ministère éducation nationale

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Secrétariat Général

Direction générale des ressources humaines

Sous-direction du recrutement

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Concours du second degré – Rapport de jury

Session 2013

CAPES Externe de MATHÉMATIQUES

Rapport présenté par Xavier SORBE, président du jury

Les rapports des jurys des concours sont établis sous la responsabilité des présidents de jury

Conseil aux futurs candidats

Il est vivement recommandé aux candidats de s'informer sur les modalités du concours.

Les renseignements généraux (conditions d'accès, épreuves, carrière, etc.) sont donnés sur le site du ministère de l'éducation nationale (système d'information et d'aide aux concours du second degré) :

http://www.education.gouv.fr/pid63/siac2.html

Le jury du CAPES externe de Mathématiques met à disposition des candidats et des formateurs un site spécifique :

http://capes-math.org

Les épreuves écrites de la session 2013 se sont déroulées les 15 et 16 novembre 2012.

Les épreuves orales se sont tenues du 22 juin au 9 juillet 2013,
dans les locaux du lycée Jean Lurçat, Paris 13e.
Que soient ici remerciés Madame le Proviseur et l'ensemble des personnels du lycée
pour la qualité de leur accueil ainsi que pour leur très aimable disponibilité.

Table des matières

1. PRÉSENTATION DU CONCOURS 2013

1.1 Composition du jury

ADAM Emmanuelle	professeur agrégé
ALARIC Bernard	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BAILLOEUIL Mélissa	professeur agrégé
BARNET Christophe	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BAUDU Jean-Charles	professeur agrégé
BELAUD Yves	maître de conférences
BENZIDIA Abdelaziz	professeur agrégé
BESBES Mourad	maître de conférences
BLOND Elisabeth	professeur agrégé
BLUTEAU-DAVY Véronique	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BOUCHEL Olivier	professeur agrégé
BOUDARN Dalia	professeur agrégé
BOURDEAU Marie-Françoise	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BOVANI Michel, vice-président	inspecteur général de l'éducation nationale
BOZON Marie-Pierre	professeur agrégé
BRANDEBOURG Patrick	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BRETONNIÈRE Laurent	professeur agrégé
BROISE Anne	maître de conférences
BRUCKER Christian	professeur agrégé
BUGNET Gaëlle	professeur agrégé
CANTINEAU Christine	professeur de chaires supérieures
CHARPENTIER-TITY Charles	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
COLESSE Sylvie	professeur agrégé
COLLEU Frederic	professeur agrégé
CORTEZ Aurélie	maître de conférences
DÉAT Joëlle	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
DEBARGE Régis	professeur agrégé
DESROUSSEAUX Pierre-Antoine	professeur agrégé
DESTRUHAUT Fabrice	professeur agrégé
DONATI-MARTIN Catherine	professeur des universités
DUDOGNON Marylène	professeur agrégé
DUMAS Laurent	professeur des universités
DUSSART Delphine	professeur agrégé
EL AMRANI Mohammed	maître de conférences
FAURE Christian	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
FÉRACHOGLOU Robert	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
FEVOTTE Philippe	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
FLICHE Françoise	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
FOISSY Loïc	maître de conférences
GAUCHARD Xavier	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
GEORGELIN Christine	maître de conférences
GERARD Danièle	professeur agrégé
GIRAULT Dominique	professeur agrégé
GOSSE Michel, vice-président	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
GOUY Michel	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
GRILLOT Michèle	maître de conférences

GRUNER Ilme	professeur agrégé
HERMANS Yann	professeur agrégé
HEZARD David	professeur agrégé
HUBERT Nicolas	professeur agrégé
HUNAULT Ollivier	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
JACQUES Isabelle	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
JACQUIN Martine	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LA FONTAINE François	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LABROSSE Jean	professeur agrégé
LAC Philippe	professeur agrégé
LAFARGUE Benoît	professeur agrégé
LAMPLE Hélène	professeur agrégé
LATHÉLIZE Arnaud	professeur agrégé
LAURENT REIG Céline	professeur agrégé
LAVAU Françoise	professeur agrégé
LE BORGNE Stéphane	maître de conférences
LE GALL Pol	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LEGROS Stéphane	professeur de chaires supérieures
LEGRY Ludovic	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LORIDON Geneviève, vice-présidente	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LOUVRIER Pascale	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LOVERA Stéphanie	professeur agrégé
MAGNIN Nicolas	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
MAILLE Vincent	professeur agrégé
MALLEGOL Pascale	professeur de chaires supérieures
MANESSE Sophie	professeur agrégé
MARCUS Sophie	professeur agrégé
MARQUIER Soisick	professeur agrégé
MARTINEZ-LABROUSSE Isabelle	professeur agrégé
MASSELIN Vincent	professeur agrégé
MEGARD Marie, vice-présidente	inspecteur général de l'éducation nationale
MENINI Chantal	maître de conférences
MESSEANT Véronique	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
MICHAU Nadine	professeur agrégé
MOUCAUD Michèle	professeur agrégé
MOURLAN Sandrine	professeur agrégé
NOE Laurent	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
NOGUES Maryse	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
OBERT Marie-Christine	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
OLLIVIER Gilles	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
PASSAT Isabelle	professeur agrégé
PASSERAT Stéphane	professeur agrégé
PAYET Willy	professeur de chaires supérieures
PETIT Francis	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
PICAMOLES Xavier	professeur agrégé
PICARD Sandrine	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
PLANTEVIN Frédérique	maître de conférences
QUELET Béatrice	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
RASKINE Anne	professeur agrégé
RENIER Guillaume	professeur agrégé

RICOMET Vincent	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
RODOZ-PLAGNE Sophie	professeur agrégé
ROIGNAN SOARES Nathalie	professeur agrégé
ROLAND Audrey	professeur agrégé
ROUANET Véronique	professeur de chaires supérieures
ROUDNEFF Evelyne	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SAGEAUX Thierry	professeur agrégé
SALDANA Amandine	professeur agrégé
SALVI Karine	professeur agrégé
SCHWER Sylviane	professeur des universités
SENECHAUD Pascale	maître de conférences
SERRA Eric	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SIDOKPOHOU Olivier, vice-président	professeur agrégé
SIGWARD Eric	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SINTUREL Émile	professeur agrégé
SLAMA Caroline	professeur agrégé
SORBE Xavier, président du jury	inspecteur général de l'éducation nationale
SOROSINA Eric	professeur agrégé
STRAUB Odile	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SZWARCBAUM Elia	professeur agrégé
TABKA Jalel	maître de conférences
TERREAU Corinne	professeur agrégé
TRAYNARD Alice	professeur agrégé
TRUCHAN Alain	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
TUDESQ Christian	professeur agrégé
VANTROYS Fanny	professeur agrégé
VASSARD Christian	professeur agrégé
VAUGON Claude	professeur agrégé
VÉDRINE Mickaël	professeur agrégé
WEISSE Jean-François	professeur agrégé
WILKE Stéphane	professeur agrégé
ZINE Mehdi	professeur agrégé
ZWERTVAEGHER Karine	professeur agrégé

1.2 Définition des épreuves

Arrêté du 28 décembre 2009 fixant les sections et les modalités d'organisation des concours du certificat d'aptitude au professorat du second degré (MENH0931286A)

Section mathématiques

A. — Épreuves d'admissibilité

1° Première composition écrite (durée : cinq heures, coefficient 3).
2° Deuxième composition écrite (durée : cinq heures, coefficient 3).
Le sujet de chaque composition est constitué d'un ou de plusieurs problèmes.
Le programme de ces épreuves est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée (STS et CPGE).
L'usage de calculatrices scientifiques est autorisé selon la réglementation en vigueur.

B. — Épreuves d'admission

1° Leçon portant sur les programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs.
Durée de la préparation : deux heures et demie ; durée de l'épreuve : une heure ; coefficient 3.
Le candidat choisit un thème, parmi deux qu'il tire au sort.
Dans un premier temps (quinze minutes maximum), le candidat expose un plan d'étude détaillée du sujet qu'il a choisi.
Dans un second temps (quinze minutes maximum), le candidat développe une partie de ce plan d'étude, choisie par le jury.
L'épreuve se termine par un entretien avec le jury portant sur ce développement, puis sur d'autres aspects relevant du sujet choisi par le candidat.
Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.

2° Epreuve sur dossier comportant deux parties : 14 points sont attribués à la première partie et 6 points à la seconde. Durée de la préparation : deux heures et demie ; durée totale de l'épreuve : une heure ; coefficient 3.
Première partie : épreuve d'exercices ; durée : quarante minutes.
L'épreuve permet au candidat de montrer :

- sa culture mathématique et professionnelle ;
- sa connaissance des contenus d'enseignement et des programmes ;
- sa réflexion sur l'histoire et les finalités des mathématiques et leurs relations avec les autres disciplines.

L'épreuve s'appuie sur un dossier fourni par le jury, portant sur un thème des programmes de mathématiques du collège, du lycée ou des sections de techniciens supérieurs. Ce thème est illustré par l'énoncé d'un exercice, pouvant être complété par des extraits de manuels, des productions d'élèves ou des passages des programmes officiels. Le dossier comprend des questions permettant d'apprécier la réflexion pédagogique du candidat. Ces questions portent sur l'énoncé de l'exercice et sa résolution ou d'autres aspects pédagogiques liés au contenu du dossier.
Pendant vingt minutes, le candidat expose ses réponses aux questions posées dans le dossier et propose, en motivant ses choix, plusieurs exercices s'inscrivant dans le thème du dossier.
Cette première partie se termine par un entretien avec le jury, portant sur l'exposé du candidat, en particulier sur les exercices qu'il a proposés, aussi bien en ce qui concerne leur résolution que les stratégies mises en œuvre.
Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.
Le programme de cette première partie d'épreuve est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs.
Seconde partie : interrogation portant sur la compétence Agir en fonctionnaire de l'Etat et de façon éthique et responsable. (Présentation dix minutes, entretien avec le jury : dix minutes.)
Le candidat répond pendant dix minutes à une question, à partir d'un document inclus dans le dossier qui lui a été remis au début de l'épreuve, question pour laquelle il a préparé les éléments de réponse durant le temps de préparation de l'épreuve. La question et le document portent sur les thématiques regroupées autour des connaissances, des capacités et des attitudes définies, pour la compétence désignée ci-dessus, dans le point 3 « les compétences professionnelles des maîtres » de l'annexe de l'arrêté du 19 décembre 2006.
L'exposé se poursuit par un entretien avec le jury pendant dix minutes.

1.3 Programme

Épreuves écrites
Le programme est constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée (STS et CPGE) en vigueur au titre de l'année scolaire 2012-2013 et de ceux en vigueur au titre de l'année scolaire 2011-2012.

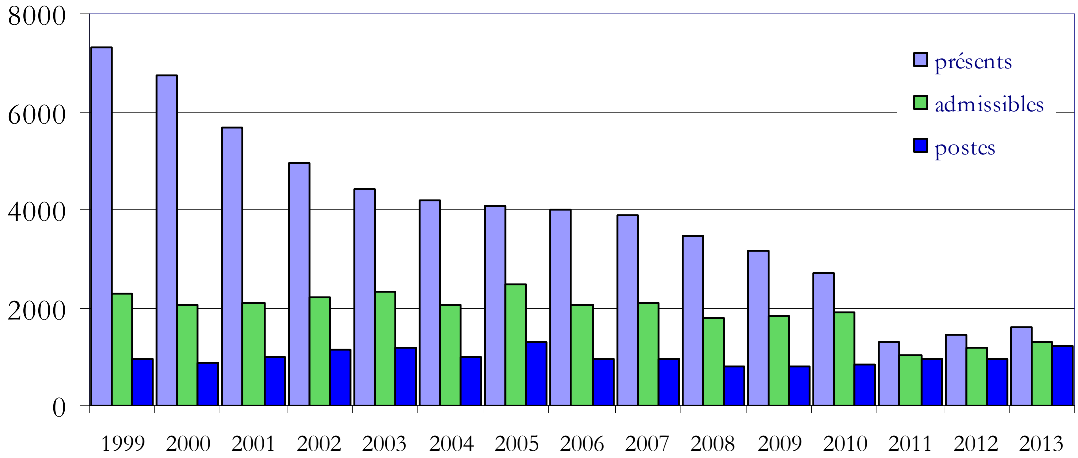
Épreuves orales
Le programme est constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs en vigueur au titre de l'année scolaire 2012-2013 et de ceux en vigueur au titre de l'année scolaire 2011-2012.

2. QUELQUES STATISTIQUES

2.1 Historique

L'effectif des candidats présents aux épreuves écrites est en augmentation (149 de plus qu'en 2012), mais le nombre de candidats par poste demeure faible.
Plus d'un candidat sur deux présents aux épreuves écrites de la session 2013 a été admis.

CAPES	postes	présents aux deux épreuves écrites	admissibles	admis		présents / postes	admis / présents
1999	945	7332	2274	945		7,8	13%
2000	890	6750	2067	890		7,6	13%
2001	990	5676	2109	990		5,7	17%
2002	1125	4948	2213	1125		4,4	23%
2003	1195	4428	2328	1195		3,7	27%
2004	1003	4194	2040	1003		4,2	24%
2005	1310	4074	2473	1310		3,1	32%
2006	952	3983	2043	952		4,2	24%
2007	952	3875	2102	952		4,1	25%
2008	806	3453	1802	806		4,3	23%
2009	806	3160	1836	806		3,9	26%
2010	846	2695	1919	846		3,2	31%
2011	950	1285	1047	574		1,4	45%
2012	950	1464	1176	652		1,5	45%
2013	**1210**	**1613**	**1311**	**817**		**1,3**	**51%**



Pour le CAFEP, le ratio a été de 3,4 candidats présents par poste.

CAFEP	postes	présents aux deux épreuves écrites	admissibles	admis
1999	210	847	107	57
2000	206	1030	145	78
2001	215	889	200	113
2002	230	745	192	118
2003	230	636	214	116
2004	177	658	205	103
2005	177	644	279	139
2006	135	689	283	126
2007	160	693	267	123
2008	155	631	200	90
2009	109	633	268	109
2010	155	554	308	119
2011	90	276	198	90
2012	75	319	214	75
2013	**105**	**359**	**272**	**105**

2.2 Répartition des notes

Les données suivantes concernent les concours CAPES et CAFEP confondus.
Sauf mention contraire, les notes indiquées sont sur 20.

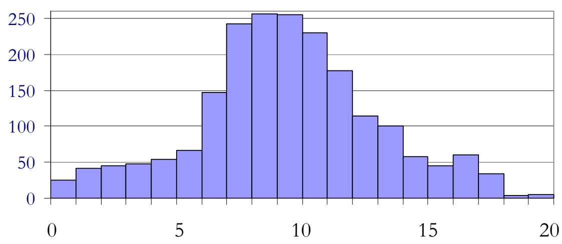
2.2.1 Épreuves d'admissibilité

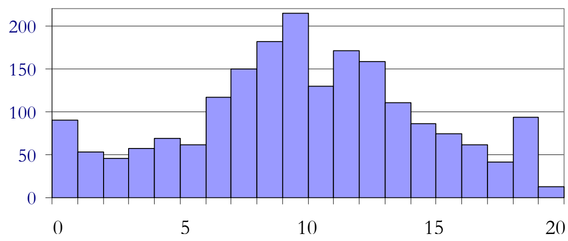
Première composition

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,34	3,64	7,29	9,27	11,45

Deuxième composition

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,85	4,63	7,12	9,79	12,87

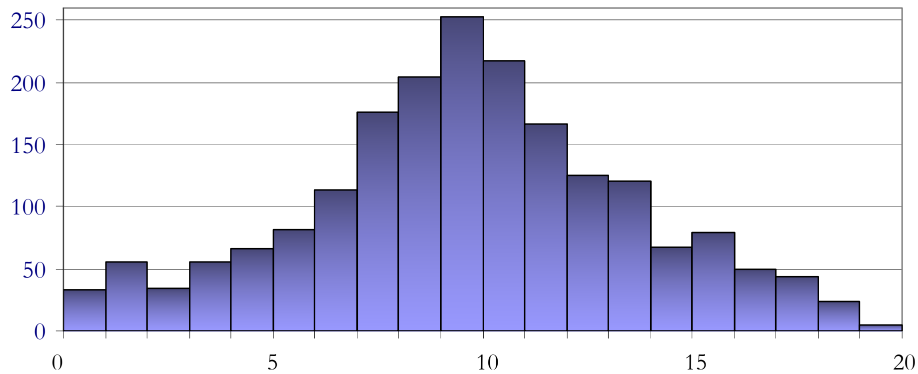




Le coefficient de corrélation linéaire entre les notes des deux épreuves écrites est 0,87.

Moyenne écrit

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,66	3,96	7,30	9,63	12,15

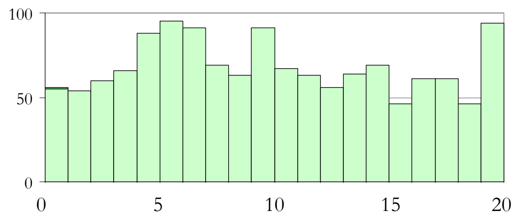


La barre d'admissibilité a été fixée à 6,50 sur 20.

