MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EBE MAT 1

SESSION 2016

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Sections :

MATHÉMATIQUES
LANGUES RÉGIONALES : BRETON

PREMIÈRE ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

Tournez la page S.V.P.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

EBE MAT 1

SESSION 2016

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Sections :

MATHÉMATIQUES
LANGUES RÉGIONALES : BRETON

PREMIÉRE ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ

RECTIFICATIF

Problème n°2, partie A, page 6, question I.4

Au lieu de :

Montrer que pour entier $n \geq 1$

Lire :

Montrer que pour **tout** entier $n \geq 1$

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Les parties **D** et **E** de ce problème sont indépendantes des parties **B** et **C**.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I, n fois dérivables et dont la dérivée n-ième est continue.
Pour n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie A : interpolation de Lagrange

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

I. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que L_k est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k, \\ 1 \text{ si } i = k. \end{cases}$$

II. On considère l'application

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1), \dots, P(a_n)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que F est une application linéaire.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

3. Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

III. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(a_k) = f(a_k)$. Ce polynôme P est appelé *polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \dots, a_n$*.

2. Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \dots, a_n$ à l'aide des polynômes $L_1, \dots, L_n$ et des valeurs de f en $a_1, \dots, a_n$.

Partie B : erreur d'interpolation

Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^n([a, b])$ et $a_1 < \ldots < a_n$ des nombres réels appartenant à $[a, b]$. On note P le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$ (on rappelle que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$). Le but de cette partie est de majorer la valeur absolue de la différence entre f et P sur le segment $[a, b]$.

I. Soit g une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. **Question de cours.** Énoncer le théorème de Rolle.

2. On suppose que g est n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que la fonction dérivée n-ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.

II. On fixe $c \in [a, b]$, distinct de $a_1, \ldots, a_n$. On définit la fonction g_c sur $[a, b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}.$$

1. Montrer que g_c s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.

2. Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a, b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.

3. Soit h_c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_c(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}$.

En remarquant que h_c est une fonction polynôme de degré n, donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.

III. **1.** Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel $\zeta \in [a, b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c - a_k).$$

2. Montrer que le résultat établi dans la question III.1. reste vrai si c est égal à l'un des a_k.

3. En déduire que $\displaystyle\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{1}{n!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

Partie C : un exemple

Dans cette partie, on interpole de deux manières différentes la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array} \right.$$

I. **Première méthode**. On considère le polynôme d'interpolation P de f en les points d'abscisses $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

1. Calculer P.

2. En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \max_{x \in [0,\pi]} \frac{|x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)|}{6}.$$

Tournez la page S.V.P.

3. En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.$$

II. Seconde méthode. On choisit un entier $n \geqslant 1$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note P_k le polynôme (de degré inférieur ou égal à 1) d'interpolation de f aux deux points d'abscisses $\dfrac{k\pi}{n}$ et $\dfrac{(k+1)\pi}{n}$. On note Q_n la fonction affine par morceaux définie par :

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_0(x) \text{ si } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{n}, \\ P_1(x) \text{ si } \dfrac{\pi}{n} \leqslant x < \dfrac{2\pi}{n}, \\ \quad\vdots \\ P_k(x) \text{ si } \dfrac{k\pi}{n} \leqslant x < \dfrac{(k+1)\pi}{n} \ (k \in [\![0, n-2]\!]), \\ \quad\vdots \\ P_{n-1}(x) \text{ si } \dfrac{(n-1)\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

1. Calculer Q_1 et Q_2. Tracer la courbe représentative de Q_2.

2. Justifier que Q_n est continue sur $[0, \pi]$.

3. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que pour tout $x \in \left[\dfrac{k\pi}{n}, \dfrac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$\left|\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

4. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

III. Parmi ces deux méthodes d'approximation, quelle est la meilleure ? Justifier la réponse.

Partie D : déterminant de Vandermonde

On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels.
On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que A soit inversible.

I. Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

II. Première méthode.

1. Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie dans la question A.II. dans des bases bien choisies.

2. En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts A est inversible.

3. Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux ?

4. Conclure.

III. Seconde méthode. On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_1) \dots (X - a_{n-1}).$$

1. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2} X^{n-2} + \dots + \lambda_1 X + \lambda_0.$$

2. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2} C_{n-1} + \dots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

4. Montrer que

$$\det(A) = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (a_l - a_k).$$

5. Conclure.

Partie E : application à la recherche de paraboles

On fixe trois points distincts A_1, A_2, A_3 du plan affine euclidien. On recherche toutes les paraboles de ce plan passant par A_1, A_2 et A_3.

I. Dans cette question, on impose en plus aux paraboles recherchées d'avoir un axe parallèle à une droite D donnée. On choisit un repère orthonormé du plan tel que D ait pour équation $x = 0$. Par définition, les paraboles d'axe parallèle à D sont les courbes d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \neq 0$. Les coordonnées du point A_i dans ce repère sont notées (a_i, b_i) pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.

