ministère Éducation nationale

EBE MAT 2
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2010

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Notations

◇ Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ sera noté plus simplement (a_n). On note (0) la suite constante dont tous les termes sont nuls et on rappelle que deux suites (a_n) et (b_n) sont égales si et seulement si, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a $a_k = b_k$.

◇ Soient (a_n) et (b_n) deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on définit leur somme $(a_n)+(b_n)$, leur produit $(a_n)\times(b_n)$ et le produit d'une suite par un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ respectivement par :

$$(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n)$$

$$(a_n)\times(b_n) = (c_n) \text{ où, pour tout entier } n\in\mathbb{N} : c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$\lambda\cdot(a_n) = (\lambda a_n)$$

◇ On admet que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+)$ est un groupe commutatif d'élément nul (0).

◇ Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on notera X^p la suite $(x_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_p = 1 \\ x_n = 0 \quad \text{si } n \neq p \end{cases}$$

On écrira aussi X^0 et X^1 respectivement 1 et X.

◇ Pour tout $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $0\leq k\leq n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal à $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Partie I : série génératrice d'une suite (a_n)

1) **Propriétés algébriques**

1.a) Montrer que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\times)$ est un anneau commutatif dont on précisera l'élément neutre.

1.b) Montrer que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\times)$ est intègre. (Indication : *si (a_n) est un élément non nul de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pourra considérer le plus petit entier k tel que $a_k\neq 0$.*)

1.c) Montrer qu'un élément (a_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est inversible dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ si et seulement si $a_0\neq 0$.

1.d) Montrer que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Les résultats précédents montrent que toute suite $(a_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ peut s'écrire formellement sous la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n$. Lorsqu'on note $A(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n$ ou $A=\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n$, alors $A(X)$ ou A sera appelée série génératrice de la suite (a_n). On remarque que par définition du produit des suites on a $X^p\times X^q = X^{p+q}$ pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. D'autre part, si A est une série génératrice, pour tout entier $k\geqslant 2$, A^k désigne le produit $\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{k \text{ facteurs}}$.

On remarquera aussi que s'il existe un entier p tel que $a_p\neq 0$ et tel que pour tout entier $n>p$ on a $a_n=0$ alors la série génératrice de la suite (a_n) n'est autre qu'un polynôme de degré p qu'on notera $\sum_{n=0}^{p} a_nX^n$.

D'après la question 1.c) *ci-dessus, la série génératrice $\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n$ est inversible si et seulement si $a_0\neq 0$. Dans toute la suite, si la série génératrice $A(X)$ est inversible, on écrira son inverse sous la forme $\dfrac{1}{A(X)}$. Plus généralement si la série génératrice $A(X)$ est* *inversible et si $B(X)$ est une série génératrice quelconque, le produit $B(X) \times \dfrac{1}{A(X)}$ sera noté $\dfrac{B(X)}{A(X)}$. Si de plus $B(X)$ et $A(X)$ sont des séries génératrices sous la forme de polynômes alors $\dfrac{B(X)}{A(X)}$ peut être assimilée à une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$ et on admet que les techniques de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ restent valables pour $\dfrac{B(X)}{A(X)}$.*

2) **Éléments inversibles**

2.a) Montrer que la série génératrice inversible $\sum\limits_{n\geq 0} X^n$ a pour inverse $1-X$, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n\geq 0} X^n$$

2.b) Soit $a \in \mathbb{K} - \{0\}$, montrer que :

$$\frac{1}{1-aX} = \sum_{n\geqslant 0} a^n X^n$$

2.c) Soient $a \in \mathbb{K} - \{0\}$, $b \in \mathbb{K} - \{0\}$ avec $a \neq b$, montrer que :

$$\frac{1}{(1-aX)\times(1-bX)} = \left(\frac{a}{a-b}\right)\frac{1}{1-aX} + \left(\frac{b}{b-a}\right)\frac{1}{1-bX}$$

3) **L'opérateur de dérivation**

L'opérateur de dérivation, $D\,:\,\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est défini par :

$$D\,:\, A = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \mapsto D(A) = \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} n a_n X^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}X^n$$

3.a) Montrer que D est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Soient A et B deux séries génératrices. Montrer que :

3.b) $D(A\times B) = D(A)\times B + A \times D(B)$

(*on pourra commencer par traiter le cas où $A = X^p$ et $B = X^q$ où $(p,q)\in\mathbb{N}^2$*).

3.c) Si B est inversible

$$D\Big(\frac{A}{B}\Big) = \frac{D(A)\times B - A\times D(B)}{B^2}$$

4) **Quelques exemples**

4.a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la série génératrice est :

$$A(X) = \frac{1}{(1-X)^2}$$

est définie pour tout entier n par $a_n = n+1$.

