeur constante  $c_\infty$  indépendante du rayon de la goutte. Or, on va prendre en compte la capillarité dans tout ce qui suit et, dans ce cas, on admet que la concentration  $c(R)$  des molécules d'huile au bord de la goutte est donnée par

$$c(R) = c_\infty \left( 1 + \frac{\ell_c}{R} \right) \quad (22)$$

où  $\ell_c = 2\gamma_{he}/(R_g T c_\infty)$  est une longueur caractéristique du problème qui dépend de la tension superficielle  $\gamma_{he}$  entre l'huile et l'eau, de la température  $T$  du milieu et de la constante des gaz parfaits  $R_g$ . Quelle peut être l'origine de cette relation ? Comment varie  $c(R)$  en fonction de  $R$  ? En déduire que les petites gouttes ont plutôt tendance à se vider au profit des grosses gouttes.

7. Vérifier que  $\ell_c$  est bien homogène à une longueur et en donner une interprétation physique.
8. En déduire l'expression de  $c(r)$  en fonction de  $\ell_c$ ,  $c_\infty$ ,  $c_{moy}$  et  $R$ .

## b. Evolution du rayon des gouttes

La détermination de  $c(r)$  va permettre de déterminer l'expression de  $R(t)$ . En effet, les variations du volume de la goutte sont supposées être uniquement liées au phénomène de diffusion des molécules d'huile dans l'eau.

1. Montrer que cette hypothèse permet d'écrire que le rayon  $R(t)$  de la goutte satisfait l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = 4\pi R^2 D \frac{dc}{dr}(R) V_{mol} \quad (23)$$

où  $V_{mol}$  est le volume molaire de l'huile et  $\frac{dc}{dr}(R)$  est la dérivée de la concentration des molécules d'huile dans l'eau évaluée au point  $r = R$ . On rappelle que  $D$  est le coefficient de diffusion de l'huile dans l'eau.

2. En utilisant l'expression de  $c(r)$  obtenue dans la question (2.3.a.8.) ci-dessus, déduire que  $R(t)$  est solution de

$$\frac{dR}{dt} = v_1 + v_2 \quad , \quad v_1 = \frac{DV_{mol}}{R} \Delta \quad , \quad v_2 = -\frac{DV_{mol}}{R} c_\infty \frac{\ell_c}{R} \quad (24)$$

où  $\Delta$ , appelé supersaturation de la solution, est une grandeur que l'on déterminera en fonction de  $c_{moy}$  et de  $c_\infty$ .

3. Ainsi, on peut écrire la variation  $dR/dt = v_1 + v_2$  du rayon de la goutte comme la somme des deux termes  $v_1$  et  $v_2$ . Donner une interprétation physique à chacun de ces termes.

4. En général,  $\Delta$  dépend du temps, ce qui rend l'intégration de l'équation précédente difficile. Par souci de simplicité, on supposera malgré tout que  $\Delta$  est constant, ce que nous avons implicitement supposé jusqu'ici. Montrer que  $\Delta > 0$  est une condition nécessaire pour que la goutte croisse. Interpréter cette condition. En supposant  $\Delta > 0$ , montrer qu'il existe un rayon critique  $R_c$  de la goutte au delà duquel le rayon de la goutte croît, sinon il décroît. Déterminer  $R_c$ .
5. On suppose à partir de maintenant que  $\Delta > 0$ . Afin de résoudre cette équation (24), on suppose tout d'abord que le rayon de la goutte n'est qu'au début de sa croissance et que son rayon est donné par  $R = R_c + \epsilon(t)$  où  $\epsilon(t)$  reste très petit devant  $R_c$ . Déterminer  $\epsilon(t)$  sachant que  $\epsilon(0) = \epsilon_0$  et montrer que, lorsque le temps  $t$  reste « petit »,  $\epsilon(t)$  varie de façon linéaire avec le temps selon la loi

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) \quad (25)$$

où on déterminera  $\tau$ . Préciser alors ce que signifie « le temps  $t$  reste petit ».

6. Montrer que, pour les temps très « grands » lorsque la goutte croît, le rayon se comporte de la façon suivante :

$$R(t) \simeq \sqrt{2\Delta DV_{mol}t}. \quad (26)$$

Préciser ce que signifie « temps très grands » dans cette question. La croissance du rayon est-elle alors dominée par les effets de diffusion ou bien par les effets de tension superficielle ? Discuter.

7. En utilisant une approche plus réaliste dans laquelle on considère un ensemble de gouttes d'huile et non pas une seule, on montre que le rayon moyen des gouttes d'huile se comporte à des « temps longs » selon la loi

$$R(t) = \left( \frac{4D\ell_c t}{9} \right)^{1/3}. \quad (27)$$

Expliquer par des arguments physiques pourquoi  $R(t)$  croît moins vite dans ce modèle (27) que dans le modèle étudié dans la question précédente (26).

8. On considère alors une émulsion formée à l'instant initial d'un ensemble de gouttes d'huile dans l'eau. Quel devrait être l'état final du système ? On note  $V_0$  le volume d'huile introduit initialement dans l'eau, estimer le temps  $t_{eq}$  nécessaire pour que le système arrive à son état d'équilibre en utilisant la formule (27) ? Commenter la formule obtenue pour  $t_{eq}$ .