1. Montrer que la recherche des paraboles d'axe parallèle à D et passant par les points A_1, A_2 et A_3 est équivalente à la recherche des solutions (γ, β, α), avec $\alpha \neq 0$, du système :

$$(S) : \begin{cases} \gamma + a_1 \beta + a_1^2 \alpha &= b_1, \\ \gamma + a_2 \beta + a_2^2 \alpha &= b_2, \\ \gamma + a_3 \beta + a_3^2 \alpha &= b_3. \end{cases}$$

2. Montrer que si deux des points A_i ont la même abscisse (S) n'a aucune solution.

3. On suppose que les abscisses des points A_i sont deux à deux distinctes.

   a. Montrer que le système (S) possède une unique solution (γ, β, α).

   b. Exprimer α sous forme d'un quotient de déterminants.

   c. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

      i) $\alpha = 0$.

      ii) $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$.

      iii) A_1, A_2 et A_3 sont alignés.

4. Montrer que le problème admet une solution si et seulement si A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés et aucune des droites (A_1A_2), (A_2A_3) et (A_1A_3) n'est parallèle à D.

II. 1. On suppose A_1, A_2 et A_3 alignés. En utilisant les résultats précédents, montrer qu'il n'existe aucune parabole passant par A_1, A_2 et A_3.

2. On suppose que A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe une infinité de paraboles passant par A_1, A_2 et A_3 et préciser les directions de leurs axes.

Problème n° 2

Notations.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles, n fois dérivable et dont la dérivée n-ième est continue.

Partie A : calcul d'un déterminant et applications

On fixe un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice A_n à n lignes et n colonnes définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

I. Le déterminant de cette matrice est noté D_n.

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.

3. En déduire une expression de D_n.

4. Montrer que pour entier $n \geqslant 1$, A_n est inversible.

II. Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $U = A_n^{-1}B$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = b_i,$$

à condition de poser $u_0 = u_{n+1} = 0$.

On suppose désormais que $U = A_n^{-1}B$.

2. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = 1$. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, $u_i = \frac{i(n+1-i)}{2}$. En déduire que $\max(u_1, \ldots, u_n) \leqslant \frac{(n+1)^2}{8}$.

3. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i \geqslant 0$.

a. Soit j le plus grand indice tel que $u_j = \min(u_1, \ldots, u_n)$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $j = 1$ ou $j = n$.

b. En déduire que toutes les composantes de U sont positives on nulles.

4. On ne fait dans cette question aucune hypothèse sur le signe des b_i.
Soit $\beta = \max(|b_1|, \ldots, |b_n|)$. On considère les vecteurs V et $W \in \mathbb{R}^n$ définis par

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A_n^{-1}\left(\beta \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - B\right), \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = A_n^{-1}\left(\beta \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + B\right).$$

a. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i \geqslant 0$ et $w_i \geqslant 0$.

b. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i + w_i \leqslant \beta \dfrac{(n+1)^2}{4}$.

c. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$u_i = \frac{w_i - v_i}{2} \leqslant \frac{v_i + w_i}{2} \leqslant \beta \frac{(n+1)^2}{8}.$$

Partie B : inégalité de Taylor-Lagrange

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Soient deux nombres réels a et b dans l'intervalle I.

I. **1.** Justifier que $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.

2. Montrer que si $n \geq 2$, alors $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \displaystyle\int_a^b f''(t)(b-t)dt$.

3. Montrer que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt.$$

Cette égalité est connue sous le nom de *formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n*.

II. **1.** Justifier l'existence de $M_n = \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|$.

2. Démontrer que

$$\left|f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)-\ldots-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}\right| \leqslant M_n\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'*inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à f.*

Partie C : un problème de condition aux bords

Soient a, b deux nombres réels, $g \in \mathcal{C}^2([0,1])$, $M = \max\limits_{x\in[0,1]} |g''(x)|$.

I. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$ vérifiant

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in [0,1],\ f''(x) = g(x) \\ f(0) = a,\ f(1) = b \text{ (condition aux bords).} \end{cases}$$

Le but de cette partie est de chercher une approximation des valeurs de f.

II. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à un ordre et sur des intervalles bien choisis, montrer que, pour tous nombres réels x et h tels que $0 \leqslant x-h \leqslant x+h \leqslant 1$,

$$\left|\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} - f''(x)\right| \leqslant \frac{Mh^2}{12}.$$

III. On fixe un entier $n \geqslant 1$ et d'après la question précédente, on convient d'approcher $f''(x)$ par

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2},$$

avec $h = \dfrac{1}{n+1}$. Pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, on pose $x_i = ih$. Sachant que $f'' = g$, $f(0) = a$ et $f(1) = b$, on approxime $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(x_{n+1})$ par respectivement $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$ avec $u_0 = a$, $u_{n+1} = b$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i}{h^2} = g(x_i).$$

1. La matrice A_n a été définie dans la partie **A**. Montrer qu'il existe un vecteur $B \in \mathbb{R}^n$, que l'on explicitera, tel que

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A_n^{-1}B.$$

2. Soit F le vecteur $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$. Montrer que les valeurs absolues des composantes du vecteur $A_n(F-U)$ sont majorées par $M\dfrac{h^4}{12}$.

3. En utilisant les résultats de la partie **A**, donner une majoration des réels $|f(x_i)-u_i|$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ en fonction de n et M.

4. Conclure.

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 0189 – D'après documents fournis