

SESSION 2014

AGRÉGATION CONCOURS EXTERNE

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE MÉCANIQUE**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

SESSION 2014

Sections : Sciences Industrielles de l'Ingénieur – Option Ingénierie
Mécanique

Épreuve de modélisation

Documents remis

Sujet

Document technique

Documents réponses

pages 2 à 34

page 36

pages 38 à 43

Prothèse de genou active 1P360

Contexte de l'étude

L'amputation est une intervention chirurgicale qui consiste en l'ablation d'un membre. Les causes d'une amputation sont multiples :

- les maladies telles que l'insuffisance artérielle des membres, le diabète, le tabac, certaines infections osseuses ou des tissus et certaines tumeurs ;
- les accidents domestiques (brûlures, gelures, ...), de la route ou du travail ;
- ...

La figure 1 présente les zones possibles d'amputation des membres inférieurs et supérieurs.

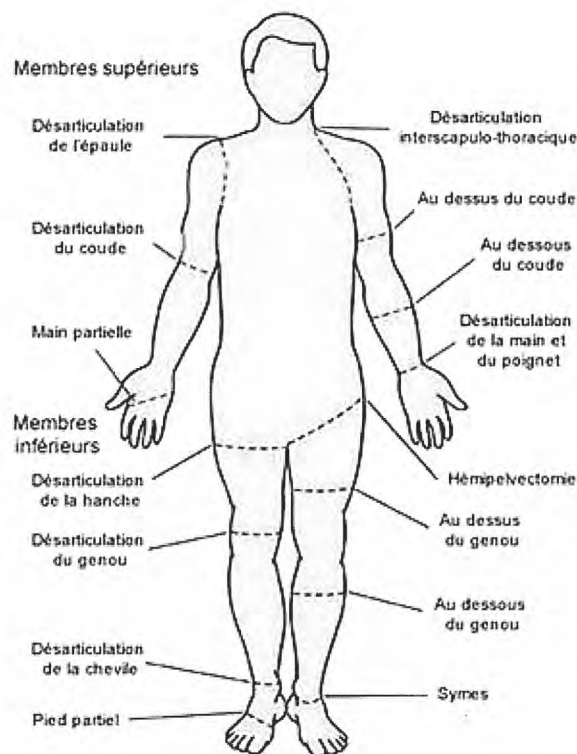


Figure 1. Zones possibles d'amputation du corps humain

En France, sont pratiquées, chaque année, près de 10 000 amputations de membre inférieur. Le nombre total d'amputés (d'un membre supérieur ou inférieur) nécessitant un appareillage spécifique est estimé à 90 000.

La figure 2 propose, d'une part, la définition des différentes amputations réalisables sur un membre inférieur et, d'autre part, la répartition de ce type d'intervention chirurgicale pour les membres inférieurs.