## 2.4 Formation de gouttes par l'instabilité de Plateau-Rayleigh

Les parties précédentes ont permis d'illustrer que la forme et la dynamique des gouttes sont en grande partie le résultat de la tension superficielle, qui a pour effet de minimiser les interfaces. La tension superficielle est également en partie responsable de la fragmentation d'un jet d'eau en gouttelettes, dans certaines conditions. Cette fragmentation est le résultat d'une instabilité hydrodynamique, dite de Plateau-Rayleigh que nous allons étudier dans cette partie.

### a. Forme du jet à l'équilibre

Nous allons commencer par étudier la forme d'un jet d'eau qui chute dans l'air sous l'effet du champ de pesanteur. La forme du jet est illustrée dans le schéma (9). On munit l'espace d'un système de coordonnées cylindriques si bien que toute particule fluide du jet est repérée par la donnée de  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ . On notera  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  la base de vecteurs associée. L'axe  $(Oz)$  (vertical descendant) est confondu avec l'axe de symétrie du jet et son origine  $O$  se trouve à la sortie du robinet. Le fluide est supposé incompressible : sa masse volumique  $\rho$  est supposée constante et uniforme. On négligera dans toute cette partie la viscosité de l'eau. La tension superficielle de l'eau dans l'air sera notée  $\gamma$  et le champ de pesanteur  $\vec{g} = g\vec{e}_z$ .

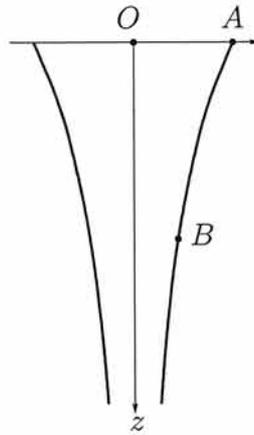


FIG. 9 – Profil d'un jet d'eau à la sortie d'un robinet. Le rayon  $R(z)$  du jet d'eau varie avec l'altitude  $z$ .

Le rayon du jet d'eau est noté  $R(z)$ . A l'altitude  $z = 0$ , il est fixé par le rayon  $a$  de l'orifice du robinet,  $R(0) = a$ . La vitesse du fluide  $\vec{V}$  possède a priori deux composantes, une selon  $\vec{e}_r$  et l'autre selon  $\vec{e}_z$ . Par souci de simplification, on négligera dans cette partie la composante selon  $\vec{e}_r$  de la vitesse. Ainsi, on supposera que les particules fluides ont une vitesse  $\vec{V} = V(z)\vec{e}_z$  qui ne dépend que de  $z$  et donc indépendante du rayon  $r$ . A la sortie du robinet, les particules fluides ont pour vitesse  $\vec{V}_0 = V_0\vec{e}_z$ . La pression extérieure  $P_0$  est supposée constante et uniforme.

1. Enoncer le théorème de Bernoulli en précisant clairement ses hypothèses.
2. Appliquer le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant allant du point  $A$  au point  $B$  de coordonnée  $z$  suivant l'axe  $(Oz)$  au bord du jet d'eau (figure 9).
3. A quelle condition sur la forme du jet, la courbure de l'interface entre l'eau et l'air en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de l'axe  $(Oz)$  est-elle approximativement donnée par  $\mathcal{C} = 1/r$ ? On supposera cette condition satisfaite.

En déduire, en utilisant la loi de Laplace générale (14), les expressions de la pression  $P_A$  au point  $A$  et de la pression  $P_B$  au point  $B$  en fonction de la pression extérieure  $P_0$  et des données du problème.

4. Montrer alors que  $V(z)$  est donnée par l'expression

$$V(z) = V_0 \left( 1 + \frac{2z}{Fa} + \frac{2}{W} \left( 1 - \frac{a}{R(z)} \right) \right)^{1/2} \quad (28)$$

où  $F$  et  $W$  sont des nombres sans dimension que l'on déterminera en fonction de  $V_0$ ,  $g$ ,  $a$ ,  $\rho$  et  $\gamma$ . Ils sont respectivement appelés nombre de Froude et nombre de Weber.

Que représentent physiquement ces deux nombres ?

5. Exprimer la conservation du débit et en déduire une nouvelle relation entre  $R(z)$  et  $V(z)$ .
6. Déduire des deux dernières relations, l'équation algébrique suivante que doit satisfaire le rayon  $R(z)$  du jet d'eau :

$$R(z) = a \left( 1 + \frac{2z}{F a} + \frac{2}{W} \left( 1 - \frac{a}{R(z)} \right) \right)^{-1/4} \quad (29)$$

7. Afin de donner une solution explicite pour  $R(z)$ , on suppose que le nombre de Weber  $W$  est infiniment grand. Interpréter physiquement cette condition. En déduire les expressions de  $R(z)$  et de  $V(z)$ .
8. Ces solutions semblent-elles physiquement acceptables ?