2.2.2 Épreuves d'admission

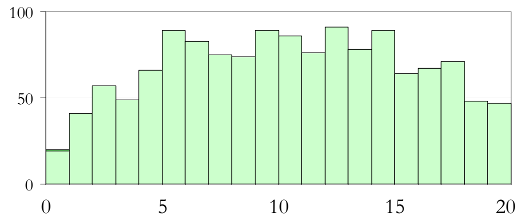
Leçon

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,61	5,67	5,20	9,20	14,00



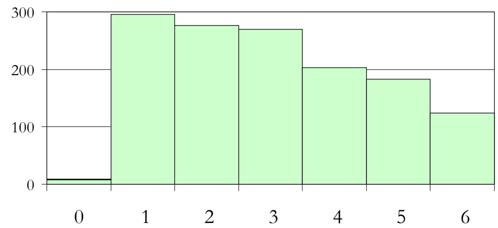
Dossier / Exercice (notes ramenées sur 20)

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
10,13	5,11	6,00	10,00	14,00



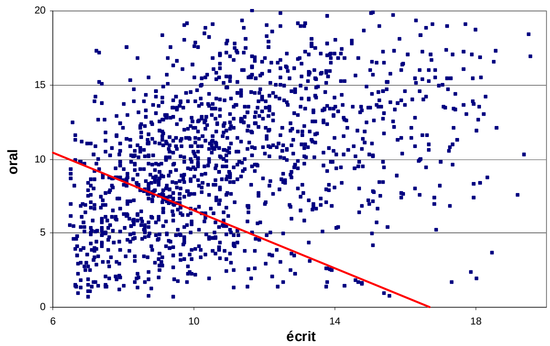
Dossier / Agir en fonctionnaire (notes sur 6)

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
3,04	1,62	2	3	4



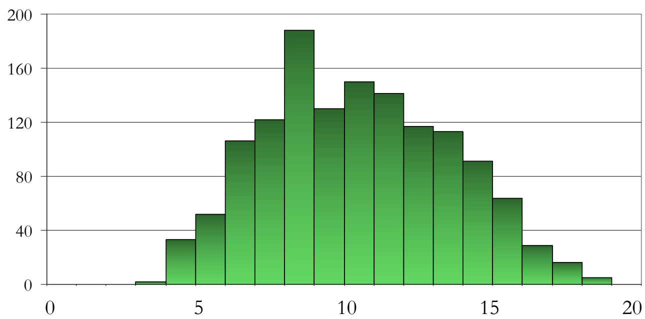
La note sur 20 de l'épreuve sur dossier est constituée de la partie « Exercice » sur 14 (représentée ici sur 20) et de la partie « Agir en fonctionnaire » sur 6.

Dans le nuage ci-dessous, chaque candidat présent aux épreuves orales est représenté par le point ayant pour coordonnées ses notes moyennes à l'écrit et à l'oral.



Moyenne générale (écrit et oral)

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
10,45	3,12	8,17	10,34	12,80



La barre d'admission (représentée plus haut en rouge, sans tenir compte des notes 0 éliminatoires) a été fixée à 8,26 sur 20. L'exigence de qualité que requiert le recrutement de professeurs certifiés n'a pas permis de pourvoir l'ensemble des postes ouverts.

Avec un rapport candidats / postes plus favorable, tous les postes du CAFEP ont été pourvus (moyenne du dernier admis : 10,50 sur 20).

2.3 Autres données

Les données suivantes concernent les concours CAPES et CAFEP confondus, en distinguant les candidats présents aux épreuves écrites, les admissibles et les admis (CAPES : 817 admis et un à titre étranger, CAFEP : 105 admis).
Elles ont été établies à partir des renseignements fournis par les candidats au moment de leur inscription.

Sexe	présents		admissibles		admis	
Femmes	846	43%	685	43%	449	49%
Hommes	1126	57%	898	57%	474	51%
	1972		1583		923	

Âge	présents		admissibles		admis	
entre 20 et 25 ans	553	28%	532	34%	441	48%
entre 25 et 30 ans	629	32%	525	33%	287	31%
entre 30 et 35 ans	257	13%	181	11%	75	8%
antre 35 et 40 ans	197	10%	132	8%	42	5%
entre 40 et 45 ans	156	8%	102	6%	34	4%
entre 45 et 50 ans	93	5%	57	4%	25	3%
plus de 50 ans	87	4%	54	3%	19	2%

Académie d'inscription	présents		admissibles		admis	
AIX-MARSEILLE	97	5%	68	4%	40	4%
AMIENS	36	2%	26	2%	17	2%
BESANCON	35	2%	27	2%	18	2%
BORDEAUX	77	4%	68	4%	51	6%
CAEN	50	3%	42	3%	21	2%
CLERMONT-FERRAND	39	2%	32	2%	19	2%
CORSE	6	0%	4	0%	1	0%
DIJON	36	2%	28	2%	18	2%
GRENOBLE	100	5%	90	6%	59	6%
GUADELOUPE	29	1%	18	1%	8	1%
GUYANE	4	0%	1	0%	0	0%
LA REUNION	28	1%	22	1%	10	1%
LILLE	142	7%	120	8%	76	8%
LIMOGES	24	1%	24	2%	13	1%
LYON	95	5%	83	5%	49	5%
MARTINIQUE	18	1%	14	1%	7	1%
MAYOTTE	4	0%	3	0%	0	0%
MONTPELLIER	64	3%	50	3%	31	3%
NANCY-METZ	69	3%	58	4%	35	4%
NANTES	108	5%	79	5%	42	5%
NICE	54	3%	38	2%	17	2%
NOUVELLE CALEDONIE	15	1%	12	1%	7	1%
ORLEANS-TOURS	52	3%	42	3%	21	2%
PARIS -CRETEIL-VERSAILLES	378	19%	292	18%	146	16%
POITIERS	42	2%	33	2%	24	3%
POLYNESIE FRANCAISE	9	0%	8	1%	2	0%
REIMS	46	2%	39	2%	29	3%
RENNES	98	5%	81	5%	50	5%
ROUEN	60	3%	50	3%	26	3%
STRASBOURG	67	3%	56	4%	34	4%
TOULOUSE	90	5%	75	5%	52	6%

Catégorie	présents		admissibles		admis	
étudiants	966	49%	895	57%	659	71%
maitre-auxiliaire	109	6%	70	4%	21	2%
contractuel 2d degré	240	12%	149	9%	59	6%
vacataire du 2d degré	42	2%	28	2%	8	1%
assistant d'éducation	72	4%	42	3%	23	2%
autres (éducation nationale ou supérieur)	142	7%	92	6%	27	3%
cadres du secteur privé	92	5%	74	5%	34	4%
sans emploi	191	10%	149	9%	62	7%
autres	118	6%	84	5%	30	3%

Une enquête réalisée par le jury auprès des candidats présents aux épreuves orales montre par ailleurs que :

- 61% d'entre eux ont préparé un master d'enseignement Mathématiques, 13% ont préparé un master recherche en Mathématique, 8% un master dans une autre discipline que les Mathématiques et 17% sont titulaires d'un diplôme d'ingénieur ;
- 38% ont suivi une classe préparatoire aux grandes écoles pendant au moins un an ;
- la plupart des candidats ont eu une expérience de l'enseignement, à travers des stages de pratique accompagnée (50%) ou des vacations (40%).

3. ANALYSES ET COMMENTAIRES

3.1 Épreuves écrites

Le sujet de la **première épreuve** était composé de deux problèmes : un d'arithmétique et d'analyse (nombres irrationnels) et un de probabilités et statistiques (entropie).
Le jury a prêté une attention particulière aux compétences suivantes :

- rédiger un raisonnement par l'absurde : 37% des candidats ont traité correctement au moins une des questions A.1 ou A.3 du problème 1, alors que 42% d'entre eux rédigent une réponse erronée ou incomplète et que 21% ne fournissent aucune réponse ;
- rédiger un raisonnement par récurrence : 36% des candidats ont traité correctement au moins une des questions C.2.4 du problème 1 ou B.3.1 du problème 2, alors que 25% d'entre eux rédigent une réponse erronée ou incomplète et que 39% ne fournissent aucune réponse ;
- représenter graphiquement une fonction affine par morceaux : 42% des candidats ont traité correctement au moins une des questions A.2.1 ou A.2.2 du problème 2, alors que 32% d'entre eux rédigent une réponse erronée ou incomplète et que 26% ne fournissent aucune réponse ;
- justifier correctement l'existence d'un extremum : 41% des candidats ont traité correctement au moins une des questions B.1.2 du problème 1 ou B.2 du problème 2, alors que 39% d'entre eux rédigent une réponse erronée ou incomplète et que 20% ne fournissent aucune réponse.

Les futurs candidats tireront les conclusions qui s'imposent de cette étude statistique des copies. Un effort particulier doit être fait pour maîtriser parfaitement les raisonnements classiques ainsi que les savoir-faire de base indispensables à l'exercice du métier d'enseignant.

Les premières parties de chaque problème ont été abordées par la plupart des candidats. Elles ont permis de constater une assez bonne maîtrise du calcul de dérivées, de la technique d'intégration par parties, de la mise en œuvre du théorème d'encadrement ou encore de l'utilisation de la formule de Leibniz et du critère de convergence d'une série géométrique.
Toutefois, la lecture des copies amène à relever un certain nombre d'erreurs.
Dans le problème 1, les trois premières questions d'arithmétique sont souvent mal traitées : on trouve des raisonnements par l'absurde ou par contraposée mal rédigés, des affirmations non ou mal justifiées, ou encore l'utilisation de règles dans un cadre qui ne s'y prête pas, comme par exemple le lemme de Gauss avec des nombres qui ne sont pas des entiers. La première partie de la question A.4.1 est en général plutôt bien traitée, même si le jury déplore dans quelques copies une définition fausse de deux suites adjacentes. Si certains candidats manifestent une certaine aisance dans l'utilisation des inégalités, l'encadrement $u_q < \mathrm{e} < v_q$ de la question A.4.1 est cependant rarement démontré correctement.
Dans le problème 2, l'inégalité de Jensen est abordée dans la plupart des copies. Mais l'indication de l'énoncé n'est pas comprise ; l'initialisation est mal traitée et les candidats n'écrivent pas correctement l'hypothèse de récurrence puis oublient de vérifier que la somme des poids vaut 1 pour l'hérédité.
Par ailleurs, la représentation graphique d'une fonction affine par morceaux met en difficulté plus de la moitié des candidats.
Les correcteurs déplorent un manque de rigueur dans bon nombre de copies : confusion entre inégalités larges ou strictes, absence fréquente des quantificateurs, utilisation d'exemples pour démontrer une propriété générale, utilisation abusive du symbole d'équivalence, absence fréquente de l'argument de continuité de la fonction lorsqu'il est nécessaire, manque de précaution dans la manipulation des inégalités, confusion entre f et $f(x)$ ou encore entre I_n et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Enfin, on observe malheureusement trop souvent des erreurs classiques :

- si un nombre p/q est entier, alors nécessairement $q = 1$;
- le produit $a_0 \dots a_k$ est constitué de k facteurs ;
- si $f'(x_0) = 0$, alors f présente un extremum en x_0 ;
- une suite majorée par une suite convergente est elle-même convergente.

Le jury invite les candidats à soigner davantage la rédaction, en particulier dans les premières questions de chaque problème et à se montrer précis et rigoureux tout au long de leur copie.

Le sujet de la **deuxième épreuve** était composé de deux problèmes : un d'algèbre (puissances de matrices) et un d'arithmétique (théorèmes de Lagrange, Wilson et Wolstenholme).
Les premières parties de chaque problème ont été largement abordées par la plupart des candidats. La partie A du problème 1 a permis de mettre en évidence la maîtrise d'un certain nombre de compétences : calcul matriciel, recherche de valeurs propres, puissances *n*-ièmes d'une matrice 2×2 diagonalisable.
Dans le problème 2, on observe une certaine aisance dans la manipulation des coefficients binomiaux et des congruences.

Cependant, la rédaction manque souvent de précision.
Dans la question A.1 du problème 1, rares sont les candidats qui emploient le terme *récurrence* pour justifier l'expression demandée. La plupart préfèrent utiliser des expressions du vocabulaire courant telles que *de proche en proche* ou *ainsi de suite*. De façon générale, les quantificateurs sont négligés.

De plus, les justifications ne sont pas toujours rigoureuses.
Dans le problème 1, la convergence de $(2/5)^n$ est trop souvent justifiée par l'argument $2/5 < 1$.
Les candidats confondent régulièrement les matrices et leurs coefficients, notamment dans les questions B.1.1, B.1.2 et B.1.3.
Dans la question B.2.2, qui demandait d'énoncer sans démonstration un résultat analogue pour la multiplication à droite, les dimensions des matrices sont souvent oubliées.
Dans la question B.3, certains candidats supposent que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui ne fait pas partie des hypothèses.
On trouve des confusions entre vecteurs et scalaires, en particulier dans la question D.4.1 avec des égalités de la forme $u^n(e_1) = \alpha_1^n$.
Le jury déplore des erreurs inquiétantes :

- mise en œuvre d'une récurrence sur p, alors que p désigne un nombre premier (problème 2) ;
- si des matrices A et X vérifient $AX = 0$; alors $A = 0$ ou $X = 0$;
- si λ est un nombre complexe, alors $|\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$;
- si $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = pq$ avec $q\in\mathbb{R}$, alors p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.

Certains résultats du cours ainsi que des savoir-faire classiques sont insuffisamment maîtrisés.
49% des candidats n'ont pas répondu à la question D.1 du problème 1, qui demandait d'énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss. Seuls 18% des candidats ont fourni un énoncé correct de ce théorème. On trouve également beaucoup d'énoncés incomplets ou fantaisistes.
63% des candidats n'ont pas abordé la question C.1 du problème 2, qui demandait d'écrire un algorithme. Seuls 11% des candidats ont fourni une réponse correcte. Plusieurs algorithmes proposés calculent $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$, ce qui ne permet pas d'obtenir les entiers s_n et t_n demandés.

Enfin, la lecture de l'énoncé semble parfois superficielle.
Dans le problème 1, question A.2, un certain nombre de candidats recherchent les vecteurs propres de A, ce qui est inutile puisque la matrice de passage P est donnée.
Les candidats ne font pas toujours le lien entre les questions. Dans le problème 2, question A.2, le résultat se déduisait facilement de la question A.1 grâce au théorème de Gauss. Or de nombreux candidats ont tenté une démonstration directe, rarement aboutie. Cette question pourtant élémentaire n'aura été correctement traitée que dans 31% des copies.
La partie *Rappels et notations* du problème 1 ne semble pas avoir été lue avec suffisamment d'attention. En effet, certains candidats n'utilisent pas pour les questions B.1.1, B.1.2 et B.1.3 la définition de la convergence fournie par l'énoncé.
Les questions sont parfois lues trop rapidement. Dans le problème 2, question A.3.2, la plupart des candidats oublient de mentionner que les a_i sont des entiers.

En général, les copies sont bien présentées et agréables à lire. Néanmoins, le jury attend de la part de futurs professeurs davantage de clarté afin qu'ils puissent transmettre cette qualité à leurs futurs élèves.

3.2 Épreuve de leçon

L'épreuve de leçon consiste à traiter de façon synthétique un sujet portant sur une ou plusieurs notions mathématiques relevant des programmes des classes de l'enseignement secondaire ou des sections de techniciens supérieurs. Cette épreuve est organisée selon trois temps :

- *le plan* doit présenter une structure claire permettant d'introduire les diverses notions de façon progressive, en les illustrant d'exemples pertinents ; le jury doit y trouver des pistes pour le choix d'un développement ;
- *le développement* d'une partie du plan choisie par le jury permet au candidat de montrer sa maîtrise du sujet et sa bonne compréhension des éléments exposés dans le plan, à travers la démonstration d'un théorème, la résolution d'un exercice, la mise en œuvre d'un logiciel, etc. ;
- *l'entretien* constitue un moment d'échange avec le jury, permettant au candidat de clarifier certains éléments du plan ou du développement et de valoriser ses connaissances en prenant du recul par rapport au thème abordé.

Une préparation des épreuves solide et sur une durée suffisamment longue reste le meilleur gage de réussite. Fort heureusement, certains candidats l'ont bien compris. À l'inverse, il est impossible de faire illusion lorsque l'on s'en remet uniquement aux ressources fournies par le jury et notamment à des manuels scolaires découverts le jour de l'épreuve.
Un plan de qualité doit être synthétique et cohérent, mais également riche et attrayant. Présenter une succession de titres ne suffit pas et est fortement pénalisé. Le jury attend au contraire des énoncés (définitions, propositions, théorèmes) formulés avec clarté et rigueur et des illustrations (exemples, contre-exemples, exercices d'application, schémas et graphiques) riches et variées. Un plan suffisamment hiérarchisé permet aux candidats de valeur de faire la part des choses entre ce qui doit être écrit et ce que l'on peut se contenter de dire. Ce dernier élément n'est pas sans lien avec une bonne gestion du temps de l'épreuve, laquelle dépend également de l'entraînement que l'on s'est imposé en amont.

Concernant le choix de la leçon, les sujets les moins bien traités concernent l'arithmétique et les probabilités (notamment ce qui a trait aux lois continues), mais aussi les nombres complexes et le traitement de certains thèmes de collège pourtant simples en apparence, comme la proportionnalité.
Les « leçons d'exemples » sont également source de difficultés.
Le jury attend des candidats qu'ils soient vigilants quant au statut des énoncés, qu'ils distinguent soigneusement conjecture et preuve et qu'ils utilisent correctement les quantificateurs.

Pour cette épreuve de leçon, le jury n'attend pas du candidat qu'il se réfère à une situation d'enseignement précise ni qu'il traite le sujet « comme devant une classe ». En revanche, la posture attendue est proche de celle d'un enseignant : l'aisance, la clarté du discours, la mise en perspective, le souci de se faire bien comprendre et de préciser le contexte de la leçon sont autant de points qui sont systématiquement valorisés. À l'inverse, les candidats qui parlent sans regarder le jury, voire en lui tournant le dos de façon systématique ou encore qui tiennent des propos décousus voire incompréhensibles ont été pénalisés, parfois lourdement. Un niveau de langage raisonnablement soutenu est également attendu. Lorsque l'on fait un exposé après une préparation de plus de deux heures, il est bienvenu de savoir se référer ponctuellement aux notes prises durant cette préparation, mais il est tout aussi important de savoir s'en détacher la plupart du temps. Des candidats de plus en plus nombreux trouvent à cet égard le bon compromis, en s'appuyant notamment sur l'emploi d'un support numérique.

Le développement, qui relève du choix du jury, doit constituer une prestation personnelle : se limiter à lire une démonstration directement extraite d'un manuel est naturellement sanctionné

Enfin, le jury a été sensible aux efforts fournis pour utiliser les outils numériques, désormais employés de façon pertinente y compris les manuels numériques, et a apprécié le recours de plus en plus fréquent à l'algorithmique.

3.3 Épreuve sur dossier

3.3.1 Exercice

La partie *Exercice* de l'épreuve sur dossier permet d'évaluer les candidats dans le cadre de l'approche professionnelle d'un concours de recrutement d'enseignants :

- l'analyse de productions d'élèves, d'extraits de programmes officiels ou la recherche des compétences visées par un énoncé amène à porter un regard pédagogique conforme aux exigences du métier ;
- la correction d'un exercice comme on le ferait en situation d'enseignement oblige à anticiper sur certaines difficultés prévisibles ;
- le choix d'exercices sur un thème donné conduit à s'interroger sur les critères à retenir en fonction d'objectifs donnés.