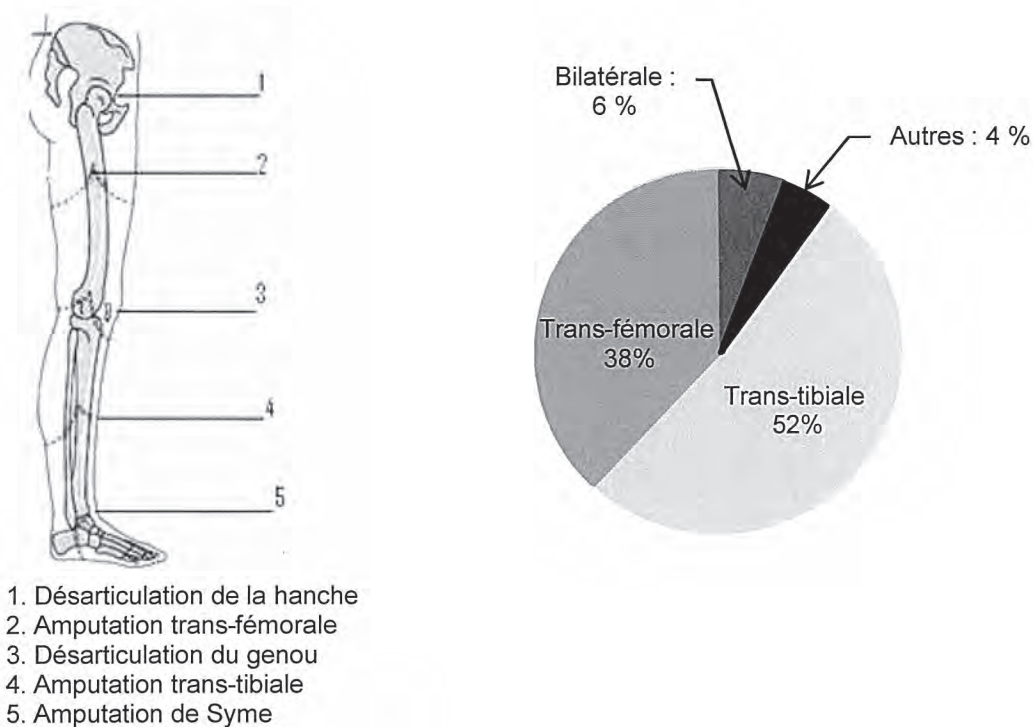


Figure 2. Zones d'amputation des membres inférieurs et termes associés (à gauche) et répartition des amputations des membres inférieurs (à droite)

Le sujet proposé, au travers de l'étude de la prothèse 1P360, s'intéresse à l'amputation trans-fémorale.

Enjeux liés à l'appareillage

Les enjeux associés à la mise en œuvre d'un appareillage, ici une prothèse de genou, sont divers. Le premier, et certainement le plus important, est de permettre à la personne amputée de retrouver une mobilité suffisante pour exercer ses activités quotidiennes, professionnelles voire sportives.

Le genou prothétique doit donc pallier les pertes fonctionnelles occasionnées par l'amputation.

Dans une première approche, l'appareillage (prothèse) a pour objectif principal de permettre à l'amputé d'un membre inférieur de retrouver les fonctionnalités du membre amputé, à savoir :

- retrouver une station debout stable ;
- pouvoir se déplacer sur un sol plat.

La réalisation de ces deux fonctions permet au patient de récupérer certes un niveau d'autonomie satisfaisant mais d'autres fonctions à prendre en compte viennent se rajouter telles que le confort entre l'appareillage et le moignon lié à l'ergonomie, le confort de marche lié aux efforts nécessaires pour se mouvoir, le sentiment de sécurité produit par la prothèse, la possibilité de monter ou descendre des escaliers en pas alternés ou encore l'esthétique.

En dépit des progrès réalisés, le port d'une prothèse, par sa conception, occasionne encore de nombreuses pathologies. En effet, les prothèses induisent des phénomènes de

compensation au niveau des articulations du membre résiduel (fémur amputé) et du membre controlatéral (membre sain restant).

Pour les sujets sains, la réaction du sol est compensée par les muscles du genou. L'amputé, privé de ces muscles, doit compenser avec ses membres résiduel et controlatéral. Ces compensations, qui prennent la forme d'efforts ou de couples, génèrent une détérioration fonctionnelle précoce des articulations de la hanche et du genou du membre controlatéral.

Les nouvelles prothèses doivent donc permettre au sujet amputé de retrouver sa mobilité mais doivent également permettre de retrouver une marche proche de la marche asymptomatique définie comme étant la marche pratiquée par les sujets sains, afin de limiter les phénomènes de compensation.

Études proposées

Les études proposées dans les différentes parties du sujet sont donc structurées autour de la problématique globale identifiée ci-dessus. Elles s'intéressent à la modélisation de la marche asymptomatique identifiée comme l'objectif à atteindre, puis à l'analyse comparative des marches asymptomatique et prothétique des amputés trans-fémoraux ainsi qu'à l'identification des conséquences fonctionnelles d'une amputation. Ensuite, la description du fonctionnement et l'élaboration d'un modèle de la prothèse de genou 1P360 permettent de valider par simulation la pertinence des solutions techniques retenues. Enfin, le dimensionnement d'un des principaux organes de la prothèse, la tige du vérin du module pneumatique, est étudié.

Une dernière partie clôt le sujet à travers l'élaboration d'une synthèse décrivant et justifiant la démarche mise en œuvre pour répondre à la problématique globale.

Tous les développements de calculs seront réalisés sous forme littérale avant d'effectuer l'application numérique le cas échéant. Les résultats seront encadrés sur la copie.