## b. Perturbation du jet d'eau

Maintenant, nous allons étudier dans quelles conditions le jet d'eau peut être le siège d'une instabilité de Plateau-Rayleigh. Pour cela on suppose, par souci de simplicité, que le jet d'eau est parfaitement cylindrique avant que l'instabilité ne s'installe. Ceci revient à supposer que les nombres de Froude et de Weber sont très grands devant un. Par conséquent, avant l'apparition de l'instabilité, le jet d'eau a une vitesse constante  $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_z$  et un rayon  $a$ .

1. Expliquer physiquement pourquoi un jet d'eau a tendance sous certaines conditions à se fragmenter.

On suppose que le jet d'eau cylindrique de rayon  $a$  est le siège d'une instabilité et se scinde en gouttes identiques de rayon  $b$  qui sont supposées contigües. Quelle est la condition sur  $a$  et  $b$  pour que le jet d'eau puisse se scinder ainsi en gouttes ?

2. Nous allons maintenant procéder à une étude plus poussée de l'instabilité. Afin de simplifier cette étude, on va faire les hypothèses suivantes : la pression extérieure est nulle,  $P_0 = 0$  et on négligera tous les phénomènes de pesanteur. En déduire l'expression de la pression  $P_e$  dans le jet d'eau cylindrique en fonction de  $\gamma$  et de  $a$ .
3. On suppose que dès lors que le jet d'eau est perturbé, son rayon  $R(z, t)$  se met à fluctuer. Par conséquent, la pression  $P(r, z; t)$  et la vitesse  $\vec{V}(r, z; t)$  du fluide ne sont plus ni uniformes ni constantes. En revanche, on suppose que la masse volumique  $\rho$  reste constante et uniforme. On montre que  $P$  et  $\vec{V}$  satisfont les équations :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P, \quad \text{div} \vec{V} = 0 \quad (30)$$

où  $\text{div}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}$  sont respectivement les opérateurs divergence et gradient. Interpréter ces deux équations.

4. On suppose maintenant que le rayon du jet s'écrit sous la forme

$$R(z, t) = a + \epsilon(z; t) \quad (31)$$

où  $\epsilon$  est a priori faible devant  $a$ . On écrit alors la pression  $P$  et la vitesse  $\vec{V}$  sous la forme

$$P(r, z; t) = P_e + p(r, z; t), \quad \vec{V}(r, z; t) = \vec{V}_0 + v_r(r, z; t)\vec{e}_r + v_z(r, z; t)\vec{e}_z. \quad (32)$$

En supposant que  $p$ ,  $v_r$  et  $v_z$  sont des infiniments petits d'ordre un, linéariser les équations (30) et établir trois équations aux dérivées partielles liant  $v_r$ ,  $v_z$  et  $p$ .

5. Afin de simplifier les calculs, on travaille en notation complexe et on suppose que la perturbation  $\epsilon(z; t)$  est de la forme

$$\epsilon(z; t) = \epsilon_0 e^{\omega t + ikz} \quad (33)$$

où  $\omega$  et  $k$  sont des constantes dont on donnera une interprétation physique.

Justifier le fait de pouvoir travailler en notation complexe.

6. On cherche alors une solution pour la vitesse et la pression sous la forme

$$v_r(r, z; t) = F(r) e^{\omega t + ikz}, \quad v_z(r, z; t) = G(r) e^{\omega t + ikz} \quad \text{et} \quad p(r, z; t) = H(r) e^{\omega t + ikz}. \quad (34)$$

Montrer que, si on pose  $V_0 = 0$  pour simplifier, les fonctions  $F(r)$ ,  $G(r)$  et  $H(r)$  satisfont les équations

$$\omega F = -\frac{1}{\rho} \frac{dH}{dr}, \quad \omega G = -\frac{ik}{\rho} H \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dr} + \frac{F}{r} + ikG = 0. \quad (35)$$

La condition  $V_0 = 0$  revient à négliger la vitesse du fluide au repos, ce qui est possible car on néglige les effets dus à la gravitation.

7. Déduire ensuite que  $F(r)$  satisfait l'équation

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - (1 + k^2 r^2) F = 0. \quad (36)$$

Il s'agit d'une équation de Bessel du premier ordre.

### c. Apparition de l'instabilité

Les solutions de cette équation ne sont pas exprimables en terme de fonctions élémentaires mais elles sont tabulées et leurs propriétés sont bien connues. En outre, si on détermine  $F$ , on peut aisément en déduire  $G$  et  $H$  à partir des équations (35). En particulier,  $F$  et  $H$  s'expriment à partir de fonctions de Bessel, que l'on notera  $I_0$  et  $I_1$ , comme suit

$$F(r) = \alpha I_1(kr) \quad \text{et} \quad H(r) = -\frac{\omega \rho \alpha}{k} I_0(kr) \quad (37)$$

où  $\alpha$  est une constante multiplicative. La forme explicite des fonctions de Bessel n'est pas nécessaire pour la suite.

Afin de déterminer d'une part la constante  $\alpha$  et d'autre part la relation de « dispersion » entre  $\omega$  et  $k$ , il faut exploiter les conditions aux limites à la frontière du jet d'eau.