La mise à disposition du sujet au format numérique en salle d'interrogation a permis à bon nombre de candidats une gestion optimisée du temps de présentation. L'emploi du vidéoprojecteur devient quant à lui presque systématique. L'expertise dans le maniement des logiciels (géométrie dynamique et tableur notamment) est également en progrès par rapport aux sessions précédentes. Certains candidats cependant ne sont pas assez synthétiques et ne gardent pas suffisamment de temps pour présenter leurs exercices.

L'analyse de productions d'élèves est elle aussi en progrès. À travers le repérage de stratégies pertinentes non abouties et l'utilisation de descripteurs positifs, certains candidats parviennent à fournir un discours valorisant sur le travail des élèves alors que d'autres se limitent à l'énumération d'une liste d'erreurs dont l'origine n'est parfois même pas analysée. Cette partie de l'épreuve apparaît ainsi comme fortement discriminante.

La notion de compétence est quant à elle toujours mal cernée. Les ressources institutionnelles sur le sujet sont pourtant riches et il conviendrait que les candidats s'en préoccupent davantage lors de la préparation du concours. Par exemple, le fait de s'intéresser à la notion de tâche complexe pourrait rendre plus pertinente l'analyse de productions d'élèves et plus aisée la proposition d'exercices riches et variés.

L'exercice proposé par le jury met toujours quelques candidats en difficulté. La consigne de correction « comme devant une classe » est trop peu respectée. Rappelons qu'il s'agit ici de faire un pas vers un véritable positionnement professionnel et d'adopter autant que faire se peut la posture d'un enseignant devant sa classe. Le jury n'oublie pas qu'une véritable expérience de la classe manque à la plupart des candidats, mais il n'en attend pas moins une attitude sous-tendue pas la mise en œuvre d'une véritable réflexion personnelle sur l'acte d'enseigner. En particulier, une trace écrite de la correction est attendue, de même que des qualités de communication affirmées.

La proposition d'exercices par le candidat obéit à plusieurs impératifs :

- de nature variée (distincts de celui du jury), ils doivent offrir un intérêt mathématique, s'inscrire dans le thème indiqué et, lorsque celui-ci s'y prête, couvrir plusieurs niveaux ;
- leur présentation ne consiste pas à copier les énoncés au tableau, mais à en préciser l'objet de façon vivante, à motiver ses choix pédagogiques en explicitant les compétences que l'on souhaite développer et à prévoir d'éventuels aménagements de leur contenu ;
- enfin, le candidat doit obligatoirement se montrer capable de résoudre les exercices qu'il propose, faute de quoi son choix se trouve largement discrédité.

Durant cette partie de l'épreuve, certains candidats se sont réellement mis en valeur en se montrant capables de justifier la pertinence de leur choix, tant du point de vue didactique que pédagogique. Ce sont souvent les mêmes qui parviennent à rattacher à une même problématique un choix varié d'exercices. Certains sujets contenaient des consignes particulières quant au choix des exercices (optimisation, modélisation), qui ont souvent été mal comprises.

Il va de soi que la fréquentation régulière de situations d'enseignement et d'exercices variés durant la préparation du concours peut aider les candidats à aborder sereinement cette épreuve.

3.3.2 Agir en fonctionnaire de l'État

Chaque sujet de la partie *Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable* repose sur une étude de cas complétée par un ou plusieurs documents (extraits de textes officiels, analyses statistiques, articles, etc.). Les thèmes abordés lors de la session 2013 concernaient l'évaluation des élèves, l'orientation, l'accès des filles aux filières scientifiques, l'interdisciplinarité, le développement de la culture scientifique, les problématiques liées aux addictions, au harcèlement et à la maltraitance, les relations avec les parents, les liaisons école-collège, collège-lycée et lycée-enseignement supérieur.

Cette partie de l'épreuve sur dossier, qui a un fort impact sur les résultats, permet d'apprécier si le candidat a conscience des obligations d'un enseignant et s'est approprié les principales valeurs du service public. Elle lui donne l'occasion d'exprimer sa conception du travail en équipe ou des relations hiérarchiques et de faire part de sa vision des missions du professeur.
Si l'on ne peut exiger qu'il maîtrise en détail le fonctionnement de l'institution scolaire, il est attendu d'un futur enseignant une certaine connaissance de l'organisation des établissements ainsi que des grands enjeux du système éducatif.

Le degré de préparation des candidats a encore progressé lors de cette session. Nombreux sont ceux qui valorisent une expérience acquise lors de stage en établissements, font preuve de bon sens et témoignent de leur capacité à s'impliquer, tout en étant conscient que la mission d'un enseignant comprend un rôle d'éducateur.

On doit cependant déplorer cette année encore que quelques candidats ne semblent pas s'intéresser aux élèves, n'ont aucune conscience des missions d'un professeur au-delà de l'acte d'enseignement, ni aucune idée de l'organisation du système éducatif. Une telle attitude, qui ne serait pas acceptable de la part de professionnels de l'éducation, est sanctionnée par des notes très faibles.

Les examinateurs continuent à dénoncer le travers consistant à se répéter ou à paraphraser les documents fournis. Il est important de rappeler que certaines questions n'appellent pas une réponse type et peuvent conduire à envisager différents cas ou à donner des arguments en faveur de plusieurs réponses possibles. Il est attendu du candidat qu'il fournisse des réponses qui l'engagent personnellement, avec bon sens, franchise et sincérité.

Comme pour les autres épreuves, outre qu'il est indispensable de lire attentivement le sujet, il est vivement recommandé de structurer suffisamment son exposé. Réciter un catalogue de sigles ou d'instances, ou vouloir absolument placer dans son discours des éléments sans rapport avec le sujet ne présente aucun intérêt.
Les stages réalisés dans le cadre d'un master offrent l'occasion d'enrichir la connaissance du système. Ils peuvent ainsi contribuer à un certain équilibre entre des réflexions d'ordre général et des considérations de portée plus concrète.

4. ÉNONCÉS

4.1 Énoncés des épreuves écrites

4.1.2 Première composition

Problème 1 : nombres irrationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

On rappelle que tout nombre rationnel non nul peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux. Un nombre réel est dit irrationnel s'il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Dans ce problème, on se propose de démontrer l'irrationalité de quelques nombres réels.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A : quelques exemples de nombres irrationnels

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors il est irrationnel.
2. En déduire que si p désigne un nombre premier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.
3. Démontrer que le nombre $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
4. On rappelle que $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q, entiers naturels non nuls, tels que $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
   $$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$
   4.1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis montrer que :
   $$u_q < \mathrm{e} < v_q$$
   4.2. Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Partie B : une preuve de l'irrationalité de π

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b, entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Étant donnés un entier naturel non nul n et un réel x, on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1$$

Étant donné un entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin x \, \mathrm{d}x$$

1.
   1.1. Pour un entier naturel n non nul, exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1}.
   1.2. Calculer $\displaystyle\sup_{x\in[0,\pi]} \left|P_n(x)\right|$ en fonction de a, b et n.
   1.3. Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x)$$

1.4. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n > 0$$

1.5. Après avoir justifié que la suite de terme général $\dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. Pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k de P_n est notée $P_n^{(k)}$. Par définition, $P_n^{(0)} = P_n$.
En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs :

2.1. $0 \leqslant k \leqslant n-1$

2.2. $n \leqslant k \leqslant 2n$

2.3. $k \geqslant 2n+1$

Pour le cas 2.2, on pourra utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$.

3.

3.1. Démontrer que pour tout entier naturel n, I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.

3.2. Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$.

Partie C : développement en série de Engel et applications

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers telle que $a_0 \geqslant 2$. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \dots a_k}$$

est convergente de limite inférieure ou égale à $\dfrac{1}{a_0 - 1}$.
Si x désigne la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que x admet un développement en série de Engel. On notera $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$.

2. Soit $x \in \left]0,1\right]$. On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = 1 + \mathrm{E}\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad \text{et} \quad x_{n+1} = a_n x_n - 1 \quad \text{où E désigne la fonction partie entière.}$$

2.1. Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

2.2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2.3. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $a_0 \geqslant 2$.

2.4. En reprenant les notations de la question 1, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \dots a_n}$$

En déduire que x admet un développement en série de Engel.

3. On suppose qu'il existe deux suites distinctes croissantes d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 \geqslant 2$, $b_0 \geqslant 2$ et :

$$[a_0, \dots, a_n, \dots] = [b_0, \dots, b_n, \dots]$$

On pose $n_0 = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_n \neq b_n\right\}$

3.1. Démontrer que $[a_{n_0}, \dots, a_n, \dots] = [b_{n_0}, \dots, b_n, \dots]$.

3.2. Démontrer que si $x = [\alpha_0, \dots, \alpha_n, \dots]$ alors $\alpha_0 x - 1 \leqslant x$ et en déduire que $\alpha_0 = 1 + \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3.3. En déduire l'unicité du développement en série de Engel d'un réel donné dans l'intervalle $]0,1]$.

4. Déterminer le réel dont le développement en série de Engel est associé à :

4.1. une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à c ($c \geqslant 2$).

4.2. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = n + 2$.

4.3. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = (2n+1)(2n+2)$.

5. Déterminer le développement en série de Engel du nombre $\mathrm{ch}(\sqrt{2}) - 2$.

6. Démontrer que $x \in\ ]0,1]$ est rationnel si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de son développement en série de Engel est stationnaire. Pour le sens direct, on pourra commencer par procéder à la division euclidienne du dénominateur de x par son numérateur.

Problème 2 : statistiques et probabilités

Partie A : deux indicateurs de dispersion

En 1801, un astronome italien, Piazzi découvre une nouvelle planète Cérès, qu'il perd bientôt de vue. Le problème posé alors aux scientifiques est le suivant : comment, à partir d'une série de résultats d'observations effectuées par différents astronomes , choisir une valeur qui se rapproche le plus possible de la "vraie position" et prédire ainsi le futur passage de Cérès. Deux options s'affrontent : celle de Laplace, qui propose de minimiser les valeurs absolues des écarts et celle de Gauss et Legendre, qui proposent de minimiser les carrés des écarts.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $(x_1, ..., x_n)$, un n-uplet de réels.
On définit sur $\mathbb{R}$ les deux fonctions G et L par :

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x - x_i\right)^2$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \left|x - x_i\right|$$

1. **Minimisation de G**

1.1. En écrivant $G(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction G admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle valeur de x il est atteint.

1.2. Que représente d'un point de vue statistique la valeur de x trouvée à la question 1.1 ?

2. **Minimisation de L**

On supposera dans cette question que la série est ordonnée, c'est-à-dire que :
$x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n$

2.1. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où :
$n = 3$, $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 4$

2.2. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où :
$n = 4$, $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 7$

2.3. Démontrer que la fonction L admet un minimum m sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint.
On distinguera les cas n pair et n impair.

2.4. Que représentent d'un point de vue statistique les valeurs de x trouvées à la question 2.3 ?

Le 7 décembre 1801, Cérès sera observée à l'endroit prévu par les calculs de Gauss. Il prolongera ce travail en établissant, grâce à la théorie des probabilités, que la répartition des erreurs suit une loi normale.

Partie B : théorie de l'information, le cas discret

La théorie de l'information est un modèle mathématique créé par Claude Shannon en 1948, qui vise à quantifier mathématiquement la notion d'incertitude. Elle a depuis connu des développements aussi bien en statistique qu'en physique théorique ou en théorie du codage.

On se place dans cette partie dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Étant donné un entier naturel non nul n, on considère un système complet d'événements $A = \{A_1, ..., A_n\}$ de probabilités respectives $(p_1, ...p_n)$ toutes non nulles.
On définit l'**entropie** de ce système par le nombre :

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k$$

Ce nombre quantifie l'incertitude, tandis que son opposé quantifie la quantité d'information. L'entropie doit être maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée.

1. **Deux exemples**
   On se place ici dans le cas $n = 4$. Quatre chevaux sont au départ d'une course, et on note A_i l'événement : *Le cheval numéro i remporte la course*. Calculer dans chacun des cas suivants l'entropie du système.
   1.1. $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$
   1.2. $p_1 = \dfrac{1}{8}, p_2 = \dfrac{1}{8}, p_3 = \dfrac{1}{4}, p_4 = \dfrac{1}{2}$
   On va à présent établir la propriété générale suivante :
   l'entropie est maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée, c'est-à-dire lorsqu'il y a équiprobabilité.
2. **Cas $n = 2$**
   On considère un système complet $A = \{A_1, A_2\}$.
   On pose $p_1 = p$ et $p_2 = 1 - p$.
   Démontrer que l'entropie est maximale lorsque les deux événements A_1 et A_2 sont équiprobables.
3. **Cas général**
   3.1. **Un résultat préliminaire : l'inégalité de Jensen**
   Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I. On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

   On considère une fonction f convexe sur I, $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, avec $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$
   Démontrer que :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

On pourra procéder par récurrence sur n, en remarquant que si $\lambda_n \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right)$$

3.2. On admet le théorème suivant :
si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
Démontrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $]0,1[$.

3.3. Démontrer que $H(A) \leqslant \ln n$. Conclure.

Partie C : théorie de l'information, le cas continu

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si f est positive, intégrable sur $\mathbb{R}$, et que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$

Lorsqu'en plus $f \ln f$ est intégrable, on définit l'entropie associée à f par :

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(f(x))\, \mathrm{d}x$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des densités de probabilités qui possèdent une entropie. Le but de cette partie est de déterminer quelle densité maximise l'entropie, c'est-à-dire correspond à la quantité minimale d'information.

1. **Deux exemples**
   On admet que les deux fonctions suivantes sont des densités de probabilité. Calculer l'entropie associée à chacune d'elles.
   1.1. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$
   1.2. h définie par $h(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ si $t \geqslant 0$, $h(t) = 0$ sinon, où λ est un réel strictement positif.
2. **Deux résultats préliminaires**
   2.1. Démontrer que pour tous réels strictement positifs x et y :
   $$x \ln y \leqslant x \ln x + y - x \text{ et } x \ln y = x \ln x + y - x \Leftrightarrow x = y$$
   2.2. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$, avec $a < b$. Démontrer que :
   $$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b], f(x) = 0$$
   On pourra procéder par contraposition.
3. **Une maximisation d'entropie sous contrainte de moyenne et de variance**
   On s'intéresse dans cette question aux fonctions de $\mathscr{H}$ d'espérance nulle et de variance égale à 1, c'est-à-dire telles que :
   - $t \mapsto t f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale nulle
   - $t \mapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1.

   On appelle $\mathscr{N}$ cet ensemble.
   3.1. Démontrer que $g \in \mathscr{N}$, où g désigne la fonction définie à la question 1.1
   3.2. Soit f un élément de $\mathscr{N}$. Démontrer que :
   $$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(g(x))\, \mathrm{d}x = H(g)$$
   3.3. En utilisant les résultats de la question 2, démontrer que :
   - $H(f) \leqslant H(g)$
   - $H(f) = H(g) \Leftrightarrow f = g$

4.1.3 Deuxième composition

Problème 1 : puissances de matrices

Rappels et notations

Étant donnés deux entiers naturels non nuls p et q, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes.
L'ensemble $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ est noté $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et I_p désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
On identifiera par la suite $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^p$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Pour tout entier n, on note $A_n = (a_{ij}(n))_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$.
On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, si pour tout couple (i,j) tel que $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$, la suite $(a_{i,j}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$.
En posant $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{i,j}(n)) = l_{i,j}$ et $L = (l_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$, on dit alors que la matrice L est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = L$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Pour tout entier naturel n, on note A^n la puissance n-ième de la matrice A.
Ce problème a pour but de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Partie A : étude d'un exemple

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 \in \mathbb{R},\, y_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{5}x_n + \dfrac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{3}{5}y_n \end{cases}$$

Dans cette partie, on pose $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de A^n et de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que A puisse s'écrire :
$$A = PDP^{-1}$$
où P désigne la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de A^n en fonction de n.
4. Etablir que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
5. Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer les limites de ces suites en fonction de x_0 et y_0.

Partie B : résultats préliminaires

Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

1. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ qui convergent respectivement vers L et M.
   1.1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n + B_n) = L + M$.
   1.2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha A_n) = \alpha L$.

1.3. Soient $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n B = \alpha B$.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ qui converge vers L.

2.1. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n X = LX$.

2.2. Énoncer sans démonstration un résultat analogue pour la multiplication à droite.

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^p, \lim_{n\to+\infty} A_n X = 0$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$.

Partie C : condition nécessaire

Dans la suite du problème, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ représenté par la matrice A dans la base canonique.
On définit, pour tout entier naturel n, u^n par : $u^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^p}$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$.
On suppose dans cette partie que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Soit λ une valeur propre de u ($\lambda \in \mathbb{C}$).

1.1. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

1.2. On suppose que $|\lambda| = 1$.
Montrer qu'alors $\lambda = 1$. *On pourra considérer* $\left|\lambda^{n+1} - \lambda^n\right|$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

Partie D : condition suffisante

On note $\chi_u(X) = \det(A - XI_p)$ le polynôme caractéristique de u, où det désigne le déterminant de la matrice considérée.

1. Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.

2. En déduire que l'on peut écrire $\chi_u(X) = \det(A - XI_p) = \prod\limits_{i=1}^{p} (\alpha_i - X)$, avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$.

3. Justifier le fait que u admet dans une certaine base $(e_1, ..., e_p)$ une matrice T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & ... & ... & ... \\ & \alpha_2 & ... & ... \\ & & \ddots & ... \\ 0 & & & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

4. On suppose dans cette question que $|\alpha_i| < 1$ pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$.

4.1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_1) = 0$.

4.2. Montrer par récurrence que pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_i) = 0$.

4.3. En déduire la limite de T^n, puis celle de A^n.

5. On note $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres de u, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et $|\lambda_i| < 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant m$.
On suppose également que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

5.1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{C}^p$ stables par u.

5.2. On note u_1 l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ induit par u. Montrer que toute valeur propre de u_1 est une valeur propre de u, distincte de λ_1.

5.3. En remarquant que u_1 vérifie les hypothèses de la question 4, en déduire que A^n converge et déterminer une matrice semblable à sa limite.

