ministère
Éducation
nationale

EBE MAT 2

SESSION 2013

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB ***: La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

A

Problème 1 : Puissances de matrices

Rappels et notations

Étant donnés deux entiers naturels non nuls p et q, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes.
L'ensemble $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ est noté $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et I_p désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
On identifiera par la suite $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^p$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Pour tout entier n, on note $A_n = (a_{ij}(n))_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.
On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, si pour tout couple (i,j) tel que $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$, la suite $(a_{i,j}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$.
En posant $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{i,j}(n)) = l_{i,j}$ et $L = (l_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, on dit alors que la matrice L est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = L$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Pour tout entier naturel n, on note A^n la puissance n-ième de la matrice A.
Ce problème a pour but de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Partie A : étude d'un exemple

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{5}x_n + \dfrac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{5}x_n + \dfrac{3}{5}y_n \end{cases}$$

Dans cette partie, on pose $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de A^n et de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que A puisse s'écrire :
$$A = PDP^{-1}$$
où P désigne la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de A^n en fonction de n.
4. Etablir que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
5. Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer les limites de ces suites en fonction de x_0 et y_0.

Partie B : résultats préliminaires

Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

1. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ qui convergent respectivement vers L et M.
   1.1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n + B_n) = L + M$.
   1.2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha A_n) = \alpha L$.

1.3. Soient $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n B = \alpha B$.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ qui converge vers L.

2.1. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n X = LX$.

2.2. Énoncer sans démonstration un résultat analogue pour la multiplication à droite.

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^p, \lim_{n\to+\infty} A_n X = 0$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$.

Partie C : condition nécessaire

Dans la suite du problème, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ représenté par la matrice A dans la base canonique.
On définit, pour tout entier naturel n, u^n par : $u^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^p}$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$.
On suppose dans cette partie que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Soit λ une valeur propre de u ($\lambda \in \mathbb{C}$).

1.1. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

1.2. On suppose que $|\lambda| = 1$.
Montrer qu'alors $\lambda = 1$. *On pourra considérer* $\left|\lambda^{n+1} - \lambda^n\right|$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

Partie D : condition suffisante

On note $\chi_u(X) = \det(A - XI_p)$ le polynôme caractéristique de u, où det désigne le déterminant de la matrice considérée.

1. Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.

2. En déduire que l'on peut écrire $\chi_u(X) = \det(A - XI_p) = \prod\limits_{i=1}^{p} (\alpha_i - X)$, avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$.

3. Justifier le fait que u admet dans une certaine base $(e_1, ..., e_p)$ une matrice T de la forme :
$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \alpha_2 & \cdots & \cdots \\ & & \ddots & \cdots \\ 0 & & & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

4. On suppose dans cette question que $|\alpha_i| < 1$ pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$.

4.1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_1) = 0$.

4.2. Montrer par récurrence que pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_i) = 0$.

4.3. En déduire la limite de T^n, puis celle de A^n.

5. On note $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres de u, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et $|\lambda_i| < 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant m$.
On suppose également que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

5.1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id})$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{C}^p$ stables par u.

5.2. On note u_1 l'endomorphisme de $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id})$ induit par u. Montrer que toute valeur propre de u_1 est une valeur propre de u, distincte de λ_1.

5.3. En remarquant que u_1 vérifie les hypothèses de la question 4, en déduire que A^n converge et déterminer une matrice semblable à sa limite.

Tournez la page S.V.P.

Partie E : conclusion et application

1. On note $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres de A, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
   Déduire des questions précédentes que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :
   $$\left\{\begin{array}{l} \forall i \in [\![1,m]\!], |\lambda_i| < 1 \\ \text{ou} \\ \lambda_1 = 1, \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}\,(u-\mathrm{Id}) = \{0\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![2,m]\!], |\lambda_i| < 1 \end{array}\right.$$
2. Déterminer si les suites $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, dans chacun des cas suivants :

   2.1. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$

   2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & \dfrac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6+\dfrac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 6+\dfrac{i}{2} \end{pmatrix}$

Problème 2 : quelques théorèmes d'arithmétique

On démontre dans la partie A un théorème de Lagrange dont on utilise le résultat pour démontrer le théorème de Wilson (partie B) et le théorème de Wolstenholme (partie C).