1. Description et modélisation de la marche asymptomatique

Objectif : établir un modèle de connaissance décrivant le comportement dynamique des membres lors de la marche d'un sujet sain, destiné à la conception d'un genou prothétique devant reproduire un comportement similaire.

1.1. Analyse du cycle de marche asymptomatique

Le cycle de marche d'un sujet sain est décrit par la figure 3.

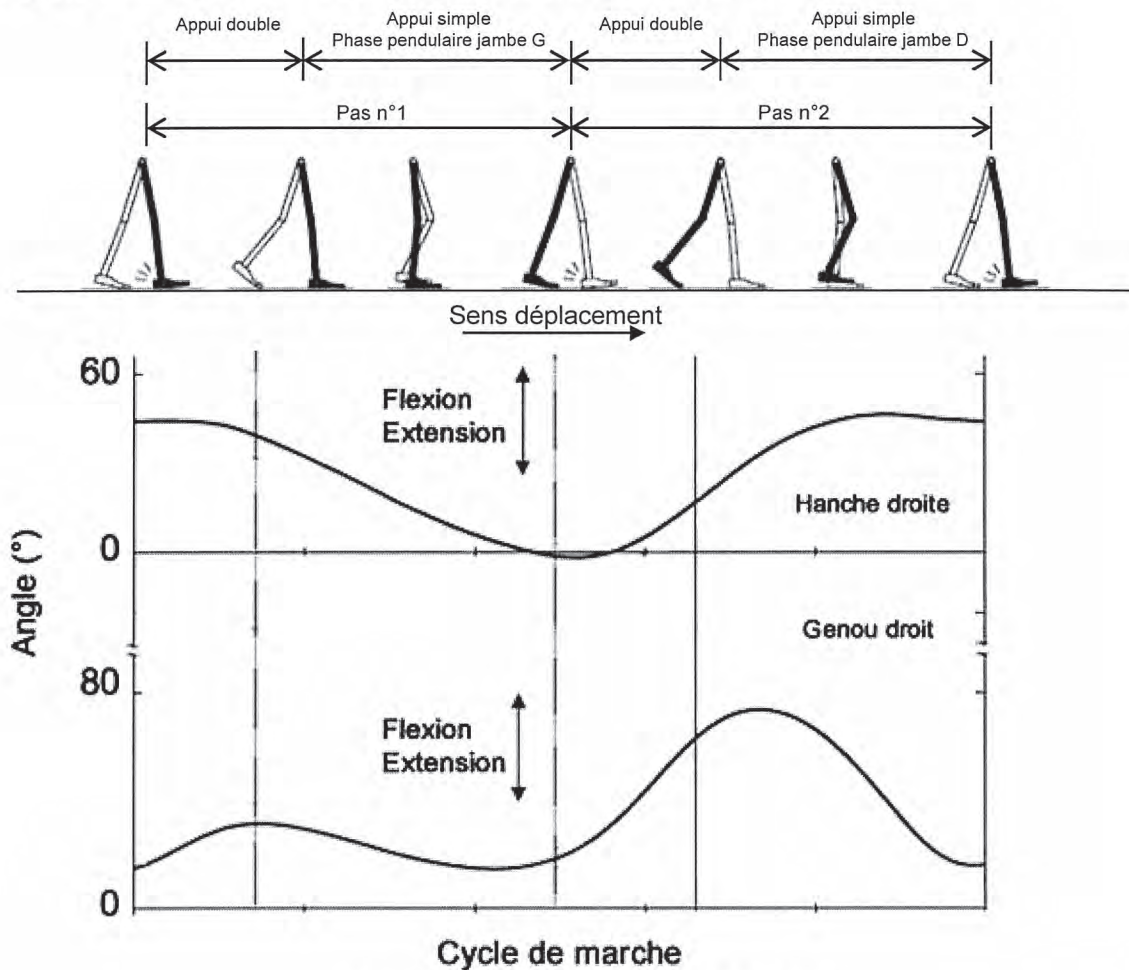


Figure 3. Cycle de marche d'un sujet sain

Le cycle de marche peut être décomposé, en première approximation, comme une succession de phases d'appui (60 %) où les deux pieds sont en contact avec le sol et de phases oscillantes (40%) où un des deux pieds n'est plus en contact avec le sol.