Partie E : conclusion et application

1. On note $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres de A, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
   Déduire des questions précédentes que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :
   $$\left\{\begin{array}{l} \forall i \in [\![1, m]\!], |\lambda_i| < 1 \\ \text{ou} \\ \lambda_1 = 1, \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id}) = \{0\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![2, m]\!], |\lambda_i| < 1 \end{array}\right.$$
2. Déterminer si la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, dans chacun des cas suivants :

   2.1. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$

   2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & \dfrac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 + \dfrac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 6 + \dfrac{i}{2} \end{pmatrix}$

Problème 2 : quelques théorèmes d'arithmétique

On démontre dans la partie A un théorème de Lagrange dont on utilise le résultat pour démontrer le théorème de Wilson (partie B) et le théorème de Wolstenholme (partie C).

Partie A : théorème de Lagrange

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

2. Montrer que pour tout entier premier p et tout entier $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
3. Soit p un entier premier impair. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \prod_{k=1}^{p-1}(x+k)$$

3.1. Montrer que pour tout réel x on a :

$$pf(x) = (x+1)f(x+1) - xf(x)$$

3.2. Justifier l'existence d'un p-uplet d'entiers $(a_0, a_1, \cdots, a_{p-1})$ tel que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, x^{p-1-k}$$

3.3. Montrer que $a_0 = 1$ et $a_{p-1} = (p-1)!$

3.4. À l'aide de la question 3.1 et en faisant intervenir le binôme de Newton, montrer que pour tout entier $k \in [\![0, p-1]\!]$ on a :

$$pa_k = \sum_{i=0}^{k}\binom{p-i}{k+1-i}a_i$$

3.5. En déduire que $a_1 = \binom{p}{2}$ et que pour tout entier $k \in [\![2, p-1]\!]$ on a :

$$k\, a_k = \binom{p}{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{p-i}{k+1-i}a_i$$

3.6. En déduire le théorème de Lagrange :

« Si p est un entier premier impair et si $f(x) = \prod_{k=1}^{p-1}(x+k) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, x^{p-1-k}$ alors les coefficients $a_1, a_2, \cdots, a_{p-2}$ sont divisibles par p ». *On pourra raisonner par récurrence.*

Partie B : théorème de Wilson

On se propose de démontrer la propriété suivante, connue sous le nom de « théorème de Wilson » : si p est un entier premier alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

1. Vérifier que la propriété est vraie pour $p = 2$.
2. p est maintenant un entier premier impair.

   2.1. Montrer que :
$$p\,! = 1 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + (p-1)!$$
   (les entiers $a_i, i \in [\![1, p-2]\!]$, sont ceux définis à la question A.3.2)

   2.2. En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.
3. Montrer que la réciproque du théorème de Wilson est vraie.
4. On se propose d'étudier ce que devient le théorème de Wilson pour les entiers non premiers strictement supérieurs à 4.

   4.1. On suppose que $n > 4$ et que la décomposition en produit de facteurs premiers de n comprend au moins deux facteurs premiers distincts. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \pmod n$.

   4.2. On suppose que $n > 4$ et que $n = p^\alpha$ où p est un entier premier et α est un entier strictement supérieur à 2. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \pmod n$.

   4.3. On suppose que $n > 4$ et que $n = p^2$ où p est un entier premier. Montrer que $1 < 2p < n$ et en déduire que $(n-1)! \equiv 0 \pmod n$.

Partie C : théorème de Wolstenholme

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère le rationnel :
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
On désigne par s_n et t_n les deux entiers naturels tels que :
$$H_n = \frac{s_n}{t_n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{pgcd}(s_n, t_n) = 1$$

1. Écrire un algorithme permettant d'obtenir pour n allant de 2 à 10 les entiers s_n et t_n (on supposera qu'on dispose d'une instruction *pgcd(a,b)* qui renvoie le plus grand commun diviseur de deux entiers a et b).
2. Calculer s_4, s_6 et s_{10} et vérifier que ces entiers sont divisibles respectivement par 5^2, 7^2 et 11^2.

Dans la suite, p désigne un nombre premier strictement supérieur à 3. On se propose de démontrer que l'entier s_{p-1} est divisible par p^2 (théorème de Wolstenholme).

3. Montrer que $H_{p-1} = \dfrac{a_{p-2}}{(p-1)!}$ où a_{p-2} est défini comme à la partie A. *On pourra utiliser une relation liant les racines d'un polynôme et l'un de ses coefficients.*
4. Déduire de l'écriture de $f(-p)$ que :
$$a_{p-2} = p^{p-2} - a_1 p^{p-3} + \cdots + a_{p-3} p$$
5. Conclure.

4.2 Sujets de l'épreuve de leçon

L'ensemble de l'épreuve s'inscrit dans le cadre des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de technicien supérieur. La capacité du candidat à illustrer le sujet par des exemples est valorisée.

1. Résolution de problèmes à l'aide de graphes.
2. Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle.
3. Variables aléatoires discrètes.
4. Loi binomiale.
5. Loi de Poisson, loi normale.
6. Variables aléatoires réelles à densité.
7. Lois uniformes, lois exponentielles.
8. Lois normales.
9. Marches aléatoires.
10. Séries statistiques à une variable.
11. Séries statistiques à deux variables numériques.
12. Intervalles de fluctuation.
13. Estimation.
14. Multiples, diviseurs, division euclidienne.
15. PGCD, égalité de Bézout.
16. Nombres premiers, décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
17. Congruences dans Z.
18. Équations du second degré à coefficients réels ou complexes.
19. Module et argument d'un nombre complexe.
20. Exemples d'utilisation des nombres complexes.
21. Calcul vectoriel.
22. Exemples d'utilisation d'un repère.
23. Résolution de problèmes à l'aide de matrices.
24. Proportionnalité et linéarité.
25. Pourcentages.
26. Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations.
27. Droites du plan.
28. Droites et plans de l'espace.
29. Droites remarquables du triangle.
30. Le cercle.
31. Solides de l'espace.
32. Produit scalaire.
33. Théorème de Thalès.
34. Trigonométrie.
35. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle.
36. Problèmes de constructions géométriques.
37. Problèmes de lieux géométriques.
38. Orthogonalité.
39. Suites monotones.
40. Limites de suites réelles.
41. Suites arithmétiques, suites géométriques.
42. Suites de terme général a^n, n^p et $\ln n$ ($a \in \mathbb{R}^{+*}$; $p \in \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{N}^*$).
43. Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence.
44. Problèmes conduisant à l'étude de suites.
45. Limite d'une fonction réelle d'une variable réelle.
46. Théorème des valeurs intermédiaires.
47. Dérivation.

48. Fonctions polynômes du second degré.
49. Fonctions exponentielles.
50. Fonctions logarithmes.
51. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^a$, $x \mapsto \ln x$.
52. Courbes planes définies par des équations paramétriques.
53. Intégrales, primitives.
54. Techniques de calcul d'intégrales.
55. Équations différentielles.
56. Problèmes conduisant à la résolution d'équations différentielles.
57. Problèmes conduisant à l'étude de fonctions.
58. Développements limités.
59. Séries numériques.
60. Séries de Fourier.
61. Transformation de Laplace.
62. Courbes de Bézier.
63. Exemples d'études de courbes.
64. Aires.
65. Exemples d'algorithmes.
66. Exemples d'utilisation d'un tableur.
67. Exemples d'utilisation d'un logiciel de calcul formel.
68. Différents types de raisonnement en mathématiques.
69. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.

4.3 Énoncés de l'épreuve sur dossier

4.3.1 Exercice

Thème : algorithmique

L'exercice

Une équipe de statisticiens propose les modèles suivants pour comparer l'évolution future de la population française et de la population allemande.

- On note u_n la population de l'Allemagne estimée en millions d'habitants au 1er janvier de l'année $2010+n$. On a alors $u_0 = 81,2$ et $u_{n+1} = 0,998 \times u_n + 0,2$.
- On note v_n la population de la France estimée en millions d'habitants au 1er janvier de l'année $2010+n$. On a alors $v_0 = 63,2$ et $v_{n+1} = 1,002 \times v_n + 0,1$.

1. Écrire un algorithme donnant l'année à partir de laquelle la différence entre la population de l'Allemagne et celle de la France sera inférieure à quinze millions et donner le résultat.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = -18,8 \times 0,998^n + 100$ et $v_n = 113,2 \times 1,002^n - 50$
3. Retrouver le résultat de la question 1.

Les réponses proposées par deux élèves à la question 1

Élève 1

Dans la calculatrice, mode suite, u_n en première colonne, v_n en 2ème colonne , $v_n - u_n$ en 3ème colonne , la différence est inférieure à 15 millions à partir de la 16ème année.

Élève 2

variables : N *et* D
début
  $18 \rightarrow D$;
  $0 \rightarrow N$;
  tant que $D > 15$ **faire**
    $0,004 \times D + 0,1 \rightarrow D$;
    $N+1 \rightarrow N$;
  fin
  sorties : *Afficher* D *et* N.
fin

Mon algorithme ne marche pas car je trouve un an.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses compétences dans le domaine de l'algorithmique.

2- Exposez une correction des questions 2 et 3 comme vous le feriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Proposez deux ou trois exercices faisant appel à des algorithmes.

Thème : loi binomiale

L'exercice

Un homme se présente dans un village gaulois et se déclare devin.
Les habitants sceptiques lui proposent un test au cours duquel il devra deviner les résultats de dix lancers d'une pièce équilibrée. Il donne huit fois la bonne réponse.

a) On suppose que les réponses sont données au hasard.
Calculer dans ce cas la probabilité de trouver huit bonnes réponses.

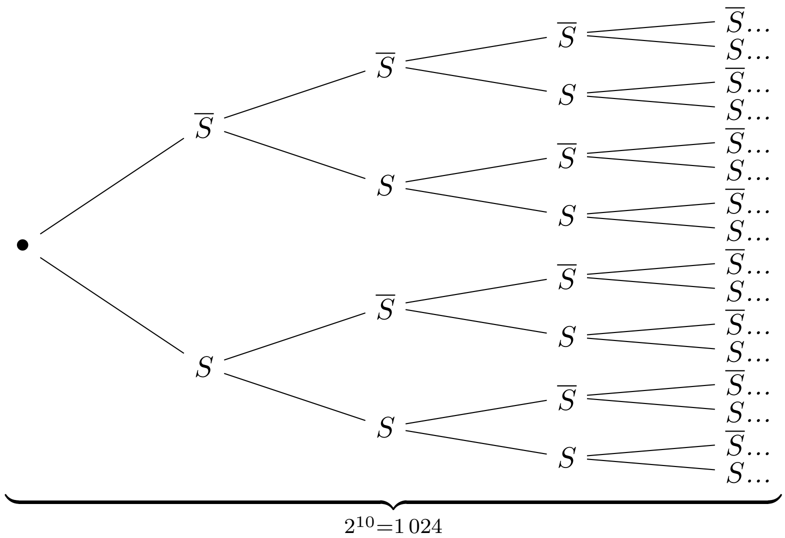
b) Les habitants du village devraient-ils croire aux pouvoirs du devin ?

Source : d'après manuel Hyperbole Première S (Nathan 2011)

Les réponses proposées par deux élèves de première S.

Élève 1

a) $p(X = 8) = \dfrac{8}{1\,024} = \dfrac{1}{128}$
b) Oui, ils peuvent croire le devin car il y a une chance sur 128 que ce soit un faux devin.



Élève 2

a) X *= nombre de succès donc* X *suit la loi binomiale.*

$p(X = 8) = \dbinom{10}{8} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \approx 0{,}04$

b) Ils peuvent donc le croire puisque la probabilité d'obtenir 8 bonnes réponses sur 10 est faible. Il peut aussi y avoir une marge d'erreur, le devin a fait un seul essai, cela peut fluctuer. Il faudrait savoir si on est dans l'intervalle de fluctuation

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de ces élèves, notamment par rapport à la notion de fluctuation.

2- Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez pour des élèves de première S.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *Loi binomiale*, dont l'un au moins nécessite la mise en œuvre d'une simulation sur tableur.

Thème : calculs d'aires et de longueurs

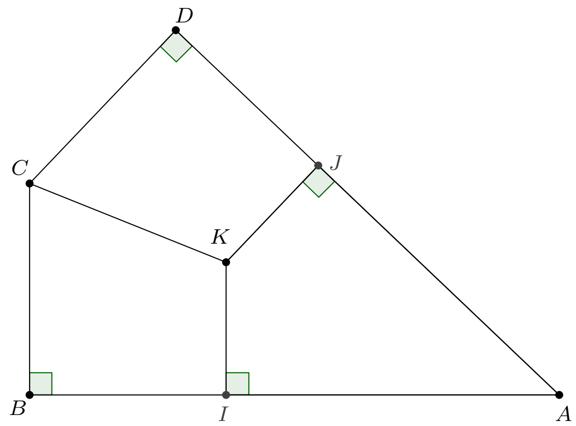
L'exercice

Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que

- les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont droits,
- le point C appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$,
- $AB = 50$ mm et $BC = 20$ mm.

Soient I, J, K tels que :

- les points C, K, A sont alignés,
- les points I et J appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AD]$,
- les triangles AKI et AJK sont rectangles respectivement en I et J.



1. Déterminer la position de I sur le segment $[AB]$ telle que les quadrilatères $AJKI$, $BIKC$ et $CKJD$ aient même aire.
2. Démontrer que les droites (BD) et (IJ) sont parallèles.

La réponse proposée par deux élèves de troisième à la question 1

Élève 1

D'après le théorème de Thalès, comme $(IK)//(BC)$, on a $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{IK}{BC}$, donc $\dfrac{x}{50} = \dfrac{IK}{20}$, donc $IK = \dfrac{2}{5}x$. On obtient donc Aire $AIJK = 2 \times \dfrac{x \times \dfrac{2x}{5}}{2} = \dfrac{2x^2}{5}$.

Donc Aire $IBCK = \dfrac{20 \times 50}{2} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x^2}{5} = 500 - \dfrac{x^2}{5}$. On résout $\dfrac{2x^2}{5} = 500 - \dfrac{x^2}{5}$. On a $\dfrac{3x^2}{5} = 500$, d'où $x^2 = \dfrac{2500}{3}$. Donc $x = \dfrac{50}{\sqrt{3}}$.

Élève 2

L'aire du triangle IKA doit être égale à la moitié de l'aire du trapèze $IBCK$, donc au tiers de l'aire du triangle ABC. Le coefficient de réduction k qui fait passer de ABC à IKA vérifie $k^2 = \dfrac{1}{3}$ donc $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. On doit placer I à $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ de AB.

Le travail à exposer devant le jury

1- a) Quels sont les acquis de l'élève 1 dans le domaine du calcul algébrique et de la géométrie ?
   b) Citez deux propriétés de la figure auxquelles l'élève 2 fait explicitement référence. Sa conclusion vous parait-elle correcte ?

2- Exposez une correction de la question 2 comme vous le feriez devant une classe de troisième.

3- Proposez deux ou trois exercices mettant en jeu des calculs d'aires et de longueurs, dont l'un au moins peut amener à utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

Thème : optimisation

L'exercice

Dans un plan, parmi les triangles rectangles ayant une hypoténuse de 8 cm, en existe-t-il ayant un périmètre supérieur ou égal à tous les autres ?

Les solutions proposées par deux élèves

Élève 1

Pour calculer un périmètre, on additionne les côtés du triangle.
Pour savoir répondre à cette question, nous allons utiliser le théorème de Pythagore.
Dans le triangle ABC rectangle en A, $[BC]$ est l'hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore :
Si $AC = 1$, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. donc $8^2 = AB^2 + 1^2$. Donc $64 - 1 = AB^2$, $63 = AB^2$, $\sqrt{63} = AB$.
Donc $P = BC + AB + AC = 8 + \sqrt{63} + 1 = 16{,}9$.
Je continue pour d'autres valeurs pour $[AC]$, et je trouve que le maximum est atteint pour $AC = 5{,}6$ et que AB vaut alors $\sqrt{32{,}64}$ et que le périmètre $P = 19{,}313$.

Élève 2

On appelle ABC le triangle rectangle en A. Si on pose $AC = x$, x appartient à l'intervalle $]0;8[$ car x est compris dans le triangle mais ne peut pas être plus long que l'hypoténuse. On sait que $CB = 8$ et $AC = x$. J'utilise le théorème de Pythagore pour déterminer la valeur BA. Donc $CB^2 = AC^2 + BA^2$. D'où $BA^2 = 8^2 - x^2$. D'où $BA = \sqrt{8^2 - x^2}$. Le périmètre du triangle vaut donc $f(x) = \sqrt{8^2 - x^2} + 8 + x$.
Je ne sais pas étudier les variations de cette fonction, mais quand je fais la figure sous geogebra, je vois que quand le triangle est isocèle, il a une aire plus grande que les autres.

Le travail à exposer devant le jury

1- a) En quoi la démarche de l'élève 1 est-elle pertinente ? Comment le professeur pourrait-il l'aider à aller au bout de cette démarche ?

   b) Mettez en évidence les acquis de l'élève 2.

2- Exposez une correction de cet exercice comme vous le feriez devant une classe de terminale S.

3- Proposez deux autres exercices d'optimisation en précisant les niveaux auxquels vous les situez.

Thème : arithmétique

L'exercice

Pour tout entier relatif n, on considère les entiers a et b suivants :
$a = n^3 - 2n + 5$ et $b = n + 1$

1. Démontrer que $PGCD(a, b) = PGCD(b, 6)$.
2. Déterminer les valeurs de n telles que $PGCD(a, b) = 3$.
3. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles b divise a.

Les solutions proposées par quatre élèves de terminale scientifique.

Élève n° 1

2. $PGCD(b, 6) = 3$, donc b est un multiple de 3 et $n = 3k + 2$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Élève n° 2

2. $PGCD(b, 6) = 3$, donc $b = 3(2k + 1)$, soit $n = 6k + 2$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Élève n° 3

3. J'ai rentré sur le tableur les valeurs de n de 0 à 100, puis les formules de a et b et $\frac{a}{b}$. Les seules valeurs pour lesquelles on a un entier sont $n = 0$ et $n = 2$ et $n = 5$.

Élève n° 4

3. Ma calculatrice formelle me donne que $a = (n^2 - n - 1) \times b + 6$. Le reste de la division n'est jamais nul, donc b ne divise jamais a.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de ces élèves, en mettant en évidence les compétences acquises dans le domaine de l'arithmétique.