Partie A : théorème de Lagrange

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

2. Montrer que pour tout entier premier p et tout entier $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.

3. Soit p un entier premier impair. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \prod_{k=1}^{p-1}(x+k)$$

3.1. Montrer que pour tout réel x on a :

$$pf(x) = (x+1)f(x+1) - xf(x)$$

3.2. Justifier l'existence d'un p-uplet d'entiers $(a_0, a_1, \cdots, a_{p-1})$ tel que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, x^{p-1-k}$$

3.3. Montrer que $a_0 = 1$ et $a_{p-1} = (p-1)!$

3.4. À l'aide de la question 3.1 et en faisant intervenir le binôme de Newton, montrer que pour tout entier $k \in [\![0, p-1]\!]$ on a :

$$pa_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{p-i}{k+1-i} a_i$$

3.5. En déduire que $a_1 = \binom{p}{2}$ et que pour tout entier $k \in [\![2, p-1]\!]$ on a :

$$k\, a_k = \binom{p}{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i$$

3.6. En déduire le théorème de Lagrange :

« Si p est un entier premier impair et si $f(x) = \prod_{k=1}^{p-1}(x+k) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, x^{p-1-k}$ alors les coefficients $a_1, a_2, \cdots, a_{p-2}$ sont divisibles par p ». *On pourra raisonner par récurrence.*

Partie B : théorème de Wilson

On se propose de démontrer la propriété suivante, connue sous le nom de « théorème de Wilson » : si p est un entier premier alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

1. Vérifier que la propriété est vraie pour $p = 2$.
2. p est maintenant un entier premier impair.
   2.1. Montrer que :
   $$p\,! = 1 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + (p-1)!$$
   (les entiers $(a_i)_{i \in [\![1,p-2]\!]}$ sont ceux définis à la question A.3.2)

   2.2. En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
3. Montrer que la réciproque du théorème de Wilson est vraie.
4. On se propose d'étudier ce que devient le théorème de Wilson pour les entiers non premiers strictement supérieurs à 4.
   4.1. On suppose que $n > 4$ et que la décomposition en produit de facteurs premiers de n comprend au moins deux facteurs premiers distincts. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

   4.2. On suppose que $n > 4$ et que $n = p^\alpha$ où p est un entier premier et α est un entier strictement supérieur à 2. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

   4.3. On suppose que $n > 4$ et que $n = p^2$ où p est un entier premier. Montrer que $1 < 2p < n$ et en déduire que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

Partie C : théorème de Wolstenholme

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère le rationnel :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On désigne par s_n et t_n les deux entiers naturels tels que :

$$H_n = \frac{s_n}{t_n} \qquad \text{et} \qquad \text{pgcd}(s_n, t_n) = 1$$

1. Écrire un algorithme permettant d'obtenir pour n allant de 2 à 10 les entiers s_n et t_n (on supposera qu'on dispose d'une instruction *pgcd(a,b)* qui renvoie le plus grand commun diviseur de deux entiers a et b).
2. Calculer s_4, s_6 et s_{10} et vérifier que ces entiers sont divisibles respectivement par 5^2, 7^2 et 11^2.

Dans la suite, p désigne un nombre premier strictement supérieur à 3. On se propose de démontrer que l'entier s_{p-1} est divisible par p^2 (théorème de Wolstenholme).

3. Montrer que $H_{p-1} = \dfrac{a_{p-2}}{(p-1)!}$ où a_{p-2} est défini comme à la partie A. *On pourra utiliser une relation liant les racines d'un polynôme et l'un de ses coefficients.*
4. Déduire de l'écriture de $f(-p)$ que :
   $$a_{p-2} = p^{p-2} - a_1 p^{p-3} + \cdots + a_{p-3}p$$
5. Conclure.