L'évolution de la position angulaire des articulations de la jambe droite lors du cycle de marche peut être décrite, de façon plus précise, à l'aide des quatre phases présentées ci-dessous :

- phase 1, dite phase de mise en charge de la jambe droite. Elle débute lorsque le talon du pied droit entre en contact avec le sol alors que les orteils du pied gauche sont toujours en contact avec le sol. Cela correspond au premier double appui ou appui bipodal. Cette phase est dédiée au transfert du poids entre les deux jambes, à l'absorption des chocs et à la conservation de la vitesse de marche tout en maintenant l'équilibre ;

- **phase 2, dite phase d'appui sur la jambe droite.** Elle débute lors du décollement des orteils du pied gauche. Lors de cette phase, le haut du corps pivote de l'arrière vers l'avant. Deux sous-phases sont différenciées, à savoir
 - *sous-phase 2.1*, pivotement du haut du corps. Elle se termine lorsque le centre de gravité du haut du corps est situé à la verticale de l'avant du pied droit ;
 - *sous-phase 2.2*, poursuite du pivotement du haut du corps jusqu'au contact du talon du pied gauche avec le sol ;
- **phase 3**, cette phase correspond au deuxième double appui. Son rôle est le transfert du poids vers la nouvelle jambe (ici, jambe gauche) en phase d'appui et la propulsion du corps vers l'avant ;
- **phase 4**, phase pendulaire ou oscillante de la jambe droite. Elle débute lors du décollement des orteils du pied droit et doit permettre au membre oscillant de passer devant sans toucher le sol. Cette phase se décompose en trois sous-phases, à savoir
 - *sous-phase 4.1*, cette sous-phase débute lors du décollement des orteils et se poursuit jusqu'au passage du pied oscillant droit à côté du pied gauche en contact avec le sol ;
 - *sous-phase 4.2*, cette sous-phase est la continuité de la précédente et se termine lorsque le tibia de la jambe gauche est vertical ;
 - *sous-phase 4.3*, cette sous-phase correspond à la fin de la phase d'oscillation de la jambe droite. Elle se termine par le contact du talon du pied droit avec le sol.

La marche est donc constituée de mouvements périodiques des membres inférieurs. La figure 4 définit les mouvements de flexion et d'extension associés à la hanche et au genou.

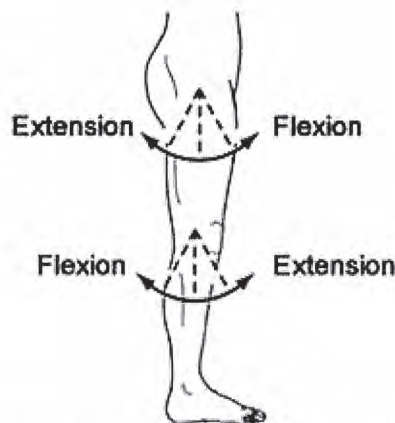


Figure 4. Définition des mouvements de flexion-extension d'une jambe

Pour décrire l'enchaînement des événements nécessaires à la marche, un outil de description du comportement, le diagramme états-transitions, est proposé dans ce sujet. Le diagramme états-transitions permet de décrire le comportement dynamique d'un système de façon complète et non ambiguë. Concrètement, un diagramme d'états-transitions est construit à partir d'un automate à états finis dont le comportement des sorties dépend de l'état des entrées mais aussi des sollicitations passées (effet mémoire).

Ce diagramme états-transitions se construit à partir de quatre éléments de base présentés figure 5 :

État	Ensemble des états dans lequel peut être le système étudié au cours de son fonctionnement.	État
État initial	État qui indique l'état de départ du diagramme.	●
État final	État qui indique l'état de fin du diagramme.	⦿
Évènement	Évènement discret permettant le changement d'état.	Évènement →

Figure 5. Éléments utilisés dans la construction d'un diagramme états-transitions

L'exemple de la figure 6 présente un diagramme états-transitions basique constitué de deux états et de deux évènements.