2- Exposez une résolution de la question 3 de cet exercice comme vous le feriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *arithmétique* dont l'un au moins amène à formuler une conjecture.

Thème : intégration d'un outil logiciel

L'exercice

On se propose de démontrer de deux façons différentes que pour tous réels x, y et z :

$$x + y + z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$$

1. Soient a, b, c, x, y et z des réels.
   a) Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants :

```
1 A:=(a^2+b^2+c^2)*(x^2+y^2+z^2)
                                   (a^2+b^2+c^2)*(x^2+y^2+z^2)
2 B:=(a*x+b*y+c*z)^2+(a*y-b*x)^2+(b*z-c*y)^2+(c*x-a*z)^2
                  (a*x+b*y+c*z)^2+(a*y-b*x)^2+(b*z-c*y)^2+(c*x-a*z)^2
3 simplify(A-B)
                                   0
```

   b) En déduire que pour tous réels a, b, c, x, y et z, on a :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (ax + by + cz)^2$$

   c) Conclure.
2. Soit un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z = 1$.
   a) Calculer la distance du point O au plan $\mathcal{P}$.
   b) Soit $R(x, y, z)$ un point de l'espace. Retrouver géométriquement la propriété démontrée à la question 1.c).
3. La propriété ainsi démontrée est-elle une équivalence ?

Un extrait des programmes de terminale scientifique

L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation. En particulier, lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel limite le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.
L'utilisation de ces outils intervient selon trois modalités :
- *par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective ;*
- *par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;*
- *dans le cadre du travail personnel des élèves hors de la classe.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Comparez les compétences mobilisées par chacune des deux méthodes.
2- Exposez une correction des questions 2 et 3 comme vous le feriez avec une classe de terminale scientifique.
3- Proposez deux ou trois exercices de niveau collège ou lycée, justifiant le recours à des logiciels différents.

Thème : optimisation

L'exercice

À partir de l'extrait de manuel donné ci-dessous, un professeur a proposé l'exercice suivant à ses élèves.

1. Construire à l'aide d'un logiciel un triangle ABC de hauteur $[AH]$, où H est sur le segment $[BC]$, tel que $AH = 4$, $CH = 3$ et $BH = 4$.
2. a) Placer un point M sur le segment $[AC]$, et afficher la longueur BM.
   b) Chercher pour quelle position du point M la distance BM est minimale. Quelle est alors la nature du triangle ABM ? Pouvait-on le prévoir ?
3. Déterminer la valeur exacte de la distance AM lorsque BM est minimale.

D'après le manuel Symbole seconde (Belin 2010)

On se place dans un triangle ABC. On désigne par H le pied de la hauteur issue de A, et on suppose que $AH = 4$ cm, $CH = 3$ cm et $BH = 4$ cm. Par un point M du segment $[AC]$, on fait passer une droite parallèle à (AH) qui coupe (CH) en N. On désigne par x la longueur du segment $[AM]$ (en centimètres).

1. a) *Calculer la longueur AC.*
   b) *Quelles sont les valeurs possibles de la variable x ?*
   c) *Exprimer la longueur CM en fonction de x.*
2. a) *Démontrer, grâce au théorème de Thalès, que $MN = 4 - \frac{4}{5}x$.*
   b) *Démontrer, grâce au théorème de Thalès, que $CN = 3 - \frac{3}{5}x$.*
3. *En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que : $MB^2 = x^2 - \frac{8}{5}x + 32$.*
4. *À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, déterminer les valeurs de MB^2 lorsque x varie de 0 à 5 de $0{,}1$ en $0{,}1$. Quelle semble être la valeur de x qui rend la quantité MB^2 minimale ?*
5. *Démontrer, en la développant, l'expression suivante : $MB^2 = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{784}{25}$.*
6. *On pose, pour $x \in [0; 5]$: $f(x) = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{784}{25}$.*
   a) *Déterminer le tableau de variation de f.*
   b) *En quelle valeur de x la fonction f atteint-elle son minimum ? Que vaut ce minimum ?*
   c) *En déduire la valeur exacte de la distance AM lorsque BM est minimale.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Comparez les compétences mobilisées dans chacune des deux versions de l'exercice.

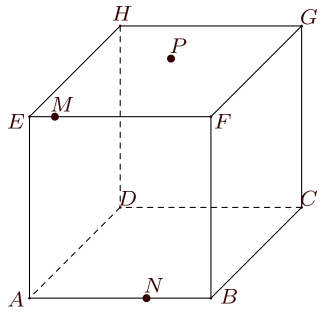
2- Exposez une correction de la question 6 de l'exercice du manuel tel que vous le feriez devant une classe de seconde.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation*.

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

Le cube $ABCDEFGH$ est représenté en perspective cavalière sur la figure ci-contre.
– M est un point de l'arête $[EF]$.
– N est un point de l'arête $[AB]$.
– P est un point de la face $EFGH$.

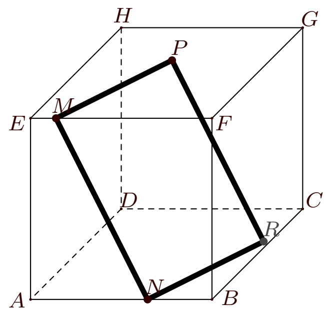


1. Construire l'intersection du plan (MNP) avec la face $ABFE$.
2. Construire l'intersection du plan (MNP) avec la face $EFGH$.
3. Construire la section de ce cube par le plan (MNP).

Les réponses proposées par deux élèves.

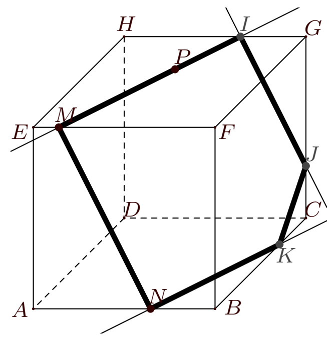
Élève 1

1. L'intersection de MNP avec la face ABFE est MN.
2. L'intersection de MNP avec la face EFGH est MP.
3. L'intersection du cube avec un plan est un parallélogramme donc après avoir construit les segments $[MP]$ et $[MN]$ j'ai terminé la construction en ajoutant le point R tel que $MNRP$ soit un parallélogramme.



Élève 2

1. La droite (MN) parce que M et N appartiennent au plan et au cube.
2. Le segment [MP] parce que M et P appartiennent au plan et au cube.
3. La droite (MP) coupe la droite HG en I.
L'intersection du plan MNP avec la face $HGCD$ est parallèle à MN.
J'obtiens un point J et un point K. L'intersection entre le cube et le plan (MNP) est la figure $MNKJI$.



Le travail à exposer devant le jury

1- a) Quels sont selon vous les acquis de l'élève 1 dans le domaine de la géométrie dans l'espace ?
   b) Explicitez les différentes propriétés que l'élève 2 utilise sans les nommer à chacune des étapes de sa démonstration.
2- Proposez une correction de la question 3 de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.
3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie dans l'espace*.

Thème : matrices

L'exercice

Dans une réaction chimique impliquant deux composés A et B, on sait qu'à chaque minute, 60 % du composé A ne réagit pas, le reste se transformant en B, tandis que seul 30 % du composé B se transforme en A. Aucun autre composé n'est produit lors de la réaction. On considère deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) donnant les quantités en grammes des composés n minutes après le début de la réaction, la masse totale des deux composés étant de 900 grammes.

1. Dans cette question seulement, on suppose qu'on dispose au départ de 450 grammes de composé A.
   a) À l'aide d'un tableur, préparer sur une feuille de calcul trois colonnes intitulées respectivement n, (u_n) et (v_n).
   b) Entrer en deuxième ligne les valeurs initiales de n, (u_n) et (v_n).
   c) Compléter les cellules de la troisième ligne pour pouvoir, par recopie, simuler l'évolution des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n.
   d) En déduire u_{20} et v_{20}.
2. Après 3 minutes d'expérience, un dosage fait apparaitre que la masse du composé A est en fait de 378 grammes. En procédant par essais et erreurs, retrouver les masses initiales de chaque composé en début de réaction.

Un extrait du manuel Odyssée terminale S spécialité (Hatier 2012)

Dans une réaction chimique impliquant deux composés A et B, on sait qu'à chaque minute, 60 % du composé A ne réagit pas, le reste se transformant en B, tandis que seul 30 % du composé B se transforme en A. Aucun autre composé n'est produit lors de la réaction. On considère deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) donnant les proportions des composés n minutes après le début de la réaction (n entier positif).

On note P_n la matrice colonne égale à $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que $P_{n+1} = MP_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on explicitera. En déduire que $P_n = M^n P_0$.*
2. *a) Montrer que la matrice M est inversible, donner son inverse M^{-1}.*
   b) Àprès 3 minutes d'expérience, un dosage fait apparaitre que la proportion de composé A est 42 %.
   Retrouver les proportions initiales de chaque composé en début de réaction.

Le travail à exposer devant le jury

1- Comparez les compétences développées par les deux versions de l'exercice.

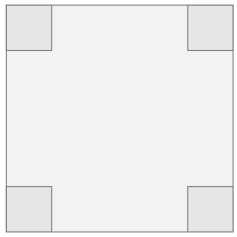
2- Exposez une correction de la question 2 de l'exercice du manuel comme vous le feriez devant une classe de terminale S.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *matrices*.

Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice

ABCD est un carré de côté 10 cm. On enlève un même carré à chaque coin de ABCD pour obtenir le patron d'une boîte. Comment obtenir une boîte dont le volume sera maximal ? Expliquez votre démarche même si elle n'aboutit pas.



Les démarches de trois élèves de seconde

Élève 1

Il faut trouver une longueur, une largeur et une hauteur puis les multiplier.
Avec une longueur de 6 cm et une largeur de 6 cm, on a une hauteur de 2 cm et le volume est égal à 72 cm^3.
Avec une longueur de 4 cm et une largeur de 4 cm, on a une hauteur de 3 cm et le volume est égal à 48 cm^3.
En essayant d'autres valeurs, on trouve un volume maximal de 72 cm^3.

Élève 2

Je procède par tâtonnements :
$2\times 6\times 6 = 72$; $1{,}5\times 7\times 7 = 73{,}5$; $1{,}75\times 6{,}5\times 6{,}5 = 73{,}9375$; $1{,}7\times 6{,}6\times 6{,}6 = 74{,}052$.
Mais on ne connaît pas le maximum, on pourra toujours trouver plus. Il faudrait tracer une courbe sur la calculatrice. La formule est $(10-2x)\times(10-2x)\times x$.
D'après la courbe de cette fonction, le maximum est $74{,}0740741$ *pour* $x = 1{,}66666666$.

Élève 3

Je procède par raisonnement. Le volume maximal doit correspondre à une forme particulière. Comme la boîte est un pavé, la seule forme particulière est un cube. Il faut donc retirer exactement $\dfrac{10}{3}$ *cm, pour un volume de* $\dfrac{1000}{27}\approx 37{,}04\,cm^3$

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et l'origine de ses éventuelles erreurs. Comment l'élève 2 a-t-il pu obtenir ces valeurs finales ?

2- Proposez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe.

3- Présentez deux ou trois exercices *avec prise d'initiative*.

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 5 - t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 4 - 3t' \\ y = 5 - 8t' \quad t' \in \mathbb{R} \\ z = 7 - t' \end{cases}$$

1. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles coplanaires ?
2. Vérifier que le point $A(2, 3, 5)$ est un point de $\mathcal{D}$. Soit M', un point quelconque de $\mathcal{D}'$. Quel est le lieu du point I, milieu de $[AM']$, lorsque M' décrit la droite $\mathcal{D}'$?
3. On considère un point M de $\mathcal{D}$ et un point M' de $\mathcal{D}'$. Quel est le lieu du milieu du segment $[MM']$ quand M et M' décrivent respectivement les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$?

Les réponses d'un élève de terminale S

1. Pour savoir si les droites se coupent, on cherche un point d'intersection :

$$\begin{cases} 2 + t = 4 - 3t \\ 3 - 2t = 5 - 8t \\ 5 - t = 7 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{1}{3} \\ 5 = 7 \end{cases}$$

cela étant impossible $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas sécantes donc elles sont non coplanaires.

2. Le point $A(2, 3, 5)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$. Je cherche le milieu avec un point de $\mathcal{D}'$, je l'appelle I.
On trouve $I\,(3 - 1{,}5t\,; 4 - 4t\,; 6 - 0{,}5t)$. On trouve que I est sur une droite.

3. Comme c'est le même raisonnement même si on avait pris un autre point A, on obtient que l'ensemble cherché est une droite.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de l'élève, en mettant en évidence ses connaissances dans le domaine de la géométrie dans l'espace.

2- Proposez une correction des questions 2 et 3 comme vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez plusieurs exercices sur le thème *géométrie dans l'espace*.

Thème : fonctions et inéquations

L'exercice

Étant donné un repère orthonormal du plan, on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x + p$ où p désigne un nombre réel quelconque.
Étudier en fonction du réel p les positions respectives de la parabole $(\mathcal{C})$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Les comptes rendus de deux élèves de première S.

Élève 1

Avec un logiciel, nous avons tracé la parabole et la droite d'équation $y = 2x + p$ pour plusieurs valeurs de p et nous avons remarqué que lorsque p vaut -1, la droite est tangente à la courbe et la parabole est au dessus de la droite ; lorsque p est entre $-\infty$ et -1, la droite est en dessous de la parabole. Dans les autres cas la droite coupe la courbe en deux points et la courbe est d'abord au-dessus de la droite, passe en dessous et revient encore au-dessus.

Élève 2

Nous cherchons quand la parabole est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$. Nous devons alors résoudre :

$$x^2 > 2x + p \Leftrightarrow x^2 - 2x - p > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 - p > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > p + 1$$

Quand $p \geqslant -1$, c'est faux. Quand $p < -1$, cela fonctionne. Ainsi quand $p < -1$, la parabole est au dessus de la droite.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions des deux élèves. Quelles compétences peut-on déceler et quelles sont celles qu'il convient de développer ?

2- Exposez une correction de l'exercice telle que vous le feriez devant une classe de première S.

3- Présentez deux ou trois problèmes sur le thème *fonctions*, dont l'un au moins amène à résoudre une inéquation.

Thème : algorithmique

L'exercice

1. Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure en radian est :
   a) $\dfrac{9\pi}{4}$
   b) $\dfrac{34\pi}{3}$.
2. Proposer un algorithme en langage naturel permettant de déterminer la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure en radian est $\dfrac{a\pi}{b}$ où a et b sont des entiers strictement positifs.
3. Tester cet algorithme avec les valeurs de la question 1.

La réponse proposée par un élève de première S à la question 2

```
début
    entrées  : a et b
    variables  : r
    tant que r > b faire
        r − 2b → r ;
    fin
    sorties  : r et b
fin
```

La mesure principale est $\dfrac{r\pi}{b}$.

Le travail à exposer devant le jury

1- De quels acquis témoigne la production de l'élève dans le domaine de l'algorithmique ? dans le domaine de la trigonométrie ?

2- Exposez une correction des questions 1 et 2 de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de première scientifique.

3- Proposez deux ou trois exercices faisant appel à des algorithmes.

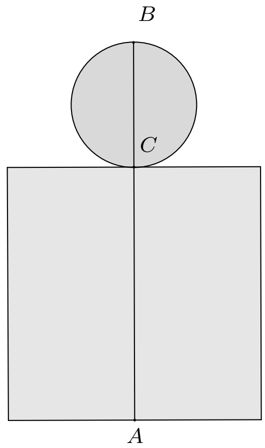
Thème : optimisation

L'exercice

À partir d'un segment $[AB]$ de longueur 10 cm et d'un point C variable sur ce segment, on construit un « bonhomme » comme visualisé sur le schéma ci-contre :

- la tête est le disque de diamètre $[BC]$;
- le tronc est un carré dont les côtés ont pour longueur AC.

Déterminer la position du point C sur le segment $[AB]$ pour que l'aire totale de cette figure soit minimale.



La réponse proposée par un élève de seconde

Pour construire mon bonhomme j'ai utilisé un logiciel de géométrie.
J'ai fait afficher l'aire du disque qui s'appelle airec, parce que mon cercle s'appelle c.
J'ai demandé d'afficher aussi l'aire du carré (mon carré s'appelle poly1) et je me suis aperçu que ce n'était pas la peine parce que c'est ce qui est affiché dans la fenêtre algèbre pour poly1.
J'ai enfin affiché la longueur BC.
Ensuite, j'ai essayé d'utiliser ce que vous nous aviez montré une fois en classe au début de l'année. J'ai crée un point M = (BC , airec + poly1). J'ai eu du mal à le trouver au début, parce qu'il était trop haut dans le repère. J'ai adapté mes axes puis j'ai utilisé la fonction « trace activée » pour le point M. En déplaçant C sur le segment [AB], j'ai vu que M se déplaçait sur une courbe qui ressemble à une parabole.
J'ai cherché le point le plus bas en ajustant l'échelle. J'ai trouvé que c'était pour $x = 5,6$. Je pense que la précision suffit parce qu'on ne peut pas tellement faire mieux qu'au millimètre près.
Donc l'aire du bonhomme est minimale pour BC = 5,6 cm. Elle est égale à 44 cm^2.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de l'élève en mettant en évidence les compétences qu'il a acquises.

2- Proposez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de lycée se situant au niveau de votre choix.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation*, dont l'un au moins peut amener à utiliser un logiciel pendant la phase de recherche.

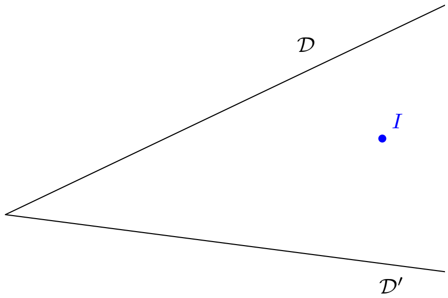
Thème : géométrie plane

L'exercice

On dispose d'une carte de l'île au trésor. Deux indices essentiels sont cachés en deux points A et B. Hélas, A et B ont été effacés de la carte. On sait juste que :

- A est sur $\mathcal{D}$;
- B est sur $\mathcal{D}'$;
- I est le milieu du segment $[AB]$.

Saurez-vous retrouver les points A et B ?