1. La première condition consiste à dire que la vitesse radiale  $v_r(r, z; t)$  à la surface du jet est donnée par les variations temporelles du rayon  $R(z, t)$ . En déduire une expression de  $\alpha$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $\omega$  et  $I_1(ka)$ .

2. La deuxième condition est la relation de discontinuité de pression à la surface du jet. A partir de la formule générale (16) pour la courbure d'une surface, calculer la courbure du jet et montrer que  $p(r, z; t)$  est donnée à la surface du jet par

$$p(R, z; t) = -\epsilon_0 \frac{\gamma}{a^2} (1 - k^2 a^2) e^{\omega t + i k z}. \quad (38)$$

3. Dédurre des résultats des deux questions précédentes une relation entre  $\omega$  et  $k$  sous la forme

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho a^2} k \frac{I_1(ka)}{I_0(ka)} (1 - k^2 a^2). \quad (39)$$

4. Quelle est la condition sur  $k$  pour que l'instabilité de Plateau-Rayleigh se produise? Interpréter physiquement cette condition.
5. La grandeur  $\omega$  est une fonction de  $k$ . Mais on montre que  $\omega$  admet un maximum lorsque  $ka = 0,697$ . En déduire une estimation du temps  $t_{PR}$  que met le jet à se fragmenter en fonction de  $\rho$ ,  $a$  et  $\gamma$  sachant que

$$I_1(0,697)/I_0(0,697) \simeq 0,306.$$

6. Estimer le temps de fragmentation pour un jet d'eau de diamètre 1 cm. Ce temps semble-t-il cohérent?

### 3 Mesures optiques des caractéristiques d'une goutte

Lorsque l'on pose une goutte « lourde » sur un support, elle s'aplatit sous l'effet de la gravité et adopte la forme illustrée dans la figure (10). Elle est caractérisée en particulier par sa hauteur  $e$ , son angle de contact  $\theta$  et sa longueur capillaire  $\kappa^{-1}$ . Ces deux dernières notions ont été introduites dans la partie précédente.

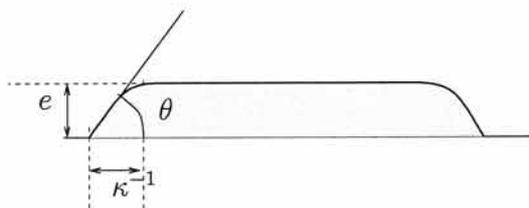


FIG. 10 – Profil d'une goutte lourde qui mouille partiellement un substrat solide. La longueur capillaire  $\kappa^{-1}$  donne l'ordre de grandeur de la distance radiale sur laquelle l'épaisseur de la goutte varie avant d'atteindre la valeur constante  $e$ .

Il est possible de mesurer ces différentes grandeurs par des méthodes interférométriques et ainsi d'accéder à la tension superficielle de la goutte dans l'air et aussi au volume de la goutte par exemple. Cette partie a pour objet de préciser comment le phénomène des interférences lumineuses permet effectivement d'accéder aux caractéristiques de la goutte.

#### 3.1 Principe des interférences lumineuses

Cette partie a pour but de rappeler dans un premier temps le principe et les conditions d'obtention des interférences lumineuses. Dans un deuxième temps, on étudie l'interféromètre de Michelson.

##### a. Conditions d'obtention des interférences

Deux sources lumineuses ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  émettent deux ondes électromagnétiques monochromatiques de pulsations respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Ces deux ondes se propagent dans le vide à la vitesse  $c$  et se rencontrent en un point  $P$  de l'espace après avoir parcouru les distances  $x_1 = S_1P$  et  $x_2 = S_2P$ . On modélise les amplitudes au point  $P$  des ondes émises par les sources  $S_1$  et  $S_2$  par les grandeurs scalaires :

$$s_1(P, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \phi_1) \quad \text{et} \quad s_2(P, t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \phi_2). \quad (40)$$

1. Interpréter les termes  $a_n$ ,  $k_n$  et  $\phi_n$  dans l'expression des fonctions scalaires ( $n$  prend les valeurs 1 et 2). On suppose que les coefficients  $a_n$  sont positifs.
2. Quel est le lien entre les fonctions scalaires (40) et le champ électromagnétique ?
3. L'intensité lumineuse  $I_1(P, t)$  (respectivement  $I_2(P, t)$ ) reçue au point  $P$  de la part de la source  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) est proportionnelle au carré de l'amplitude :  $I_1(P, t) = K s_1(P, t)^2$  (respectivement  $I_2(P, t) = K s_2(P, t)^2$ ). Pourquoi l'intensité lumineuse est-elle reliée au carré de l'amplitude ? On posera  $K = 2$  dans la suite.

4. Donner l'ordre de grandeur de la période d'une onde électromagnétique dans le domaine du visible. La comparer avec le temps de réponse  $\tau$  de l'œil et conclure que l'œil n'est en fait pas sensible à l'intensité lumineuse  $I(P, t)$  au point  $P$  mais seulement à sa valeur moyenne  $\langle I(P) \rangle$  temporelle définie par :

$$\langle I(P) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} I(P, t) dt. \quad (41)$$

5. On pose  $\phi_2 = \phi_1 + \phi_{12}$  où  $\phi_{12}$  est une constante. Calculer  $\langle I(P) \rangle$  et montrer qu'elle s'écrit sous la forme

$$\langle I(P) \rangle = I_1 + I_2 + I_{12}(P) \quad (42)$$

où  $I_{12}$  est non nul seulement si  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . On exprimera également  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de  $a_1$  et  $a_2$ .