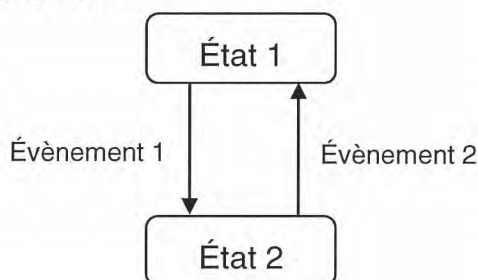


Figure 6. Exemple de diagramme états-transitions

Le tableau de la figure 7 décrit les différents états et évènements discrets nécessaires à la modélisation du cycle de marche à l'aide d'un diagramme états-transitions.

Évènements discrets	Mnémonique	États	Mnémonique
pose talon pied gauche	T _g	Appui double	AD
pose talon pied droit	T _d	Appui simple jambe gauche	AS _g
décollement orteils pied gauche	O _g	Appui simple jambe droite	AS _d
décollement orteils pied droit	O _d		

Figure 7. Description des états et des évènements discrets nécessaires à la modélisation du cycle de marche

Question 1 : proposer un diagramme états-transitions décrivant le cycle de la marche humaine.

La description du cycle de marche précédente a permis de décrire l'enchaînement des mouvements des différents membres.

Cette vision fonctionnelle peut être complétée par une description plus globale faisant intervenir l'ensemble du corps humain et de ses organes.

Les organes intervenant dans la marche sont listés dans le tableau de la figure 8.

Appareil digestif	Il est responsable de la dégradation des aliments en protéines, glucides, sels minéraux, oligo-éléments, ... Il assure également le passage de ces éléments dans le sang.
Cortex frontal	Il traite, décide et élabore les commandes.
Cortex pariétal postérieur	Il capte les informations sensorielles.
Moëlle épinière	Elle transmet les messages du cerveau au reste du corps.
Muscles	Ils actionnent les articulations.

Nerfs sensitifs moteur	Ils transmettent les informations.
Processus biochimiques	Ils permettent la transformation finale des protéines, glucides avant utilisation par les muscles.

Figure 8. Organes intervenant dans la marche humaine

Les fonctions remplies par ces organes peuvent être rapprochées de celles remplies par les éléments constitutifs de tout système, à savoir :

- actionneur ;
- capteur ;
- conditionneur de capteur ;
- effecteur ;
- interface de commande ;
- interface de puissance ;
- pré-actionneur ;
- transmetteur ;
- unité de traitement.

Question 2 : compléter, le document réponse DR1, le diagramme en indiquant les organes intervenant dans la marche. Si aucun organe n'intervient dans une des fonctions identifiées, mettre une croix.

1.2. Caractérisation géométrique de la marche asymptotique

Cette étude doit permettre de définir le comportement géométrique d'une jambe saine en fonction de la vitesse de marche. Dans cette première étude, les membres inférieurs sont respectivement modélisés par deux segments comme définis sur la figure 9. Les segments 1 (jambe 1) et 2 (jambe 2) représentent l'association du fémur et de l'ensemble tibia + péroné et les segments 3 et 4 correspondent aux pieds. Les positions relatives des deux segments 1 et 4 et des segments 2 et 3 sont considérées constantes et égales à 90° .

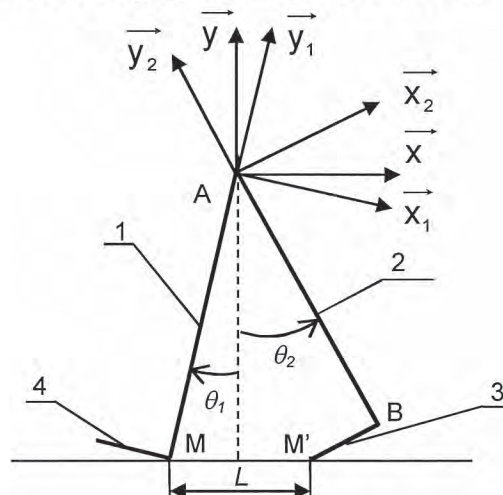


Figure 9. Représentation des jambes en appui sous forme de deux segments

Le point A représente le centre de rotation des deux membres inférieurs par rapport aux hanches qui sont considérées fixes. Les points M et M' représentent les points de contact entre chacun des deux membres inférieurs et le sol.

Les positions angulaires des deux membres sont décrites à l'aide des deux paramètres angulaires θ_1 et θ_2 définis par les figures géométrales (figure 10). Ces angles

correspondent à la rotation des deux membres inférieurs dans le cas où le genou est bloqué et n'autorise aucune flexion.