La réponse proposée par trois élèves de quatrième

Élève 1

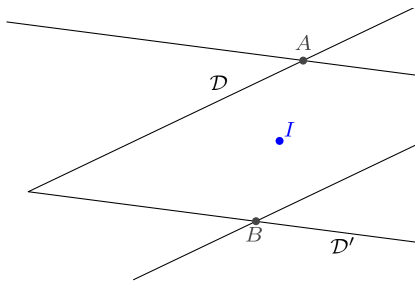
J'ai utilisé la règle graduée. J'ai fait glisser jusqu'à ce que la distance soit la même entre A et I et entre I et B.

Élève 2

J'ai fait un autre dessin avec les points A et B déjà mis et j'ai appelé O le point où $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{D}'$. J'ai appelé J le milieu de AO. J'ai remarqué que la droite (IJ) est parallèle à $\mathcal{D}'$. Il ne reste plus qu'à agrandir la figure pour que ça se superpose avec la carte de l'énoncé.

Élève 3

Comme c'est le chapitre symétrie, j'ai fait le symétrique de $\mathcal{D}$ et le symétrique de $\mathcal{D}'$. Ça marche !



Le travail à exposer devant le jury

1- De quels acquis témoignent les productions des trois élèves dans le domaine de la géométrie plane ?

2- Exposez une correction de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de quatrième, prenant en compte les productions des élèves.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*, dont l'un au moins peut conduire à utiliser un logiciel de géométrie.

Thème : suites

L'exercice

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\,u_n - 2n + 3$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
2. En déduire les variations et la limite de la suite (u_n).
3. Construire un algorithme qui prend en entrée un réel A strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > A$.

Les réponses proposées par deux élèves à la question 1

Élève 1

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n$.

– *Initialisation* : $u_0 \geqslant 0$ *donc* $\mathcal{P}_0$ *est vraie.*

– *Hérédité* : *On suppose* $\mathcal{P}_k$ *vraie c'est-à-dire* $u_k \geqslant k$

Alors $u_{k+1} \geqslant k \Leftrightarrow 3u_k - 2k + 3 \geqslant k \Leftrightarrow 3u_k + 3 \geqslant 3k \Leftrightarrow u_k \geqslant k$

– *Bilan* : $\mathcal{P}_0$ *est vraie, et pour tout* k $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$. *Donc* $\mathcal{P}_n$ *est vraie pour tout* n.

Élève 2

– *Initialisation* : *La propriété est vraie au rang* 0.

– *Hérédité* : *On suppose que* $\mathcal{P}_n$, *la propriété* : $u_n \geqslant n$ *est vraie pour tout* n.

On étudie $\mathcal{P}_{n+1}$:

$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 = 3(u_n + 1) - 2n$

Or $u_n \geqslant n$, *donc* $u_n + 1 > n$, *donc* $3(u_n + 1) > 3n$ *et* $3(u_n + 1) - 2n > n \Leftrightarrow u_{n+1} > n$

u_{n+1} *est strictement supérieur à* n, *donc* $u_{n+1} \geqslant n + 1$.

La propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

– *La propriété est donc héréditaire. De plus elle est initialisée au rang* 0, *donc* $\mathcal{P}_n$ *est vraie pour tout* n.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production des deux élèves en mettant en évidence les compétences acquises en matière de raisonnement par récurrence.

2- Exposez une correction des questions 2 et 3 de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale S.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *suites* dont l'un au moins nécessite une modélisation.

Thème : prise de décision

L'exercice

Une société commercialise des pochettes surprises et affirme que 77 % d'entre elles sont des pochettes bonus, donnant droit à un cadeau.
Afin de vérifier cette affirmation, un organisme de contrôle effectue un tirage aléatoire dans les stocks de l'entreprise (compte tenu de la taille des stocks, ce tirage peut être assimilé à un tirage avec remise). Cet organisme constate que sur les 1000 pochettes choisies aléatoirement, 740 sont des pochettes bonus.
D'après vous, l'organisme doit-il, au vu de ce constat, conduire d'autres investigations pour savoir si l'entreprise n'a pas produit moins de pochettes bonus qu'annoncé ?

Les réponses proposées par trois élèves de première

Élève 1

J'ai trouvé $I = [0{,}738; 0{,}802]$ *en appliquant la formule de l'an dernier. Puisque* $0{,}740 \in I$, *je peux d'après le cours affirmer que les différences ne sont dues qu'au hasard. Il n'y a pas d'inquiétude à avoir.*

Élève 2

J'ai effectué une simulation sur tableur. Pour simuler le test du tirage d'une pochette avec une probabilité de $p = 0{,}77$ *que ce soit une pochette bonus j'ai entré la formule qu'on avait vu en séance info et j'ai tiré vers le bas et vers la droite pour créer* 100 *simulations de* 1000 *tirages.*
Sur 100 *simulations de* 1000 *tirages, 97 m'ont donné une fréquence de pochettes bonus supérieure à* 0,75*. Or, on a trouvé une fréquence de seulement* 0,74*. Ce n'est pas normal, il faut rapidement faire une enquête.*

Élève 3

J'ai appelé X *une loi binomiale de paramètres* $(1000\,; 0{,}77)$*. Avec le tableur, j'ai déterminé comme dans le cours le plus petit entier* a *tel que* $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ *et le plus petit entier* b *tel que* $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$*. J'ai ainsi abouti à l'intervalle* $I = [0{,}744; 0{,}796]$*. Puisque* 0,740 *n'est pas dans* I*, je rejette l'hypothèse « après le test, p vaut toujours* 0,77 *»et je conseille de faire une enquête.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises.

2- Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez dans une classe de première S, en prenant en considération les différentes stratégies mises en œuvre par les trois élèves.

3- Proposez deux ou trois autres exercices sur le thème *prise de décision*, dont l'un au moins pourra donner lieu à une simulation sur tableur.

4.3.2 Agir en fonctionnaire de l'État

Thème : culture scientifique

Exposé du cas

Vous êtes nommé dans un collège rural isolé. Le principal demande aux enseignants d'élaborer, dans le cadre du projet d'établissement, un ou plusieurs projets visant à stimuler le goût pour les sciences et la technologie et à développer la culture scientifique et technique des élèves.

Question

Quelles propositions pourriez-vous faire pour répondre à cette demande ?

Documentation fournie avec le sujet

Document : circulaire du ministère de l'Éducation nationale 2011-038 du 4 mars 2011, « une nouvelle ambition pour les sciences et les technologies à l'École »

[...] Les dernières évaluations nationales et internationales font apparaître une baisse des compétences des élèves en mathématiques. En outre, si la curiosité naturelle des enfants pour les sciences se développe à l'école, elle tend à s'émousser au collège. Au sortir du lycée, les flux d'élèves qui s'orientent vers les filières scientifiques et techniques sont insuffisants au regard des besoins de l'économie. Notre système éducatif doit ainsi relever un double défi : redonner, d'une part, toute sa place aux sciences et à la technologie dans la culture de l'élève, et susciter, d'autre part, l'appétence pour les filières et les métiers scientifiques et techniques afin de garantir les flux de chercheurs, d'ingénieurs et de techniciens dont le pays a et aura besoin. Cette nouvelle ambition pour les sciences et les technologies à l'École doit également permettre l'éveil des talents particuliers et conduire les élèves qui le souhaitent vers des filières scientifiques et technologiques d'excellence.[...]

Chaque collège est invité à construire et à développer un projet collectif de sciences et technologies. Les projets de classe ou d'établissement, transversaux et pluridisciplinaires, seront mis en place en lien étroit avec les acteurs du monde scientifique et technologique, sans oublier ceux du monde associatif.
Pour ce faire, les équipes pédagogiques pourront utilement s'appuyer sur des concours ou des actions éducatives mises en place avec des partenaires de l'École. L'ensemble de ces dispositifs fait l'objet d'un suivi par les corps d'inspection territoriaux et les délégations académiques à l'éducation artistique et à l'action culturelle (DAAC).

Thème : relations avec les familles

Exposé du cas

Les programmes de mathématiques de lycée préconisent l'intégration des techniques d'information et de communication pour l'enseignement (TICE) dans les différentes composantes de l'activité mathématique.
Vous avez proposé à vos élèves un devoir à la maison dont une partie nécessite un recours au tableur. Vous leur avez demandé de vous transmettre la feuille de calcul qu'ils ont réalisée à une adresse électronique que vous leur avez indiquée.
Des parents vous signifient qu'il n'est pas question que leur enfant vous transmette ainsi le devoir demandé, au prétexte d'une communication par internet.

Question

Comment réagissez-vous face à cette situation et comment comptez-vous répondre ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : extrait du préambule du programme de mathématiques de la classe de seconde, juin 2009

Utilisation d'outils logiciels.
L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, ouvre largement la dialectique entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement. L'utilisation régulière de ces outils peut intervenir selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective adapté ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors du temps de classe (par exemple au CDI ou à un autre point d'accès au réseau local).

Document 2 : extrait du rapport de l'inspection générale sur la place et le rôle des parents à l'école, octobre 2006.

[...] En effet, les difficultés du dialogue et les réticences des enseignants à rencontrer les parents sur le seul terrain qui pourtant intéresse véritablement ceux-ci, à savoir le domaine pédagogique, pourront être surmontés dans le cadre d'un projet qui, en rupture avec ce qu'on dit être la culture dominante de l'école et des enseignants vise à instaurer une culture de l'ouverture, de la confiance et du dialogue avec les parents d'élèves.
Les familles, rappelons-le, sont en droit de disposer de toute l'information possible sur la classe que fréquente leur enfant : objectifs, programmes, méthodes (y compris celles de l'enseignant).
Il faut aussi clarifier les attentes des enseignants vis-à-vis des parents, leur préciser les modalités de suivi du travail des élèves, les formes d'alerte et de signalement des difficultés pédagogiques, bref répondre à toutes les questions que se pose légitimement la famille.
Ceci permettra en retour d'être au clair sur les limites des sujets de débat, et d'éviter les interférences ou empiètements sur le champ professionnel de l'enseignant, dont la liberté pédagogique, dans notre système éducatif, n'a pas à être questionnée par les parents d'élèves.

Thème : liaison lycée enseignement supérieur

Exposé du cas

Dans le lycée dans lequel vous êtes nommé, le proviseur fait le bilan de l'orientation post-baccalauréat de l'année précédente. Il constate que 44% des élèves de terminale des séries générales ont émis un premier vœu pour une filière conduisant à des études longues alors que ce taux est 66% dans l'académie. Afin d'améliorer l'attractivité pour les études longues des bacheliers généraux, le proviseur demande à chaque acteur de la communauté éducative de se mobiliser pour renforcer la liaison entre le lycée et l'enseignement supérieur.

Question

Quelle peut être la contribution de l'équipe de mathématiques pour développer cette liaison entre le lycée et l'enseignement supérieur ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : extrait du BOEN spécial n° 1 du 4 février 2010

Accompagnement personnalisé au lycée d'enseignement général et technologique.

[...] L'accompagnement personnalisé :

- en classe de seconde, permet avant tout à l'élève de se doter de méthodes pour tirer profit de ses études et construire un projet personnel ;
- en classe de première, favorise l'acquisition de compétences propres à chaque voie de formation tout en lui permettant de développer son projet d'orientation post-bac. L'articulation avec le travail réalisé en TPE est à valoriser ;
- en classe terminale, prend appui sur les enseignements spécifiques, et sur les enseignements constituant les dominantes disciplinaires des séries concernées. Il contribue à la préparation à l'enseignement supérieur. [...]

Document 2 : rapport des inspections générales n° 2012-123, octobre 2012

Analyse de l'orientation et des poursuites d'études des lycéens à partir de la procédure admission post-bac.

[...] Les opérations d'immersion dans le supérieur qui ont pu être mises en place ont rencontré un vrai succès. Les élèves interrogés qui en ont bénéficié s'accordent à dire qu'elles ont joué un rôle déterminant dans la décision d'orientation qu'ils ont prise, surtout lorsqu'ils ont pu participer à de véritables séquences d'enseignement (cours, travaux dirigés, travaux pratiques pour les disciplines expérimentales) et que l'immersion ne s'est pas réduite à une simple visite de l'établissement avec présentation des filières. [...]

Thème : maltraitance

Exposé du cas

Pendant le cours, une élève fait un malaise. Cette élève est évacuée vers l'infirmerie et le cours reprend. À l'issue de ce cours, deux élèves viennent voir le professeur et lui expliquent que leur camarade est très fatiguée car elle doit s'occuper de son petit frère de 7 ans. D'après les dires de leur camarade, ses parents passent leurs soirées dans des bars, rentrent tard et ne s'occupent absolument pas d'elle ni de son petit frère.

Question

Quelle attitude adoptez-vous, à court et moyen terme ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : Extrait du guide « Enfants victimes d'infractions pénales : guide de bonnes pratiques »

[...] Les fondements du signalement :
Le signalement se justifie en raison d'indicateurs d'alerte de maltraitance ou de danger qui peuvent prendre plusieurs formes, dont la facilité de détection est inégale, notamment :

- des lésions sur le corps de l'enfant laissant présumer des violences physiques à son encontre (hématomes sur plusieurs parties du corps de l'enfant, traces de coups, de brûlures de cigarettes ou de morsures) ;
- des troubles anormaux de comportement (anxiété, repli sur soi...) laissant présumer des violences d'ordre psychologique (brimades répétées et disproportionnées) ; Chez des enfants plus âgés, les symptômes de maltraitance peuvent se manifester par des fugues, manifestations suicidaires voire tentative de suicide et des passages à l'acte qui sont des expressions de souffrances.
- des signes laissant présumer des carences parentales graves (négligence de l'hygiène corporelle de l'enfant, signes de malnutrition, manque de sommeil, absentéisme scolaire injustifié...).

Document 2 : d'après le site de la mutuelle MAIF

La non-dénonciation de maltraitance est un délit sanctionné par l'article 434-3 du Code pénal.
La circulaire du 15 mai 1997 rappelle l'obligation du signalement : « La communication des cas de mauvais traitements et privation s'impose, comme à tout citoyen, aux personnels des établissements scolaires ».
La procédure de signalement prend des formes différentes selon qu'il s'agit d'une présomption de maltraitance nécessitant une enquête préalable ou d'un cas d'urgence. En cas de présomption de maltraitance, le président du conseil général est saisi et le directeur académique des services de l'éducation nationale (DASEN) en est informé.
En cas d'urgence, lorsque les personnels sont confrontés à une situation de maltraitance grave et manifeste, c'est le procureur de la République qui est saisi, (le DASEN et le président du conseil général en sont informés). Dans tous les cas, les procédures de saisine doivent être mises en œuvre immédiatement. À tout moment, il peut être fait appel aux personnels sociaux et de santé, mieux à même d'évaluer la situation.
Dans chaque département, les modalités précises de signalement sont fixées dans une convention, signée entre le DASEN et le président du conseil général.

Thème : liaison collège-lycée

Exposé du cas

Lors de la réunion de prérentrée, le proviseur du lycée dans lequel vous venez d'être nommé insiste sur la difficulté d'adaptation croissante que rencontrent les élèves accueillis en seconde depuis quelques années, vis-à-vis des exigences du lycée, notamment en termes d'autonomie, de méthodes de travail et de comportements.
Il souhaite qu'une commission soit constituée afin d'identifier précisément les problèmes et de proposer des actions visant à y remédier.

Question

En tant que professeur de mathématiques, comment proposez-vous de contribuer à ce projet ?

Documentation fournie avec le sujet

extrait de « La liaison collège-lycée en mathématiques », Yves Olivier, Les revues pédagogiques de la Mission laïque française

Ce qui frappe naturellement le plus, lors des visites d'établissement, c'est le manque de connaissances du collège qu'a le professeur de lycée et le manque de connaissances du lycée qu'a le professeur de collège. Leurs représentations des mathématiques et de la façon dont on les enseigne sont très éloignées de la réalité des classes que j'ai pu observer au cours de mes visites ou inspections. C'est la source de malentendus et d'incompréhensions qui touchent en premier lieu les élèves.
Se renvoyer la balle en disant « vous auriez dû faire cela » ou « vous êtes trop exigeants » n'avance à rien. Il nous faut donc trouver de réelles pistes de travail en commun. [...] On peut voir des continuités et des ruptures et ainsi percevoir la mise en place d'adaptations nécessaires de l'enseignement des mathématiques tant au collège qu'au lycée.[...]
Tout changement de niveau d'enseignement amène ses continuités et ses ruptures ; l'enseignement des mathématiques n'y échappe pas. Il est sûrement plus facile de parler des ruptures bien visibles. Ces ruptures sont très mal ressenties par les élèves en difficultés ; c'est ce qui ressort des entretiens réalisés auprès d'eux. Des recommandations ou préconisations sont données pour donner de la continuité dans les apprentissages et dans l'organisation de l'enseignement.
[...]

- Recommandation n° 1 : il apparaît donc nécessaire de réfléchir aux contenus des dernières évaluations de troisième et des premières évaluations de seconde pour en faire évoluer progressivement leur nature.
- Recommandation n° 6 : il est donc nécessaire dans une liaison troisième-seconde, plutôt que d'échanger sur les compétences évaluées, de travailler entre professeurs de collège et professeurs de lycée sur des situations-problèmes rencontrées en troisième et dont l'étude pourrait être reprise et prolongée en seconde.
- Recommandation n° 9 : ne pas oublier l'utilité d'enseigner les techniques de vérification d'un calcul littéral à l'aide d'un calcul mental ou à l'aide d'une calculatrice. Ne jamais déconnecter une transformation d'expressions du type de problèmes.

Thème : accès des filles aux filières scientifiques

Exposé du cas

Dans les classes de terminale du lycée où vous venez d'être affecté, les filles formulent rarement des vœux d'orientation pour les filières scientifiques, hormis celles relatives à la santé. Vous engagez un travail d'équipe sur ce thème avec vos collègues des disciplines scientifiques de l'établissement.