4.b) Monter que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(a_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dont la série génératrice est

$$A_p(X) = \frac{1}{(1-X)^p}$$

est définie pour tout entier n par :

$$a_{p,n} = \binom{n+p-1}{n}$$

Tournez la page S.V.P.

4.c) Soit $A(X)$ la série génératrice d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\dfrac{A(X)}{1-X}$ est la série génératrice de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

4.d) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{k} = \binom{n+p}{n}$$

Partie II : séries génératrices et suites récurrentes

1) On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{n+1} = 2a_n + n \end{cases}$$

On se propose de déterminer la formule explicite de a_n en fonction de n. On note $A(X)$ la série génératrice de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.a) Montrer que :

$$A(X) = 2X \times A(X) + X^2 \times \sum_{n\geqslant 0}(n+1)X^n$$

1.b) Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ de la fraction rationnelle

$$\frac{X^2}{(1-X)^2 \times (1-2X)}.$$

1.c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

2) On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

et on note $F(X)$ la série génératrice de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.a) Montrer que :

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{1-\alpha_1 X} - \frac{1}{1-\alpha_2 X}\Big)$$

où

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

2.b) En déduire l'expression de F_n en fonction de n.

3) Suites récurrentes linéaires d'ordre k ($k \geq 1$).

Soit $(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{C}^k$, avec $a_k \neq 0$. On considère l'ensemble $\mathcal{U}$ des suites complexes (u_n) définies par la donnée de $(u_0, ..., u_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \geq k,\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_k u_{n-k}.$$

(On utilisera, sans le démontrer, le fait que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

Soit $(u_n) \in \mathcal{U}$. On note S la série génératrice de (u_n), et (E) l'équation caractéristique de (u_n) :

$$z^k = a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + ... + a_k \qquad (E).$$

3.a) Montrer que $\phi : (u_n) \in \mathcal{U} \mapsto (u_0, u_1, ..., u_{k-1})$ est un isomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{C}^k$.

3.b) On pose $Q(X) = 1 - a_1 X - ... - a_k X^k$ et $P(X) = Q(X) \times S(X)$. Montrer que $P(X)$ est un polynôme de degré au plus $k-1$, à coefficients dans $\mathbb{C}$.

3.c) On note $z_1, \cdots, z_p$ les racines dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) et $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ les ordres de multiplicité respectifs de $z_1, \cdots, z_p$.
Montrer qu'il existe des nombres complexes $b_{i,j}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \alpha_i$ tels que :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{b_{i,j}}{(X - 1/z_i)^j} \right).$$

3.d) Montrer alors qu'il existe des polynômes $R_1, ..., R_p$ tels que pour tout n

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} R_i(n) z_i^n \text{ où } \forall i, deg(R_i) < \alpha_i.$$

3.e) On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des suites (v_n) dont le terme général s'écrit $v_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n) z_i^n$ où pour tout $i \in \{1, 2 \cdots, p\}$, P_i est un polynôme tel que $deg(P_i) < \alpha_i$.
Démontrer que $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont la dimension vérifie l'inégalité $\dim \mathcal{V} \leq k$ et déduire que $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Partie III : Nombre de partitions d'un ensemble

Soient $k \geqslant 1$ un entier et S un ensemble non vide, on dit que $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ est une partition de S en k classes si :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \cdots, k\}, S_i \neq \emptyset \\ \forall (i,j) \in \{1, \cdots, k\}^2,\ S_i \cap S_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{k} S_i = S \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $k \in \{1, \cdots, n\}$ on note $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k classes. On pose par convention :

- ◇ pour tout entier $n \geqslant 1$: $\left\{ \begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right\} = 0$
- ◇ pour tout entier $k > n$: $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = 0$
- ◇ $\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} = 1$

1) Donner toutes les partitions de l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en 2 classes.
Cette question montre que $\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} = 7$. On se propose dans ce qui suit de calculer $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ en fonction de n et k.

2) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}$$

(*On fixera un élément $s \in S$ et on considèrera les partitions contenant le singleton $\{s\}$ et les partitions qui ne le contiennent pas*).

3) On considère la série génératrice

$$A_k(X) = \sum_{n \geqslant 0} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} X^n$$

3.a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$A_k(X) = X \times A_{k-1}(X) + kX \times A_k(X)$$

3.b) En déduire que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$A_k(X) = \frac{X^k}{\prod\limits_{m=1}^{k} (1 - mX)}$$

3.c) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{k} (1 - mX)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_r}{1 - rX}$$

où, pour tout $r \in \{1, \cdots, k\}$, $\alpha_r = (-1)^{k-r} \dfrac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}$

3.d) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant k$:

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}$$

4) Application : nombre de surjections

On considère un ensemble E de cardinal n et un ensemble F de cardinal p où n et p sont deux entiers strictement positifs. On se propose de calculer le nombre $S(n,p)$ de surjections de E sur F.