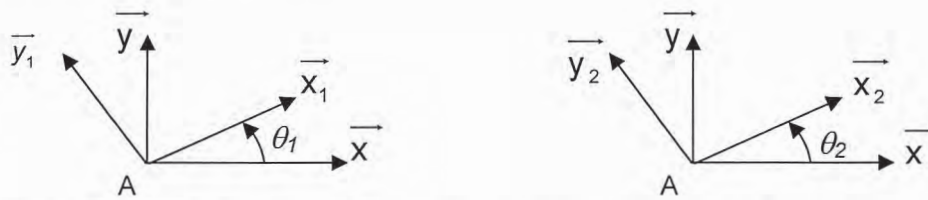


Figure 10. Figures géométrales définissant la position respective des segments 1 et 2

Le tableau de la figure 11 définit les grandeurs géométriques associées au schéma de la figure 9.

Données géométriques		
Jambe 1 (Segment 1)	Repère $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, orthonormé direct $\vec{AM} = -L_1 \vec{y}_1$, Angle $\theta_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$	$L_1 = 1 \text{ m}$, $-15 < \theta_1 < 0^\circ$
Jambe 2 (Segment 2)	Repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, orthonormé direct $\vec{AB} = -L_2 \vec{y}_2$, Angle $\theta_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) = (\vec{y}, \vec{y}_2)$	$L_2 = 1 \text{ m}$, $0 < \theta_2 < 15^\circ$
Pied 4	$\vec{M'B} = L_4 \cdot \vec{x}_2$ et $\vec{MM'} = L \vec{x}$	$L_4 = 0,25 \text{ m}$

Figure 11. Grandeurs géométriques associées au modèle de la marche asymptotique

Question 3 : à partir du schéma proposé figure 9, représenter, sur un même schéma, les trois positions remarquables permettant de définir un pas. Déterminer alors la longueur L et en déduire la longueur d'un pas L_{pas} .

Afin de pouvoir valider les performances de la prothèse 1P360, un groupe de contrôle formé de sujets sains est constitué. Les performances des sujets du groupe de contrôle vont servir d'objectifs à atteindre pour les performances de la prothèse 1P360.

Des campagnes de test du groupe de contrôle ont permis de définir certaines caractéristiques de la marche de ces sujets. Le tableau de la figure 12 décrit les vitesses expérimentales mesurées.

Vitesse de marche (m/s)	
Vitesse naturelle	$V_{confort} = 1,20$
Vitesse rapide	$V_{rapide} = 1,70$
Vitesse lente	$V_{lente} = 0,95$

Figure 12. Différentes vitesses caractéristiques de marche du groupe de contrôle

Afin de s'affranchir des particularités spécifiques à chaque sujet du groupe de contrôle, des critères de comparaison indépendants des caractéristiques morphologiques sont utilisés dont la longueur du pas, exprimée en pourcentage de la longueur du membre inférieur.

Les tests expérimentaux ont permis de définir les longueurs de pas suivantes (figure 13) :

Vitesse naturelle	$L_{pas} = 85 \%$
Vitesse rapide	$L_{pas} = 75 \%$
Vitesse lente	$L_{pas} = 95 \%$

Figure 13. Longueurs de pas expérimentales obtenues pour les trois vitesses caractéristiques de marche

Question 4 : pour chacune des trois vitesses de marche définies ci-dessus, déterminer la cadence de marche en pas/min pour une longueur du membre inférieur de 1 m.

Cette partie a permis d'étudier le cycle de marche et définir quelques caractéristiques géométriques et cinématiques de la marche asymptomatique. Dans l'optique de concevoir une prothèse de genou susceptible de reproduire la marche asymptomatique, il est nécessaire de modéliser le comportement dynamique des membres inférieurs. La partie suivante se propose donc d'établir ce modèle de connaissance.

1.3. Modélisation dynamique de la marche asymptomatique

La figure 14 décrit le modèle géométrique retenu pour modéliser le comportement dynamique d'un marcheur où le genou de la jambe 1 (segments 11 et 12) est considéré comme verrouillé.