Dans le cas où il est non nul, déterminer alors  $I_{12}$  en fonction de  $\omega$ , de  $c$ , de  $\phi_{12}$  et de la différence de marche  $\delta = x_2 - x_1$ . La grandeur  $I_{12}(P)$  est le terme d'interférence qui ne dépend du point  $P$  qu'à travers la différence de marche  $\delta$ . Pour cette raison, on utilisera la notation  $\langle I(\delta) \rangle$  et  $I_{12}(\delta)$  à partir de maintenant.

6. Tracer  $\langle I(\delta) \rangle$  en fonction de  $\delta$  en supposant la pulsation  $\omega$  fixée.  
7. Déterminer, en fonction de  $a_1$  et  $a_2$ , l'expression du contraste

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (43)$$

où  $I_{max}$  et  $I_{min}$  sont les valeurs maximale et minimale de la grandeur  $\langle I(\delta) \rangle$ .

Quelle condition doivent satisfaire  $a_1$  et  $a_2$  pour que le contraste soit le plus grand possible ?

8. A quelle condition sur les sources  $S_1$  et  $S_2$  peut-on supposer que la différence  $\phi_1 - \phi_2 = \phi_{12}$  est en effet constante ? Comment fait-on en pratique pour réaliser cette condition ? On distinguera en particulier les dispositifs à division d'amplitude de ceux à division du front d'onde.

## b. L'interféromètre de Michelson

Michelson et Morley ont mis en place à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle un dispositif interférométrique qui porte aujourd'hui le nom d'interféromètre de Morley-Michelson (ou de Michelson). Ce dispositif, qui est au cœur de l'une des expériences les plus fameuses de l'histoire de la physique, a valu à Michelson le prix Nobel en 1907.

Ils avaient construit ce dispositif afin de mesurer la vitesse de la Terre par rapport à "l'éther", milieu hypothétique support des ondes électromagnétiques. Cette partie a pour but de rappeler le fonctionnement de cet interféromètre et de comprendre comment Michelson et Morley pensaient l'utiliser afin d'effectuer cette mesure. Le dispositif de Morley et Michelson est schématiquement représenté sur la figure (11).

On suppose, pour simplifier, que la source  $S$  est ponctuelle et émet une onde progressive monochromatique de pulsation  $\omega$  dans une seule direction comme indiqué sur la figure (11). La lame séparatrice est inclinée de  $\pi/4$  par rapport à la direction de l'onde émise en  $S$  et les

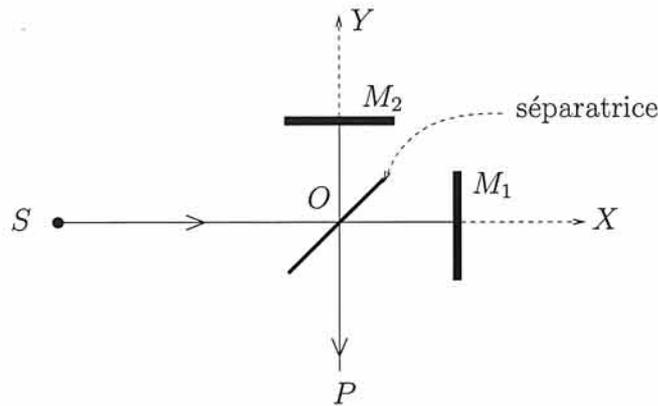


FIG. 11 – Dispositif interférométrique de Michelson. Une source en  $S$  émet une onde électromagnétique supposée plane, progressive et monochromatique. Cette onde est séparée en deux au point  $O$  par une séparatrice qui est une lame semi-réfléchissante : la moitié de l'intensité lumineuse incidente en  $O$  est réfléchie, l'autre moitié est transmise. Les deux parties (réfléchie et transmise) de l'onde sont réfléchies par des miroirs plan  $M_1$  et  $M_2$  et repassent par le point  $O$ . En ce point  $O$ , chacune des deux ondes est à nouveau séparée en deux parties : une onde réfléchie et une onde transmise à travers la séparatrice. On associe à ce dispositif un système de coordonnées cartésiennes  $(OXY)$ , comme indiqué sur le schéma, dont les vecteurs de base sont notés  $\vec{e}_X$  et  $\vec{e}_Y$ .

miroirs sont perpendiculaires à la direction des rayons qui s'y réfléchissent. On suppose que l'onde se propage dans le vide à la vitesse  $c$ . A la sortie de la source  $S$ , l'onde a pour amplitude  $s(S, t) = a_0 \cos(\omega t)$ . Au point  $P$  à la sortie du dispositif de Michelson, l'onde est la somme de deux contributions  $s(P, t) = s_1(P, t) + s_2(P, t)$  avec

$$s_1(P, t) = a_1 \cos(\omega t - kx_1) \quad \text{et} \quad s_2(P, t) = a_2 \cos(\omega t - kx_2). \quad (44)$$

où  $x_1$  (respectivement  $x_2$ ) est la distance du chemin parcouru par l'onde de  $S$  à  $P$  après avoir été réfléchi par le miroir  $M_1$  (respectivement  $M_2$ ). Les deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont supposés perpendiculaires entre eux ; ils se trouvent à une distance  $e_1$  et  $e_2$  du point  $O$ . L'indice de l'air sera pris égal à 1 et pour simplifier on supposera que  $e_2 > e_1$ .