Question

Quelles actions pouvez-vous proposer dans ce cadre ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : extrait de la lettre n°3 de « Femmes & mathématiques », mai 2013

Des inégalités patentes entre filles et garçons se manifestent dans l'orientation scolaire (notamment dans les domaines scientifiques, pourtant prometteurs d'emplois), dans la représentation (y compris par le corps enseignant) des disciplines, dans le contenu des manuels scolaires. Face à ces différences reposant sur des stéréotypes sexués, des membres des trois associations Femmes Ingénieurs, femmes & mathématiques et Femmes et Sciences interviennent depuis plusieurs années dans les lycées et collèges qui le demandent afin de présenter les métiers scientifiques et techniques, et de témoigner de leur passion pour leur métier devant des jeunes, filles et garçons, leurs enseignant-e-s et leurs parents.
Le but de l'opération « Ambassadrices pour les sciences » est d'inciter les jeunes, et plus particulièrement les jeunes filles, à s'orienter vers des métiers scientifiques et techniques en leur donnant l'occasion de rencontrer des jeunes femmes scientifiques, cela afin de leur proposer des modèles plus accessibles, de leur transmettre le goût des sciences et de les informer sur les débouchés concrets qu'offrent ces carrières.

Document 2 : extrait de « Les représentations sexuées dans les manuels de mathématiques de Terminale », Ambre Elhadad et Amandine Berton-Schmitt, 2012

Quel que soit le manuel étudié au sein du corpus, les personnages masculins restent toujours les plus nombreux : sur les 3348 personnages sexués comptabilisés, on trouve 2676 hommes pour 672 femmes, soit 1 femme pour 5 hommes. Ce déséquilibre est particulièrement remarquable dans le nombre de personnages masculins célèbres : 1057 noms de personnalités masculines sont cités contre 35 personnages historiques féminins, soit 3,2 %.
Cette faiblesse numérique des personnages féminins dans les manuels s'accompagne d'une surreprésentation des femmes dans des professions auxquelles elles sont traditionnellement associées.
Lorsque les auteur-e-s de manuel déclinent un nom de métier masculin au féminin, il lui est associé un attribut traditionnellement féminin : dans un manuel de la filière professionnelle, on trouve systématiquement le métier de « gérant » au masculin, excepté lorsqu'il est question d'« une gérante de parfumerie ». Dans le domaine scientifique, on observe également une moindre diversité des métiers. Les femmes scientifiques inventées pour les énoncés ou présentes dans les illustrations sont soit des laborantines, soit des archéologues.[...]
D'une manière générale, les femmes représentées dans les illustrations se trouvent le plus souvent prises dans des interactions amoureuses, ou incarnent des rôles traditionnellement attendus. En revanche, les illustrations mettant en scène des garçons ou des hommes adultes montrent plutôt des liens de socialité masculine qu'ils soient intra ou extra scolaires.

Thème : relation avec les parents

Exposé du cas

Dans le collège où vous avez été affecté, un volet du projet d'établissement est consacré à la qualité des relations avec les familles.
À l'occasion de la prochaine réunion d'information, organisée en début d'année scolaire pour les classes de sixième, le principal souhaite qu'un effort de communication soit fait afin d'intéresser les parents à la scolarité de leurs enfants et à la vie de l'établissement.

Question

Lors de cette réunion, il est demandé au professeur de chaque discipline d'intervenir devant les parents d'élèves de la classe dont il a la charge. Comment organisez-vous votre propos ?

Documentation fournie avec le sujet

Document : extrait du rapport de l'inspection générale « La place et le rôle des parents dans l'école » (octobre 2006)

Une autre difficulté des relations parents-enseignants naît de ce que fréquemment ces derniers ressentent comme une intrusion inacceptable dans le « domaine pédagogique », (qu'ils considèrent comme réservé, au cœur de leur identité professionnelle), les questions que leur posent légitimement les parents sur les objectifs, les contenus et les pratiques de l'enseignement que reçoivent leurs enfants.[...]
Bien loin d'être des partenaires, les parents, et en particulier les parents de niveau socioculturel élevé, sont alors suspectés de vouloir contrôler et juger la prestation professionnelle de l'enseignant, et d'exiger une efficacité, en termes de réussite scolaire de leur enfant. Cette attitude les apparente à des « consommateurs d'école », ayant fait pour leur enfant les bons choix éducatifs (en matière d'orientation, de suivi scolaire, d'investissement scolaire et culturel de la famille) et attendant en retour une offre pédagogique de qualité. La connaissance qu'ont de l'école ces parents, informés et très conscients des enjeux scolaires, sociaux et professionnels d'une excellente scolarité, et d'autant plus anxieux, plus « demandeurs » vis-à-vis des enseignants, rend paradoxalement le dialogue difficile, trop chargé qu'il est, de part et d'autre, d'affects et de représentations antagonistes.
Les parents se plaignent alors du manque de considération des enseignants à leur égard, estiment qu'ils ne reconnaissent pas la qualité des pratiques éducatives et de socialisation qu'ils font l'effort de mettre en place au sein de la famille, afin de donner à l'enfant toutes ses chances. Les enseignants, pour leur part, jugent intrusive ou inquisitrice la demande des parents, estiment « consumériste » ou d'essence « libérale » leur rapport à l'école, (service public dont ils exigent une prestation à la hauteur de leurs attentes et de leur investissement), et souhaitent voir réduits par l'administration à leur minimum réglementaire les échanges « parents-professeurs ».

Thème : évaluation des acquis des élèves

Exposé du cas

Depuis le début de l'année, vous avez réussi à motiver deux élèves de quatrième en difficulté. Vous avez constaté leur implication lors des séances de mathématiques et vous avez remarqué qu'ils ont progressé.
Vous préparez un devoir sur table et vous craignez que beaucoup des contenus évaluant les notions au programme de quatrième soient hors de portée de ces deux élèves.

Question

Que pourriez-vous envisager pour l'évaluation des compétences mathématiques de ces deux élèves ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : extrait du document ressource pour le socle commun dans l'enseignement des mathématiques au collège (mai 2011)

Trop d'élèves de collège se révèlent incapables de réussir les devoirs de contrôle destinés à mesurer la maîtrise du programme. Le socle commun ayant vocation à permettre à tout élève de tirer profit de l'enseignement reçu, on doit donc, pour les élèves en difficultés sur les acquisitions prévues par le programme, pouvoir évaluer les capacités qu'ils ont construites. [...] Par ailleurs, l'évaluation de compétences est par nature positive : elle consiste à attester, au fur et à mesure de leur construction par un élève, la maîtrise de diverses compétences. Il s'agit donc de pointer des réussites progressives et non des manques.

Document 2 : Séverine Le Bastard Landrier (chargée d'études au Céreq), « L'expérience subjective des élèves de seconde : influence sur les résultats scolaires et les vœux d'orientation »

Les travaux précurseurs de Rosenthal & Jacobson (1968), ayant mis en évidence l'effet « Pygmalion », encouragent les enseignants à maintenir un niveau d'exigence élevé avec de fortes attentes. On sait par ailleurs que les enseignants ayant en charge des classes de niveau scolaire faible ont tendance à adapter leurs exigences au niveau de leurs élèves. Par conséquent, ces derniers réalisent de moindres performances par rapport à ceux qui fréquentent des classes dont le niveau est hétérogène ou élevé (Duru-Bellat & Mingat, 1997). Le défi pour l'enseignant serait alors de créer des situations de réussite ou d'assouplir son niveau d'exigence en fonction des difficultés des élèves pour augmenter la fréquence des réussites et améliorer leur estime de soi, sans porter atteinte au niveau d'attente qui demeure élevé. Cet assouplissement devant être considéré comme une étape dont l'objectif est de motiver l'élève et lui permettre d'aborder de nouvelles notions avec un minimum d'estime de soi.
Une seconde piste pour les enseignants est relative au jugement scolaire : les travaux de Bressoux & Pansu (2003) soulignent qu'à niveau initial donné, plus le jugement scolaire est favorable, plus l'élève a une perception positive de sa compétence scolaire. À noter que cet effet va au-delà du sentiment de compétence scolaire : lorsque le jugement est favorable, l'élève a également davantage tendance à se sentir à l'aise dans ses relations aux autres et à se percevoir comme quelqu'un qui se conduit bien. Ce constat n'est pas anodin dans la mesure où nous avons constaté que l'estime de soi scolaire influence de manière significative les résultats scolaires. Il invite alors les enseignants à la plus grande prudence dans leur tâche quotidienne d'évaluation qui ne touche pas seulement l'élève mais sa personne en tant que telle.

Thème : orientation et déterminismes sociaux

Exposé du cas

Une étude statistique est menée dans votre lycée au sujet des vœux d'orientation envisagés par les élèves de seconde à la fin du premier trimestre. Cette étude met en évidence que les enfants dont les parents appartiennent à une catégorie socioprofessionnelle défavorisée font très minoritairement le vœu d'une première scientifique, quels que soient leurs résultats dans les disciplines scientifiques.
Le chef d'établissement saisit de cette question le conseil pédagogique, dont vous êtes membre.

Question

Quelle analyse faites-vous de la situation et quelles actions pouvez-vous envisager ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : extrait de l'analyse des résultats du système éducatif français publié dans l'état de l'école (direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance) numéro 22, octobre 2012

Favoriser la mixité sociale en France est l'un des défis inscrits dans la loi de l'avenir de l'école du 23 avril 2005. Connaître la réussite d'une génération au baccalauréat, le type de baccalauréat obtenu et le niveau du plus haut diplôme par catégorie sociale est une manière d'estimer l'importance des inégalités scolaires selon le milieu social.
Les développements quantitatifs des enseignements secondaires, puis supérieurs, ont permis d'ouvrir l'école à une population plus large. [...] Cette évolution d'ensemble masque cependant des disparités sociales importantes. Ainsi, un enfant de cadre obtient plus souvent le baccalauréat qu'un enfant d'employé ou d'ouvrier : 84 % contre 55 % pour la dernière génération. Le type de baccalauréat obtenu par les jeunes diffère également selon la catégorie socioprofessionnelle de leurs parents. En 2011, 49,8 % des diplômes délivrés sont des baccalauréats généraux, 22,7 % des baccalauréats technologiques et 27,4 % des baccalauréats professionnels. Mais, 76,0 % des lauréats enfants de cadres obtiennent un baccalauréat général, 14,5 % un baccalauréat technologique et seulement 9,4 % un baccalauréat professionnel, la répartition est de respectivement 32,7 %, 26,4 % et 40,9 % pour les enfants d'ouvriers. Par ailleurs, parmi les jeunes ayant terminé leur formation initiale en 2008, 2009 ou 2010, les enfants de cadres et de professions intermédiaires sont bien plus nombreux que les enfants d'ouvriers et d'employés à posséder, pour plus haut diplôme, un diplôme du supérieur (respectivement 61 % contre 31 %).

Document 2 : extrait du bulletin officiel n° 10 du 10 mars 2011 : « Une nouvelle ambition pour les sciences et les technologies à l'École »

Au sortir du lycée, les flux d'élèves qui s'orientent vers les filières scientifiques et techniques sont insuffisants au regard des besoins de l'économie. Notre système éducatif doit ainsi relever un double défi : redonner, d'une part, toute sa place aux sciences et à la technologie dans la culture de l'élève, et susciter, d'autre part, l'appétence pour les filières et les métiers scientifiques et techniques afin de garantir les flux de chercheurs, d'ingénieurs et de techniciens dont le pays a et aura besoin. Cette nouvelle ambition pour les sciences et les technologies à l'École doit également permettre l'éveil des talents particuliers et conduire les élèves qui le souhaitent vers des filières scientifiques et technologiques d'excellence.

Thème : évaluation des acquis des élèves

Exposé du cas

Afin de remédier à la démotivation et au découragement de certains élèves et les impliquer davantage, la principale de votre collège propose d'expérimenter des classes sans notes en cinquième. Il s'agit de mettre en place un outil de suivi compréhensible pour les familles et reflétant au mieux les acquis et les progrès des élèves. Elle demande aux enseignants de concevoir un projet où seront détaillés les objectifs poursuivis et les modalités de mise en œuvre.

Question

Comment envisagez-vous la contribution d'un professeur de mathématiques à un tel projet ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : d'une enquête de DEPP (Note 04.13) sur « Les pratiques d'évaluation des enseignants au collège »

L'évaluation au collège est surtout envisagée dans une perspective sommative, même si des signes d'évolution vers des démarches plus diagnostiques et formatives sont perceptibles... Une grande majorité des professeurs interrogés déclare que les élèves attachent surtout de l'importance à la note, veulent la comprendre et qu'ils n'y sont jamais indifférents et les trois quarts d'entre eux (surtout ceux d'histoire-géographie, lettres, mathématiques, SVT et arts plastiques) désignent en premier lieu les appréciations écrites (qui doivent fournir conseils et accompagnement) puis la note chiffrée comme reflétant le mieux le niveau d'acquisition des élèves. Tous s'accordent en effet à dire que la note, surtout lorsqu'elle est établie à partir d'un barème, représente bien tout ce qu'ils ont voulu évaluer chez leurs élèves.

Document 2 : extrait du rapport de l'inspection générale de l'Éducation nationale (n° 2005 - 079 - juillet 2005 : « Les acquis des élèves, pierre de touche de la valeur de l'école »).

« 2.3.2. Évaluation, notation : compter ou rendre compte ?
Contrairement à ce qui se pratique à l'école primaire, la note demeure reine dans le second degré ; malgré ses faiblesses. Celles-ci sont bien connues : inconsciemment, même avec un barème, les correcteurs notent différemment un élève supposé bon ou mauvais, un garçon ou une fille, une copie située au début ou en fin de correction. Consciemment, un enseignant utilise la note pour encourager un progrès ou sanctionner une attitude ; il note donc différemment des prestations comparables. D'un contrôle à un autre, la même note peut rendre compte de qualités différentes : rapidité et technicité un jour, inventivité et expression un autre. Sur le même devoir, la même note recouvre des compétences différentes selon qu'elle résulte d'un grappillage minutieux ou d'une partie du devoir traitée avec brio. Le même élève, lent, émotif, ne donne pas la même prestation en temps (trop) limité qu'en temps libre, etc. Enfin, cause maintes fois dénoncée de la relativité de la note, l'enseignant s'efforce le plus souvent de fabriquer un contrôle et un barème qui étalent les notes et répartissent les élèves en trois groupes : les bons, les moyens, les faibles. Il serait suspect que tous ses élèves réussissent... La note est donc relative, peu fidèle, peu explicite. Et pourtant elle est admise par tous, élèves, parents, enseignants, chefs d'établissement. C'est le support de (presque) tout dialogue sur les acquis des élèves. Il est vrai qu'elle se communique aisément, qu'elle permet des classements, des moyennes, des agrégats, des traitements statistiques. Même lorsque l'évaluation porte sur des critères explicites, le retour à la note s'impose (pour la moyenne, pour l'examen etc.). »

Thème : interdisciplinarité

Exposé du cas

Lors d'une réunion du conseil pédagogique au sein duquel vous représentez votre discipline, le proviseur indique qu'il souhaite renforcer le travail en interdisciplinarité dans l'établissement. Pour cela, il désire qu'un paragraphe du projet d'établissement soit centré sur les actions interdisciplinaires menées au lycée. Ce paragraphe doit mettre en lumière les actions au sein de dispositifs particuliers, mais aussi celles qui font l'objet de projets construits par plusieurs enseignants, dans le cadre classique de l'enseignement.

Question

Quelle pourrait-être la contribution de l'équipe de mathématiques à la rédaction de ce paragraphe ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : travaux personnels encadrés. Classe de première des séries générales : mise en œuvre pédagogique à compter de la rentrée 2011. Extrait du BOEN 26 du 30 juin 2011.

Les TPE consistent en un travail pluridisciplinaire conduit par un groupe d'élèves à partir d'un sujet se rapportant à des thèmes définis au niveau national. [...]. Les thèmes retenus ont pour objet de favoriser les liens entre les différents enseignements. À partir de ces thèmes, les élèves choisissent un sujet en accord avec leurs enseignants. Les TPE associent au moins deux disciplines et s'appuient prioritairement, quoique non exclusivement, sur les disciplines spécifiques de chaque série. Ils doivent permettre aux élèves de :

– réinvestir et renforcer les savoirs et les compétences acquises dans les disciplines associées ;
– développer des capacités d'autonomie et d'initiative dans la recherche et l'exploitation de documents ;
– commencer à se familiariser avec les méthodes de travail et d'organisation qui seront mobilisées dans l'enseignement supérieur.[...]

Document 2 : extrait du BOEN 26 du 29 avril 2010, programme de méthodes et pratiques scientifiques en classe de seconde

L'enseignement d'exploration « méthodes et pratiques scientifiques » permet aux élèves de découvrir différents domaines des mathématiques, des sciences physiques et chimiques, des sciences de la vie et de la Terre et des sciences de l'ingénieur. C'est aussi l'occasion de montrer l'apport et la synergie de ces disciplines pour trouver des réponses aux questions scientifiques que soulève une société moderne, d'en faire percevoir différents grands enjeux, et de donner les moyens de les aborder de façon objective.

Cet enseignement révèle le goût et les aptitudes des élèves pour les études scientifiques, leur donne la possibilité de découvrir des métiers et des formations dans le champ des sciences et les aide à construire leur projet de poursuite d'études en leur faisant mieux connaître la nature des enseignements scientifiques, les méthodes et les approches croisées mises en œuvre.[...]

Dans chaque thème l'équipe de professeurs identifie différents concepts et contenus scientifiques. Il est nécessaire de prévoir des moments de travail commun afin de poser de manière claire les connaissances à acquérir et les méthodes à mettre en œuvre. Ces moments communs aux disciplines concernées peuvent se situer par exemple lors de la présentation du thème, en cours de déroulement, au moment de la conclusion sous forme d'une synthèse.

Thème : addiction

Exposé du cas

Depuis plusieurs semaines, vous constatez un changement de comportement chez un de vos élèves, qui semble abattu, sans énergie, alors qu'il était un élément moteur de la classe. Après une heure de cours, vous vous entretenez avec cet élève, et il finit par vous avouer qu'il consomme du cannabis pour se détendre.

Question

Comment réagissez-vous à cette confidence et quelles suites comptez-vous donner en matière de prévention ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : circulaire n° 2011-216 du 2 décembre 2011 parue au BOEN n°46 du 15 décembre 2011.

