

SESSION 2010

CAPES
CONCOURS EXTERNE
TROISIEME CONCOURS
ET CAFEP CORRESPONDANTS

Section : MATHÉMATIQUES
Section : LANGUES RÉGIONALES : BRETON
Section : TAHITIEN

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

INTRODUCTION

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}.$$

On étudie la série de terme général a_n . On montre qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée γ , et appelée **Constante d'Euler**. Pour cela on commence par étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^n a_p = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$H_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}.$$

PARTIE I : PREMIÈRE APPROCHE DE LA CONSTANTE D'EULER

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$, montrer que

$$0 \leq a_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

3) Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p} dt,$$

puis montrer que pour tout entier $p \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq a_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right).$$

4) En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geq 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}.$$

5) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$H_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$. Montrer que

$$0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

PARTIE II : DEUX REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DE LA CONSTANTE D'EULER

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} , borné ou non et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dira que f est **intégrable** sur I si l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.

On admettra le résultat suivant : Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} , borné ou non et soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles positives, définies, continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle I . Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux et si la série numérique $\sum \int_I u_n$ converge, alors, la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

1) Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b) Déterminer la limite de $\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}$ quand $t \rightarrow 0^+$.

c) Conclure.

2) Dans cette question on se propose de démontrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors la fonction $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}.$$

Soient x et y deux réels strictement positifs.

a) Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b) Montrer que pour $a \leq b$ on a pour tout réel $z > 0$:

$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-az} \ln \frac{b}{a}$$

c) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}.$$

3) Une première représentation intégrale de la constante d'Euler.

a) Démontrer que pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right).$$

b) En déduire que pour tout réel $t > 0$ on a :

$$e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} \right).$$

c) Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$1 - \frac{1 - e^{-t}}{t} \geq 0.$$

d) Retrouver alors la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$ et démontrer l'égalité :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

4) Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler.

Soit y un réel strictement positif.

a) Calculer $\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$, puis déduire que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \right) = 0.$$

b) Démontrer que :

$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^y e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

c) En déduire que :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = 0.$$

d) Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(e^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right).$$

e) Conclure alors que :

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

PARTIE III : POUR UNE VALEUR APPROCHÉE DE LA CONSTANTE D'EULER

1) a) Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

(Indication : on pourra calculer chacune des deux intégrales).

b) En utilisant l'égalité obtenue en II.3d), démontrer que :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$.

(On rappelle que $H_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, $H_k = \sum_{p=1}^k \frac{1}{p}$.)

a) Montrer que F est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F'(x) - F(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1).$$

c) Montrer alors que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F(x) = e^x \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

3) Dédire des questions précédentes que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\gamma + \ln x = e^{-x} F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

4) Soit un entier $n \geq 1$ et soit un entier $a \geq 2$. Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leq \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \leq \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an}.$$

(Indication : on pourra admettre et utiliser l'inégalité : $n! \geq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.)

5) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\left| \gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k \right| \leq \frac{a}{a-1} \frac{e^{-n} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{e^{-n}}{n}.$$

6) Décrire une méthode permettant le calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-10} près. (On ne demande pas le calcul d'une telle valeur approchée.)

PARTIE IV : LA CONSTANTE D'EULER SOMME DE LA SÉRIE DE VACCA (1910)

Pour tout entier $p \geq 0$, on pose :

$$v_p = p \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right).$$

1) a) En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs dans l'expression de v_p , montrer que pour tout entier $p \geq 1$ on a :

$$v_p = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p) \quad \text{où} \quad \sigma_p = \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\sum_{p=1}^n v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d) En utilisant le développement asymptotique de H_n , obtenu en I. 5), conclure que la série de terme général v_p est convergente et qu'on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (-1)^n \frac{[\log_2 n]}{n}$$

où \log_2 désigne la fonction logarithme en base 2 et $[x]$ désigne la partie entière du réel x .

a) Expliquer pourquoi le critère spécial des séries alternées ne permet pas de montrer la convergence de la série de terme général u_n .

b) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

puis en déduire que :

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \right| \leq \frac{n+1}{2^n}.$$

c) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^m u_k = \sum_{p=0}^n v_p + \mathcal{O}\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

et en déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.$$

3) On pose pour tout entier naturel n :

$$r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

a) Montrer que la série de terme général r_n est absolument convergente.

b) Exprimer v_k en fonction de k, r_k et r_{k+1} . Montrer ensuite que

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n r_k - nr_{n+1}.$$

Conclure que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right)$$

PARTIE V : LA FORMULE DE GOSPER (1972)

Dans cette partie on désigne par \mathcal{F} le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles indexées par \mathbb{N} . Si $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un élément de \mathcal{F} , on notera aussi $x[k]$ le terme x_k de la suite x . On considère l'endomorphisme Δ de \mathcal{F} défini par :

$$\forall x \in \mathcal{F}, \forall k \in \mathbb{N}, \Delta(x)[k] = x[k] - x[k+1].$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ^n l'endomorphisme de \mathcal{F} obtenu en composant Δ avec lui même n fois et on pose $\Delta^0 = \text{Id}_{\mathcal{F}}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $p \in [0, n]$, $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} x_{p+k}.$$

(Indication : écrire $\Delta = \text{Id}_{\mathcal{F}} - T$ où T est l'endomorphisme de \mathcal{F} défini, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, par : $T(x)[k] = x[k+1]$.)

2) Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et de limite ℓ . On se propose de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = \ell.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\frac{\binom{n}{p}}{2^n} \right)_{n \geq p}$ converge vers 0.

b) On suppose dans cette question $\ell = 0$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = 0.$$

(Indication : On pourra utiliser l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} u_p + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} u_p$$

et, étant donnée un réel $\varepsilon > 0$, choisir un entier k suffisamment grand pour que l'on ait

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Conclure pour le cas général où ℓ est quelconque.

3) Dans cette question, on se propose de démontrer la propriété suivante : Soit $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$.

Si la série $\sum (-1)^k x_k$ converge, alors, la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$U_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k x_k \quad \text{et} \quad V_N = \sum_{n=0}^N \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

a) Démontrer que

$$V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=0}^N \binom{N+1}{q+1} U_q.$$

(on pourra observer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^k x_k = U_k - U_{k-1}$, avec, par convention, $U_{-1} = 0$).

b) En déduire que la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k.$$

4) On considère dans cette question un entier $n \geq 1$ ainsi que la suite $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_j = \frac{1}{2^n + j}.$$

a) Montrer que pour tout entier $m \geq 0$ on a :

$$\Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

Indication : On pourra admettre et utiliser le résultat suivant : Pour $m, n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

b) En déduire que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

c) Conclure que la constante d'Euler peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^p-k+k}{k}}.$$