1. Pour simplifier, on suppose que  $a_1 = a_2 = a_0/2$ . Exprimer alors  $x_1$  et  $x_2$  en fonction des distances  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $OS$  et  $OP$ .
2. En déduire l'intensité moyenne  $\langle I(P) \rangle$  au point  $P$  en fonction de  $I_0 = a_0^2$ ,  $\omega$ ,  $c$  et de la différence de marche  $\delta$ . Déterminer le contraste  $C$  des interférences.
3. Dans l'interféromètre mis en œuvre par Michelson et Morley, les sources  $S$  n'étaient ni ponctuelles ni unidirectionnelles et émettaient dans toutes les directions de façon plus ou moins isotrope.
  - a. Si on utilise une telle source, où sont localisées les interférences lorsque les miroirs sont perpendiculaires entre eux ?
  - b. Pour observer les interférences, on place une lentille convergente de focale  $f'$ , d'axe optique  $(OY)$  à la sortie de l'interféromètre (dans la zone  $Y < 0$ ) puis on dispose, pour l'observation, un écran dans le plan focal image de la lentille. Pourquoi ?

- c. On considère un rayon provenant de  $S$  incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe ( $OX$ ). Montrer que dans ce cas la différence de marche entre les deux rayons réfléchis par  $M_1$  et  $M_2$  se propageant du point  $S$  jusqu'à un point  $P$  du plan focal image de la lentille convergente de focale  $f'$  est donné par

$$\delta = 2(e_2 - e_1) \cos \alpha. \quad (45)$$

Il sera judicieux de faire un schéma explicatif sur lequel on fera apparaître par exemple l'image du miroir  $M_1$  par le plan de la séparatrice.

- d. Justifier que l'on observe sur l'écran disposé dans le plan focal des anneaux concentriques. Pourquoi dit-on que ces anneaux sont d'égale inclinaison ?
- e. On veut maintenant déterminer les rayons des anneaux d'intensité maximale dans le plan focal image de la lentille.
- i. Montrer que pour avoir une intensité maximale dans la direction  $\alpha_0 = 0$ , il est nécessaire d'imposer que la grandeur  $m_0 = 2(e_2 - e_1)/\lambda$  soit un entier. On supposera cette condition satisfaite et on suppose de plus que  $m_0$  est un entier très grand devant 1. Comment s'assurer expérimentalement que la dernière condition est satisfaite ?
  - ii. Justifier que le premier anneau brillant est obtenu pour la direction  $\alpha_1$  des rayons incidents telle que

$$2(e_2 - e_1) \cos(\alpha_1) = m_1 \lambda \quad \text{avec} \quad m_1 = m_0 - 1. \quad (46)$$

- iii. Donner l'angle  $\alpha_n$  qui correspond au  $n^{\text{ème}}$  anneau brillant (d'intensité maximale). Pour cela, on exprimera  $\cos(\alpha_n)$  en fonction de  $e_2$ ,  $e_1$ ,  $\lambda$ ,  $m_0$  et  $n$ .
- iv. Etablir le lien entre les angles  $\alpha_n$  et les rayons  $r_n$  des anneaux brillants.
- v. En déduire que si l'angle  $\alpha_n$  est petit, alors le rayon  $r_n$  est donné approximativement par la formule

$$r_n \simeq f' \sqrt{n \frac{\lambda}{e_2 - e_1}}. \quad (47)$$

4. A l'époque de Michelson, on ne disposait pas de sources monochromatiques comme le LASER. On pouvait utiliser à la place des sources spectrales qui émettent un spectre de raies. La source à vapeur de sodium par exemple émet un doublet jaune de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  très voisines dans le sens où  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 > 0$  est une grandeur très petite devant  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Ces deux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont supposées être émises avec la même intensité de telle sorte qu'à la sortie de la source l'onde a pour amplitude  $s(S, t) = a_0 \cos(\omega_1 t) + a_0 \cos(\omega_2 t)$ .

- a. Déterminer dans ce cas l'intensité lumineuse moyenne observée au point  $P$ .
- b. Montrer que cette intensité moyenne se met approximativement sous la forme

$$\langle I(\delta) \rangle \simeq I_0 \left( 1 + \cos\left(\frac{\Delta\omega \delta}{2c}\right) \cos\left(\frac{\bar{\omega} \delta}{c}\right) \right) \quad (48)$$

où  $\delta$  est la différence de marche,  $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  et  $I_0$  est une grandeur que l'on déterminera en fonction de  $a_0$ .