Les séances annuelles de prévention des conduites addictives prévues par le code de l'éducation (article L312-18) visent à aider chaque jeune à s'approprier progressivement les moyens d'opérer des choix, d'adopter des comportements responsables et de contribuer à sa construction individuelle et sociale.
Ces actions sont menées en cohérence avec le plan gouvernemental de lutte contre les drogues et les toxicomanies.
Objectifs opérationnels/mise en œuvre.[...]
Niveau établissement scolaire

- Poursuivre la programmation des séances de prévention des conduites addictives dans le cadre du CESC.
- Mettre en place, si nécessaire, une orientation par le médecin ou l'infirmière. Dans toutes les zones où cela est possible, une orientation vers les dispositifs extérieurs de prise en charge devra être organisée et encouragée, notamment vers les « consultations jeunes consommateurs » ou les consultations (avancées ou non) organisées par les centres de soins, d'accompagnement et de prévention en addictologie (CSAPA).

Document 2 : extrait d'un article du magazine « Nousvousils », consacré à l'éducation.

[...] en France, on fume de plus en plus et de plus en plus tôt : en dix ans, chez les 14-15 ans, la consommation est passée de 8,1 à 24,9 % chez les garçons et de 6 à 16,5 % chez les filles. La consommation de cannabis s'est banalisée parce que l'image à laquelle elle est associée est positive, aussi bien chez les adultes que chez les adolescents, explique Claudia Abon, officier de police et animatrice de sessions de prévention dans les établissements scolaires du 9ème arrondissement. Celle-ci rappelle pourtant qu'outre l'interdiction à laquelle est soumis l'usage de ce stupéfiant, il peut avoir des incidences sur la scolarité, amener le consommateur à se désocialiser et ouvrir la voie à d'autres dépendances. [...]
Outre les odeurs suspectes, plusieurs signes peuvent alerter un enseignant. Il faut être attentif à une convergence d'indices liés à la fréquentation des cours, au comportement en classe, à l'état physique ou aux résultats scolaires, indique Marie-Jo Jorda, ancienne éducatrice de la Protection judiciaire de la jeunesse (PJJ), devenue formatrice d'enseignants au sein de classes relais. Lorsqu'un élève somnole ou s'endort en classe, arrive souvent en retard, multiplie les absences, se renferme sur lui-même, devient agressif ou apathique, a le regard vague, les pupilles dilatées, souffre de tremblements, de troubles de l'élocution, se met à délirer, travaille moins bien cela peut cacher une consommation de drogue.

Thème : relations avec les parents

Exposé du cas

Après le conseil de classe du premier trimestre, un de vos élèves vous interpelle sur la remarque que vous avez inscrite sur son bulletin : *ne fournit aucun effort, il faut changer d'attitude*, en vous indiquant que « ça ne se fait pas » et que ses parents ont dit que « ça ne se passerait pas comme ça ».

Question

Quelle attitude adoptez-vous, à court et moyen terme ?

Documentation fournie avec le sujet

Document : extrait du rapport de la médiatrice de l'éducation nationale, 2011

15 % des différends cités par les parents d'élèves portent sur un désaccord sur le contenu des enseignements, les méthodes de travail, la charge de travail des élèves, 8 % sur la notation et l'évaluation. Ce constat vient d'être fait également par une sociologue, Cécile Carra, directrice de recherche Récifes (Recherches en éducation compétences interactions formations éthiques savoirs) lors du colloque de l'université d'Artois le 14 décembre 2011 notant que « l'essence de la violence à l'école, c'est moins les agressions d'élèves contre les enseignants, qui sont extrêmement rares, que les contestations qui portent sur des contenus de savoirs ou sur l'organisation de la norme scolaire ». Il existe en effet une grande crainte, d'une partie des parents, de l'échec scolaire de leur enfant et donc une attente forte d'un déroulement d'une bonne scolarité ce qui engendre une grande réactivité à tout incident de parcours. Dans le sondage OpinionWay de mars 2012 , si une des causes de l'échec scolaire est à rechercher du côté d'un environnement familial peu propice (46 %), l'autre cause serait liée à l'inadaptation des méthodes pédagogiques par rapport aux besoins des élèves (45 %). Lorsque les parents interrogent l'enseignant sur l'évaluation, il y a d'abord la légitime préoccupation que leur enfant ne soit pas victime d'une erreur mais également une attente sinon une exigence d'une relation élargie et enrichie avec lui qui excède le simple constat et sa restitution. Perplexes ou désemparés devant des commentaires qui ne commentent rien (« 6, faible ») ou la formule d'un conseil qui ne dit rien de la manière d'y arriver ou si mal (« il faut travailler davantage » ; « secouez-vous »), les parents plus inquiets et moins résignés que jadis, attendent une explicitation de l'évaluation qui autrement reste largement improductive pour les élèves en échec. Ils souhaitent sortir du constat d'échec et trouver les voies de l'aide et donc une évaluation explicite qui débouche sur une identification des obstacles et l'élaboration d'une stratégie pour les réduire.

Thème : évaluation

Exposé du cas

Votre chef d'établissement fait part au conseil pédagogique de sa volonté de faire évoluer l'évaluation des acquis en mathématiques. Il demande à l'équipe de mathématiques de diversifier les modalités d'évaluation pour tenir compte des progrès des élèves.

Question

En tant que professeur de mathématiques, comment vous impliqueriez-vous dans un tel projet ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : extrait du livret scolaire pour l'examen du baccalauréat général séries ES, L et S (options SVT et SI) et baccalauréat technologique séries STI2D, STL et STD2A (Bulletin officiel spécial n°3 du 22 mars 2012)

Compétences à renseigner en mathématiques
- Maitriser les connaissances exigibles
- Mettre en œuvre une recherche de façon autonome
- Mener des raisonnements
- Avoir une attitude critique
- Utiliser les outils logiciels pour résoudre des problèmes de mathématiques
- Communiquer à l'écrit et à l'oral

Document 2 : extrait du document ressource pour le socle commun dans l'enseignement des mathématiques au collège, mai 2011

L'évaluation de la maitrise du programme, qui fait partie des pratiques professionnelles installées, reste bien un attendu au collège.[...]
Quand on cherche à mesurer la maitrise d'une capacité du programme, il est donc nécessaire d'envisager sa mobilisation à plusieurs reprises et dans des situations variées, en tenant compte de différents niveaux de maitrise.
Premier niveau de maitrise : la simple restitution de savoir dans des exercices d'application à l'identique. Par exemple être capable, dans une situation simple dans laquelle le contexte d'utilisation d'un théorème est explicite, d'utiliser ce théorème.
Second niveau de maitrise : réinvestissement de la ressource dans une situation simple mais inédite.
Troisième niveau de maitrise : savoir choisir et combiner plusieurs ressources autrement dit être capable d'identifier des contextes pertinents d'utilisation de cette ressource (l'utiliser correctement et quand il le faut, ne pas l'utiliser quand il ne le faut pas) y compris dans des situations inédites, voire de tâches complexes.

Pour savoir si un élève maitrise un savoir ou un savoir-faire du programme, il est essentiel d'évaluer cette maitrise à plusieurs reprises tout en veillant à proposer des situations d'évaluation permettant de varier le niveau de maitrise attendu.
Mettre cela concrètement en œuvre a des incidences sur la conception des supports d'évaluation et notamment des textes de devoirs.

Thème : liaison école-collège

Exposé du cas

Vous êtes professeur de mathématiques en classe de 6^e et vous êtes invité à participer, à la rentrée, à une réunion de la commission de liaison entre votre collège et les écoles de son secteur de recrutement. Il s'agit de définir les modalités de l'aide apportée aux élèves en difficulté à l'entrée en 6^e.

Question

Quelles propositions pourriez-vous faire ?

Documentation fournie avec le sujet

Document : extrait du dossier de rentrée 2012-2013, ministère de l'éducation nationale

Les années de collège, et en tout premier lieu la classe de sixième, s'inscrivent dans la continuité de l'enseignement primaire : ainsi l'accent est mis sur l'indispensable liaison à renforcer entre l'école et le collège. Les commissions dites de liaison, composées de maîtres du CM2 et des professeurs de français, de mathématiques et des professeurs principaux exerçant en classe de sixième, veillent à ce que tous les élèves bénéficient d'un suivi attentif de leur progression scolaire. Cette disposition doit permettre, dès la rentrée scolaire, d'identifier les élèves qui ont besoin d'un accompagnement renforcé et de les aider rapidement.
Cette attention se traduit en particulier par l'accompagnement personnalisé à raison de deux heures hebdomadaires. Ce dernier s'adresse à tous les élèves de la classe de sixième et leur permet de consolider ou d'approfondir leurs acquis par des chemins pédagogiques diversifiés et adaptés à leur profil. Les équipes pédagogiques pourront progresser dans la pratique de ces approches nouvelles en s'appuyant notamment sur des outils mis à leur disposition sur le site eduscol.education.fr.
Il est indispensable de mettre en place, le plus tôt possible, les différents moyens permettant de soutenir ceux dont les fragilités sont connues ou se révèlent à l'entrée au collège : programme personnalisé de réussite éducative, stages et modules de remise à niveau, etc.[...]
Maintenir l'ambition d'un tronc commun pour tous n'interdit pas de proposer aux élèves des approches pédagogiques différenciées, dès lors qu'aucun dispositif d'éviction précoce ne détourne ces élèves de l'objectif de maîtrise du socle commun et ne les enferme dans une filière.

Thème : harcèlement

Exposé du cas

Les parents d'un élève de la classe dont vous êtes professeur principal vous alertent sur le fait que leur enfant leur a confié qu'il était victime de harcèlement de la part d'autres élèves.

Question

Comment réagissez-vous dans l'immédiat et à plus long terme ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : extrait du dossier « Agir contre le harcèlement à l'école », ministère de l'éducation nationale

Détecter une situation de harcèlement n'est pas facile : ces actes sont souvent cachés, espacés dans le temps, prennent des formes différentes et sont souvent tournés à la dérision. Ils peuvent être perçus comme de simples chamailleries ou taquineries enfantines.
De même, le mal-être de certaines victimes peut être interprété, à tort, par les adultes comme une manifestation du tempérament peu sociable de l'enfant ou une simple crise d'adolescence. La méconnaissance des mécanismes du harcèlement, associée au silence des victimes, peut retarder la prise de conscience de l'entourage. Il est donc de la responsabilité des adultes d'être attentifs aux changements de comportement des enfants et des adolescents.

Document 2 : extrait du rapport « Refuser l'oppression quotidienne : la prévention du harcèlement à l'École », Éric Debarbieux, 2011

Principe 1 : lutter contre la solitude des victimes
L'enfermement dans le silence, l'impression de n'avoir aucun recours pour les victimes, et souvent pour leurs parents est la marque même de l'expérience du harcèlement. Le sentiment de ne pouvoir être pris au sérieux pour ce qui est souvent considéré comme banal, sinon normal, sont des causes de souffrance majeure. L'obligation de quitter une école, puis souvent une autre dans une fuite interminable et trop souvent illusoire doit cesser : il faut refuser la double peine des victimes.
Principe 2 : les agresseurs ont le droit de changer de comportement
Les agresseurs ne sont pas plus gagnants que les agressés. La loi du plus fort est dérisoire, car à terme leur réussite professionnelle et leurs relations sociales sont très souvent faibles. Par ailleurs, les agresseurs sont prisonniers de conditionnements sociaux et de représentations qui font de leur victime un éternel coupable. [...]
Principe 3 : ne pas laisser filer le temps
Comme le dit le chercheur québécois Égide Royer : « Mettre l'accent sur le traitement une fois que les problèmes sont développés relève de la myopie... Lorsqu'on a à composer avec des jeunes en difficulté, il semble que la plupart des gens préfèrent attendre jusqu'au moment où les problèmes deviennent sévères, voire chroniques, afin qu'ils finissent par faire vraiment quelque chose, que le problème soit comportemental, académique ou les deux ». La prévention précoce est plus efficace et moins coûteuse que toute mesure ultérieure. Elle doit s'articuler sur trois niveaux : la prévention universelle, ou primaire, qui concerne l'ensemble des personnes, enfants ou adultes, la prévention secondaire, qui concerne des enfants et des jeunes en difficulté sans nécessiter une structure ou un soin hautement spécialisé, la prévention tertiaire qui concerne les jeunes les plus en difficulté.

Thème : évaluation

Exposé du cas

Dans votre lycée, suite aux conseils de classe du premier trimestre de seconde, les parents d'élèves font part au chef d'établissement de leur inquiétude concernant la baisse sensible des résultats des élèves en mathématiques au regard de ceux qu'ils obtenaient au collège. Ils ont le sentiment que les évaluations sont conçues de telle sorte qu'un élève n'ayant pas un profil scientifique obtienne un maximum de 8 sur 20 en mathématiques. Suite à ces remarques, le proviseur du lycée charge l'équipe de mathématiques de faire des propositions pour faire évoluer l'évaluation des élèves en seconde.

Question

Quelles propositions pourriez-vous faire pour répondre à cette demande ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : portail eduscol – organisation de la classe de seconde générale et technologique au lycée

Seconde générale et technologique. Une classe de détermination
La classe de seconde a pour objectif de laisser aux élèves des choix les plus ouverts possibles. Elle leur dispense une culture générale commune, tout en leur permettant de découvrir de nouveaux domaines littéraires, économiques, scientifiques ou technologiques. Elle associe :

- des enseignements communs, qui ont un poids très fort (80 % de l'horaire-élève) ;
- des enseignements d'exploration au choix, un de ces enseignements touchant obligatoirement l'économie.

Document 2 : introduction du programme de mathématiques de la classe de seconde (BO n° 30 du 23 juillet 2009)

La seconde est une classe de détermination. Le programme de mathématiques y a pour fonction :

- de conforter l'acquisition par chaque élève de la culture mathématique nécessaire à la vie en société et à la compréhension du monde ;
- d'assurer et de consolider les bases de mathématiques nécessaires aux poursuites d'étude du lycée ;
- d'aider l'élève à construire son parcours de formation.

[...] Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines. Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. Au niveau d'une classe de seconde de détermination, les solutions attendues sont aussi en général simples et courtes.[...]
L'évaluation doit être en phase avec les objectifs de formation rappelés au début de cette introduction.

5. ANNEXES

5.1. Ressources numériques et logiciels à disposition des candidats

Textes officiels

- réglementation du concours ;
- programmes de Mathématiques des classes de collège, de lycée et des sections de technicien supérieur ;
- documents ressources pour le collège et le lycée ;
- extrait de l'arrêté du 12 mai 2010 spécifiant les compétences professionnelles des maîtres.

Logiciels

- Algobox ;
- ClassPad Manager ;
- Geogebra ;
- Geoplan ;
- Geospace ;
- Maxima ;
- OpenOffice.org ;
- Python ;
- Scilab ;
- TI-NSpire CAS TE ;
- TI-SmartView 83 Plus.fr ;
- Xcas.

L'utilisation de tout support numérique personnel est exclue.
L'usage des téléphones mobiles et de toute forme d'accès à internet est interdit dans l'enceinte du concours.

Manuels numériques

- BORDAS : Indice 2de, 1re S, Terminale S (spécifique) ;
- DIDIER : Hélice 6^{e}, Horizon 4^{e}, Math'x : 2de, 1re S, Terminale S (spécifique), Terminale S (spécialité) ;
- HATIER : Triangle : 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3e, Odyssée : 2de, 1re S, 1re ES-L, Terminale S (spécifique), Terminale S (spécialité), Terminale ES-L (spécifique et spécialité) ;
- NATHAN : Transmath 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}, Transmath 2de, 1re S, 1re ES-L, Terminale S (spécifique), Terminale ES-L (spécifique et spécialité), Hyperbole : 2de, 1re S, 1re ES-L, Terminale S (spécifique), Terminale ES-L (spécifique et spécialité).

Le jury remercie les éditeurs de logiciels et de manuels ayant mis gracieusement leurs produits à la disposition du concours.

5.2 Bibliothèque du concours

Le candidat peut utiliser des ouvrages personnels. Seuls sont autorisés les livres en vente dans le commerce, à condition qu'ils ne soient pas annotés et à l'exclusion des manuels spécifiques de préparation aux épreuves orales du concours, qu'ils concernent les sujets de leçons ou la partie agir en fonctionnaire de l'État. Le jury se réserve la possibilité d'interdire l'usage de certains ouvrages dont le contenu serait contraire à l'esprit des épreuves.

La bibliothèque du concours propose quelques exemplaires de manuels du collège, du lycée et des sections de technicien supérieur.

Ouvrages disponibles lors de la session 2013

Sixième	Bordas	Myriade	2009
	Didier	Hélice	2009
	Hachette Education	Phare	2009
	Hatier	Triangle	2009
Cinquième	Bordas	Myriade	2010
	Hachette Education	Phare	2010
	Hatier	Triangle	2010
Quatrième	Belin	Prisme	2011
	Bordas	Myriade	2011
	Didier	Horizon	2011
	Hachette Education	Phare	2011
	Hatier	Triangle	2011
Troisième	Hachette Education	Phare	2012
	Hatier	Triangle	2012

Seconde	Belin	Symbole	2009
	Bordas	Pixel	2010
	Didier	Math'x	2010
	Hachette Education	Déclic	2010
		Repères	2010
	Hatier	Odyssée	2010
	Nathan	Hyperbole	2010
		Transmath	2010
		Travailler en confiance	2010
Première S	Belin	Symbole	2011
	Bordas	Indice	2011
	Didier	Math'x	2011
	Hachette Education	Déclic	2011
		Repères	2011
	Hatier	Odyssée	2011
	Nathan	Hyperbole	2011
		Transmath	2011
Première ES	Bordas	Indice	2011
	Hachette Education	Déclic	2011
	Hatier	Odyssée	2011
Première STI2D-STL	Foucher	Sigma	2011
Terminale S	Bordas	Indice (enseignement spécifique)	2012
		Indice (enseignement de spécialité)	2012
	Hachette Education	Déclic (enseignement spécifique et de spécialité)	2012
		Repères (enseignement spécifique et de spécialité)	2012
	Hatier	Odyssée (enseignement spécifique)	2012
		Odyssée (enseignement de spécialité)	2012

Terminale ES-L	Bordas	Indice (enseignement spécifique)	2012
		Indice (enseignement de spécialité)	2012
	Hatier	Odyssée (enseignement spécifique et de spécialité)	2005

Sections de technicien supérieur	Foucher	Sigma (BTS industriels, groupement BCD, analyse et algèbre)	2009
		Sigma (BTS industriels, groupement BCD, statistique et probabilités)	2009
		Sigma (BTS industriels, groupement A, tome 1)	2002
		Sigma (BTS industriels, groupement A, tome 2)	2002