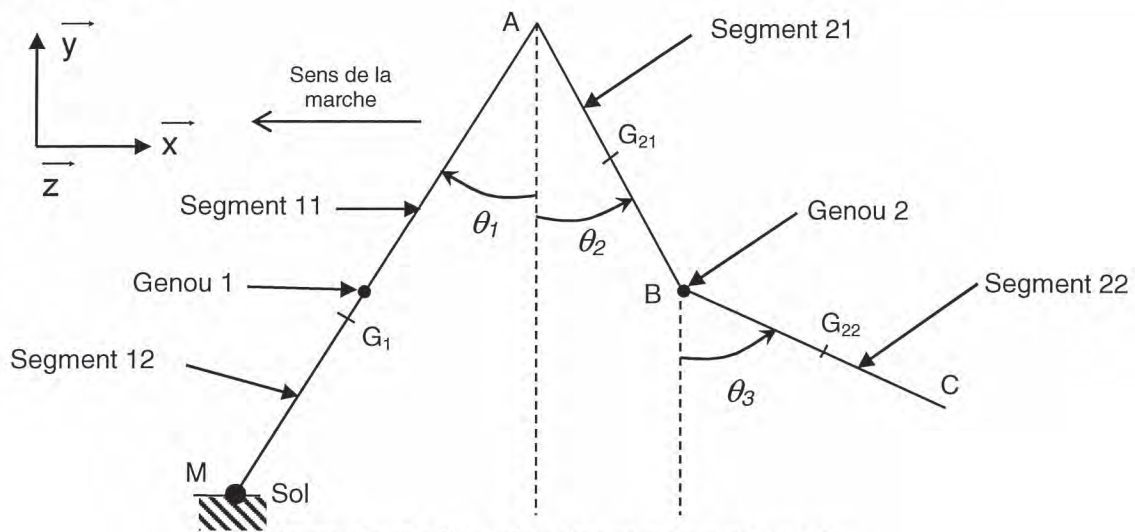


Figure 14. Modèle géométrique à trois segments

Lors du franchissement d'un pas, le contact entre le talon de la jambe 1 et le sol est modélisé par une liaison pivot parfaite d'axe $(M, \vec{z})$.

Le tableau de la figure 15 regroupe les données géométriques, massiques et inertielles nécessaires à l'étude.

Solide	Paramètres géométriques	Paramètres cinétiques
Hanche 0	Repère $R_0(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	
Jambe 1		
Fémur 1 (segment 11) et tibia péroné 1 (segment 12) genou 1 verrouillé	Repère $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ $\vec{AM} = -L_1 \vec{y}_1, \vec{AG}_1 = -b_1 \vec{y}_1, \vec{G}_1 M = -a_1 \vec{y}_1$ Angle $\theta_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$	Centre de gravité G_1 Masse : m_1 Moment d'inertie en G_1 , en projection suivant $\vec{z}$: I_1
Jambe 2		
Fémur (segment 21)	Repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ $\vec{AB} = -L_2 \vec{y}_2, \vec{AG}_{21} = -b_2 \vec{y}_2, \vec{G}_{21} B = -a_2 \vec{y}_2$ Angle $\theta_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) = (\vec{y}, \vec{y}_2)$	Centre de gravité G_{21} Masse : m_{21} Moment d'inertie en G_{21} , en projection suivant $\vec{z}$: I_{21}
Tibia-péroné (segment 22)	Repère $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ $\vec{BC} = -L_3 \vec{y}_3, \vec{BG}_{22} = -b_3 \vec{y}_3, \vec{G}_{22} C = -a_3 \vec{y}_3$ Angle $\theta_3 = (\vec{x}, \vec{x}_3) = (\vec{y}, \vec{y}_3)$	Centre de gravité G_{22} Masse : m_{22} Moment d'inertie en G_{22} , en projection suivant $\vec{z}$: I_{22}

Figure 15. Tableau regroupant les données géométriques, massiques et inertielles de chaque segment

À partir de ce modèle à 3 segments, la flexion du genou 2 est caractérisée par l'angle $\theta_3 - \theta_2$.