- c. Tracer schématiquement  $\langle I(\delta) \rangle$  en fonction de  $\delta$ . Déterminer le contraste local  $C$  et montrer qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$C = \left| \cos\left(\frac{\Delta\omega\delta}{2c}\right) \right|. \quad (49)$$

5. Malgré tout, on suppose par souci de simplification que la source  $S$  utilisée par Michelson et Morley était monochromatique (de pulsation  $\omega$ ). Le dispositif interférométrique est immobile à la surface de la Terre et donc se déplace avec une vitesse non nulle dans le référentiel héliocentrique. Si la durée de l'expérience est très petite par rapport à la période de rotation de la Terre sur elle-même, alors le mouvement de l'interferomètre peut être supposé rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel héliocentrique. On se référera au schéma simplifié de la figure (11), et on oriente le dispositif de telle sorte que  $\vec{v}$  soit dans la direction et dans le sens  $\overrightarrow{SO}$ .

- a. Définir le référentiel héliocentrique.
- b. En supposant que la Terre a une trajectoire parfaitement circulaire dans le référentiel héliocentrique et que la lumière met 8 minutes pour aller du Soleil à la Terre, estimer la norme  $v$  de la vitesse  $\vec{v}$ .
- c. A l'époque de Michelson et Morley, on pensait que la vitesse de la lumière n'était pas absolue et dépendait du choix du référentiel. Dans le référentiel héliocentrique, la lumière était supposée se déplacer à une vitesse de norme  $c$  quelle que fut sa direction et son sens. En revanche, dans le référentiel terrestre, sa vitesse était modifiée selon la loi d'addition des vitesses de la mécanique classique. Quel est le statut de la vitesse de la lumière aujourd'hui : est-ce une constante ou dépend-elle du référentiel ?
- d. On se place alors dans le référentiel héliocentrique et on cherche à déterminer la durée  $\tau_1$  ou  $\tau_2$  mise par la lumière pour aller du point  $O$  au miroir  $M_1$  ou  $M_2$  et revenir au point  $O$  après réflexion. On supposera pour cela que la lumière est composée de corpuscules élémentaires qui se déplacent, dans le référentiel héliocentrique, à la vitesse de la lumière  $c$  dans le vide. On suppose pour simplifier que  $e_1 = e_2 = e$ . On note  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide de l'onde associée.
  - i. Quel nom portent les corpuscules de lumière ?
  - ii. Etablir soigneusement, dans le cadre de la mécanique newtonienne, l'expression suivante de la durée  $\tau_1$  :

$$\tau_1 = e \left( \frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = \frac{2ec}{c^2 - v^2}. \quad (50)$$

- iii. Etablir de même l'expression suivante de la durée  $\tau_2$  :

$$\tau_2 = \frac{2e}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (51)$$

- iv. En déduire, dans ce modèle et en supposant  $v \ll c$ , que la différence de phase  $\Phi$  en  $P$  entre l'onde utilisant une réflexion sur le miroir  $M_1$  et celle utilisant une réflexion sur le miroir  $M_2$  est égale à

$$\Phi = \frac{2\pi v^2}{\lambda c^2} e. \quad (52)$$

- e. On tourne l'interféromètre de Michelson autour d'un axe perpendiculaire au plan formé par les deux bras. On échange ainsi le rôle des deux bras relativement à la direction définie par le vecteur vitesse  $\vec{v}$ . Montrer que, dans le cadre de ce modèle, on s'attend, au cours de cette rotation, à observer un déplacement de la figure d'interférence de  $\frac{2e}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$  fraction de frange d'interférence. Un repliement astucieux des rayons permettait d'obtenir une longueur  $e$  de bras environ égale à 11 m, évaluer alors, pour  $\lambda = 550$  nm, le déplacement prévu en terme de fraction de frange d'interférence.
- f. Lors de cette expérience, Michelson et Morley n'ont observé aucun déplacement de frange. Quelle hypothèse, formulée par Einstein dans la théorie de la relativité restreinte, permet d'interpréter ce résultat expérimental ? En quelle année Einstein a-t-il énoncé les principes de la théorie de la relativité restreinte ?
6. On règle l'interféromètre de Michelson, éclairé par une source étendue, de telle sorte que les distances  $e_1$  et  $e_2$  du point  $O$  aux miroirs sont égales. Ensuite on incline le miroir  $M_2$  d'un angle très petit alors que l'orientation du miroir  $M_1$  reste inchangée. On observe également des interférences dans cette configuration que l'on qualifie de configuration en coin d'air. Où sont localisées les interférences ? Comment peut-on les observer en pratique ?

### 3.2 Détermination optique des caractéristiques de la goutte

Cette partie a pour but de montrer que les interférences telles que nous les avons vues dans la partie précédente permettent d'accéder à l'angle de contact  $\theta$ , à la longueur capillaire  $\kappa^{-1}$  et à l'épaisseur  $e$  de la goutte (figure 10). La goutte d'eau est posée sur un substrat réfléchissant (au moins partiellement).