4.a) Que vaut $S(n,p)$ lorsque $p > n$?

4.b) Que vaut $S(n,n)$?

4.c) On suppose maintenant que $p \in \{1, \cdots, n\}$. Montrer que :

$$S(n,p) = p! \left\{ \begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right\}$$

Partie IV : Nombre de dérangements

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$.
Un dérangement de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans point fixe c'est-à-dire telle que pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma(i) \neq i$. On note d_n le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1, ..., n\}$.

On pose $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $p_n = \dfrac{d_n}{n!}$.

1) Calculer d_1, d_2 et d_3.

2) Pour $0 \leq k \leq n$, on note B_k l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement k points fixes.

2.a) Montrer que le cardinal de B_k vérifie l'égalité : $\text{Card}\,(B_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$ et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$$

2.b) Soit P la série génératrice de la suite (p_n). Montrer que

$$E(X) \times P(X) = \sum_{n \geqslant 0} X^n, \text{ où } E(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n.$$

2.c) Déterminer la série génératrice inverse de $E(X)$.

2.d) En déduire que

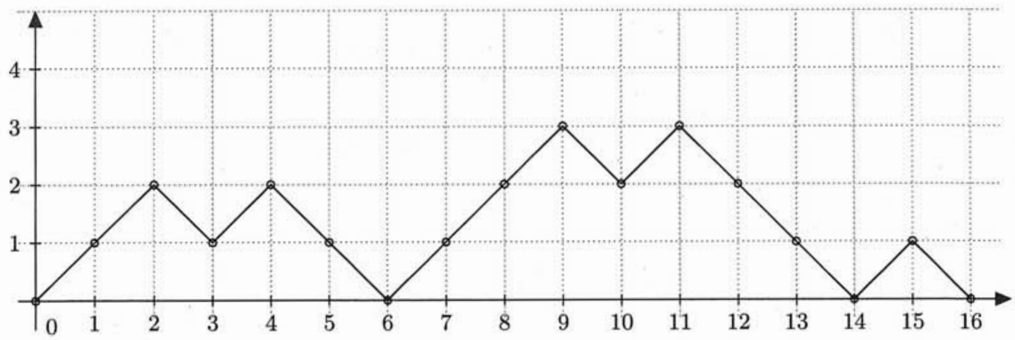
$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Partie V : Nombres de Catalan

1) **Chemins de Dyck**

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$, toute suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de points du plan dont les coordonnées sont des entiers positifs tels que $s_0 = (0, 0)$, $s_{2n} = (2n, 0)$ et, tels que, pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, 2n-1\}$, s_{k+1} est l'image de s_k par la translation de vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ ou de vecteur $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

Voici un chemin de Dyck de longueur 16.



On note c_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. Les nombres c_n sont appelés **nombres de Catalan**. Pour tout chemin de Dyck $\mathcal{C} = (s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de longueur $2n$ on note $k(\mathcal{C})$ le plus petit entier tel que $s_{k(\mathcal{C})}$ soit d'ordonnée nulle et d'abscisse non nulle.

1.a) Justifier que $k(\mathcal{C})$ est un entier pair.

1.b) Montrer que le nombre de chemins de Dyck $\mathcal{C}$ de longueur $2n$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2n$ est égal à c_{n-1}.

1.c) Montrer que le nombre de chemins de Dyck $\mathcal{C}$ de longueur $2n$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2p$ avec $p \in \{1, \cdots, n-1\}$ est égal à $c_{p-1}c_{n-p}$.(Par convention, on pose $c_0 = 1$).

1.d) En déduire que la suite (c_n) vérifie la relation de récurrence :

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} c_{j-1} c_{n-j}$$

2) **Expression des nombres de Catalan**

Soit r un nombre rationnel positif. On définit les coefficients binomiaux généralisés par :

$$\begin{cases} \binom{r}{0} = 1 \\ \binom{r}{n} = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(r-k)}{n!} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique série génératrice $S(X) = \sum_{n\geqslant 0} s_n X^n$ telle que :

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ S(X)^2 = 1 - 4X \end{cases}$$

et que cette série génératrice est donnée par :

$$S(X) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n X^n$$

2.a) Montrer que :

$$S(X) = 1 - \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n} X^{n+1}$$

2.b) On pose

$$H(X) = \frac{1}{2}\Big(1 - S(X)\Big)$$

Vérifier que $H(X) = X + \Big(H(X)\Big)^2$

3) Soit $C(X)$ la série génératrice de la suite (c_n) des nombres de Catalan.

3.a) Montrer que :

$$X \times C(X) = X + (X \times C(X))^2$$

3.b) En déduire que, pour tout entier n, on a :

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

puis que, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$