Lors de la marche asymptomatique, afin de compenser les efforts générés par le sol, un couple de compensation est généré par les hanches. Ce couple appliqué en A et nommé couple à la hanche, est modélisé par :

$$\vec{C}_{Hanche/2} = C_2 \cdot \vec{z}.$$

Un second couple est introduit, le couple au genou appliqué par le fémur 21 sur l'ensemble tibia-péroné 22 en B. Ce couple est modélisé par :

$$\vec{C}_{22/21} = C_3 \cdot \vec{z}.$$

Le formalisme de Lagrange, rappelé ci-dessous, permet de modéliser la dynamique de la marche asymptomatique.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

où T représente l'énergie cinétique, Q_i les forces généralisées et q_i les coordonnées généralisées.

L'objectif est d'établir le modèle dynamique de connaissance de la marche.

Question 5 : déterminer l'énergie cinétique de chacun des solides. En déduire l'énergie cinétique globale pour ce modèle à trois segments.

Question 6 : déterminer les puissances associées aux actions mécaniques s'exerçant sur le modèle à trois segments. À l'aide du formalisme de Lagrange, écrire l'équation de Lagrange associée à l'angle θ_3 sous la forme

$$J_{31} \cdot \ddot{\theta}_1 + J_{32} \cdot \ddot{\theta}_2 + J_{33} \cdot \ddot{\theta}_3 + N_{31} \cdot \dot{\theta}_1^2 + N_{32} \cdot \dot{\theta}_2^2 + N_{33} \cdot \dot{\theta}_3^2 + K_3 = -C_3,$$

où les termes J_{31} , J_{32} , J_{33} , N_{31} , N_{32} , N_{33} et K_3 seront exprimés en fonction des paramètres géométriques et cinétiques regroupés dans le tableau de la figure 15.

La résolution complète aboutit à l'écriture de trois équations différentielles décrivant les comportements dynamiques des trois segments.

Outre le fait que la simulation de ce modèle permet de connaître le comportement dynamique des différents membres lors de la marche d'un sujet sain, cette modélisation va aussi servir de base à la description de la marche d'un sujet amputé. Cette marche est définie comme étant la marche prothétique. La marche prothétique fait intervenir, d'une part, le membre prothétique constitué du membre résiduel et de la prothèse et, d'autre part, le membre sain, appelé membre controlatéral.

Les dynamiques de ces membres sont décrites à l'aide des mêmes équations différentielles établies ci-dessus. En revanche, la structure et la composition de la prothèse induit une modification des paramètres géométrique et cinétique. De plus, l'amputation trans-fémorale induisant la suppression de l'articulation du genou et d'une partie des os, des muscles et des tendons de la cuisse, il devient impossible pour le patient amputé de générer le couple $\overrightarrow{C_{22/21}}$ qui contrôle la flexion-extension de l'ensemble tibia-péroné.

La partie suivante a pour objectif d'analyser les modifications de la marche induites par une amputation trans-fémorale.

2. Description de la marche prothétique des amputés trans-fémoraux

Objectif : identifier et analyser les modifications inhérentes à la marche prothétique dans le cas d'une amputation trans-fémorale.

Cette partie est consacrée à une étude comparative de la marche asymptomatique et de la marche prothétique. La marche prothétique se définit, ici, comme étant la marche d'un patient équipé d'une prothèse de genou.

La marche asymptomatique est générée et contrôlée par un ensemble complexe d'os, de muscles et de tendons. La marche prothétique, dans le cas d'une amputation trans-fémorale, est obtenue en dépit de l'absence de deux articulations, de la cheville et du genou, et de nombreux muscles.

Ainsi lors de l'initiation de la phase pendulaire, le sujet amputé, privé de son genou et d'une partie de ses muscles de cuisse, ne peut mobiliser sa prothèse qu'à partir des muscles de sa hanche.

L'amorce de la phase de flexion est donc réalisée par l'application d'un couple à la hanche. Ce couple à la hanche génère l'accélération nécessaire à la flexion du genou prothétique du fait des effets inertiels. Le retour en extension du genou prothétique est réalisé par la génération d'un couple à la hanche opposé.

Les prothèses, passives et actives, qui équipent les amputés se distinguent respectivement par l'absence ou la présence d'un contrôle actif de la flexion du genou prothétique. Ce système de contrôle actif permet d'assurer une plus grande adaptabilité de la prothèse active aux conditions de marche rencontrées.

L'étude comparative proposée va permettre de mettre en évidence les conséquences d'un appareillage au niveau des performances associées à la marche et donc les critères de performances à considérer lors de la conception de la prothèse active 1P360.