On éclaire une petite zone de la surface de la goutte d'eau par un faisceau de lumière étroit qui provient d'une source  $S$  monochromatique dont on notera  $\omega$  la pulsation. On suppose tout d'abord que le faisceau éclaire la partie « plane » (non courbée) de la surface de la goutte. Une partie du rayon issu de la source est réfléchi par la surface de la goutte alors que l'autre partie est réfractée à la surface de la goutte, se réfléchit sur le support et est finalement réfractée à nouveau à la surface de la goutte, comme indiqué sur la figure (12). On note  $n_e$  l'indice optique de l'eau.

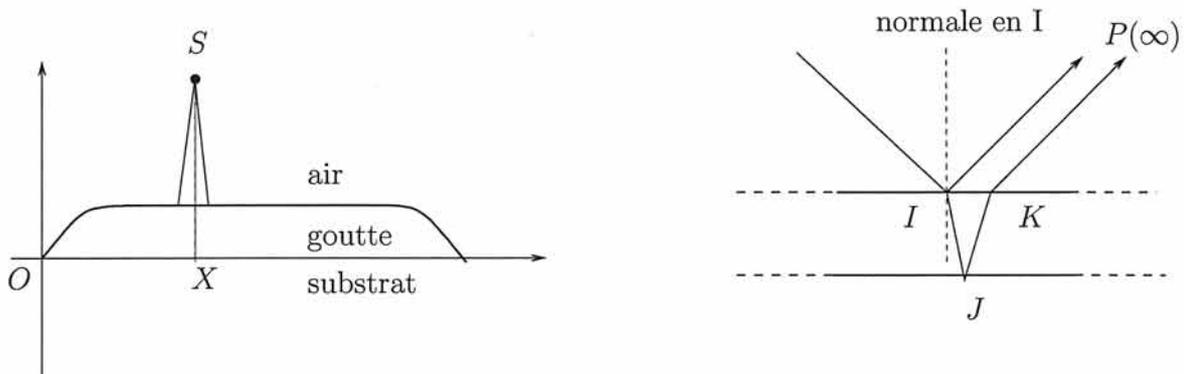


FIG. 12 – On éclaire la goutte par une source  $S$  qui émet un faisceau étroit de rayons. À gauche est représenté le schéma d'ensemble alors qu'à droite est précisé ce qui se passe lorsque le faisceau de rayon atteint la surface de la goutte.

1. On considère un rayon du faisceau issu de  $S$  qui forme un angle  $\alpha$  avec la normale à la surface de la goutte en  $I$ . Reproduire le schéma à droite de la figure (12) et représenter les angles d'incidence  $\alpha$  et de réfraction  $\alpha'$  au point  $I$ . Ecrire la relation de Descartes relative à la réfraction qui relie  $\alpha$  et  $\alpha'$ .
2. Sachant que le rayon réfracté subit une réflexion totale au point  $J$ , déterminer la différence de marche  $\delta$  en un point  $P$  situé à « l'infini » entre le rayon réfracté en  $I$ , réfléchi en  $J$  puis réfracté en  $K$  et le rayon réfléchi en  $I$ . On montrera que

$$\delta = 2en_e \cos \alpha' . \quad (53)$$

Cette expression est-elle en accord avec celle (45) obtenue dans la partie précédente ?

3. En établissant une analogie avec l'interféromètre de Michelson, montrer que la figure d'interférence observée en un point  $P$  à l'infini consiste en des anneaux concentriques d'égale inclinaison. Proposer un protocole pour observer cette figure d'interférence avec une lentille convergente de focale  $f'$  en particulier.
4. On constate que, tant que  $X$  est plus grand qu'une certaine valeur  $X_c$ , la figure d'interférence à l'infini ne dépend pas de  $X$ . Par contre, lorsque  $X$  devient plus petit que  $X_c$ , la figure change et le rayon des anneaux commence par augmenter. Le rayon  $r_1(X)$  de l'anneau le plus petit par exemple a pour allure la courbe de la figure (13). Interpréter cette figure.

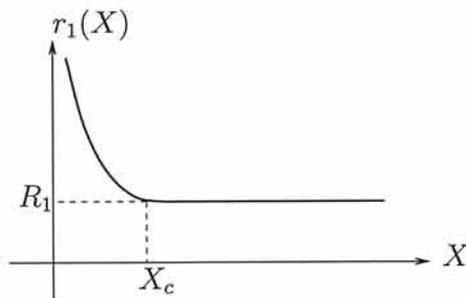


FIG. 13 – Allure du rayon  $r_1(X)$  de l'anneau le plus petit.

5. On suppose, dans un premier temps, que l'expression (47) du rayon des anneaux concentriques reste vraie lorsque l'épaisseur de la goutte varie. Montrer alors que lorsque  $X < X_c$ ,  $r_1(X) = AX^{-1/2}$  où  $A$  est une constante que l'on déterminera en fonction de  $\theta$ ,  $f'$ ,  $n$  et  $\lambda$ .
6. Montrer que mesurer  $A$ ,  $X_c$  et  $R_1$  permet d'accéder à l'épaisseur  $e$  de la goutte, à la longueur capillaire  $\kappa^{-1}$  et à l'angle de contact  $\theta$ . On se référera aux résultats de la partie 2.2. sur le mouillage.
7. Comment pourrait-on mesurer l'angle de contact  $\theta$  à partir de la figure d'interférence ?