ministère Éducation nationale

**EFI MSP 1**
Repère à reporter sur la copie

**SESSION 2011**

# CAPLP CONCOURS INTERNE ET CAER

## Section : MATHÉMATIQUES – SCIENCES PHYSIQUES

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*
*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB :** ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

**Tournez la page S.V.P.**

*Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants.*

*Le premier exercice porte sur les statistiques et les probabilités, la première partie étant de nature pédagogique.*

*Le deuxième exercice est un test vrai-faux avec justification des réponses.*

*Le troisième exercice a pour objet l'étude d'une famille d'applications affines du plan.*

*Le quatrième exercice permet d'obtenir la limite d'une suite en utilisant le calcul intégral.*

## Exercice 1

Voici une situation pouvant être utilisée en classe de seconde de baccalauréat professionnel lors d'une séance de formation ou d'évaluation.

| |
|---|
| *Une entreprise de plasturgie fabrique par injection dans un moule des rivets en plastique. Ce moule permet de fabriquer 220 rivets à chaque injection. Le fournisseur du moule affirme que chaque rivet a 6% de risque d'être non conforme. Après avoir réalisé une injection, le chef d'atelier constate que 20 rivets sont défectueux. Ce constat est-il cohérent avec l'affirmation du fournisseur du moule ?* |

### Partie I

Dans cette partie on considère un tableur dont une liste de fonctions est donnée en **Annexe 1**.
Des extraits des programmes de seconde, première et terminale de baccalauréat professionnel et du référentiel de certification du nouveau BEP sont donnés en **Annexe 2**.

1. Parmi les quatre formules suivantes qui pourraient être entrées dans une cellule du tableur, laquelle renvoie un nombre égal à 0 ou 1 avec les probabilités respectives 0,06 et 0,94 ? Justifier la réponse.
   =ENT(ALEA( )+0,06)
   =ALEA( )+0,94
   =ENT(ALEA( )+0,94)
   =ENT(0,06*ALEA( )+0,94)

2. Proposer une séquence de formation prenant appui sur la situation décrite dans l'encadré ci-dessus et permettant de répondre à la question qui y figure en utilisant une simulation informatique. Détailler notamment :
   - les capacités et connaissances du programme visées lors de cette séquence de formation ;
   - le rôle de l'enseignant et les tâches attendues de l'élève ;
   - les informations à fournir à l'élève concernant l'outil de simulation.

### Partie II

Soit $p$ un nombre rationnel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$ et soit $n$ un nombre entier naturel non nul.

On considère une urne contenant deux sortes de boules, indiscernables au toucher, des rouges et des blanches, avec une proportion de boules blanches égale à $p$. On effectue $n$ tirages au hasard et avec remise dans cette urne et on note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire $X$. En donner l'espérance et l'écart-type.
2. On note $Z$ la variable aléatoire définie par $Z = \frac{1}{n}X$. Que représente $Z$ ?
3. Justifier que la variable aléatoire $Z$ a pour espérance $p$ et pour écart-type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.
4. Dans cette question, on suppose que $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.
   a. Justifier que la variable aléatoire $Z$ peut être approximée par une variable aléatoire $Y$ qui suit une loi normale. Préciser les paramètres de cette loi normale.
   b. Soit $T$ une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. À l'aide de la table donnée en **Annexe 3**, déterminer la probabilité que $T$ appartienne à l'intervalle $[-1,96\,;1,96]$.
   c. En déduire la probabilité de l'événement :
   « $p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq Y \leq p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ».
5. En utilisant le résultat précédent, répondre à la question posée dans l'encadré figurant au début de cet exercice.

## Exercice 2

Les propositions suivantes sont indépendantes. Indiquer pour chacune d'entre elles si elle est vraie ou si elle est fausse puis justifier la réponse.

**Proposition 1 :**

Soit $n$ un nombre entier naturel. Si $n^2$ est un nombre pair, alors $n$ est un nombre pair.

**Proposition 2 :**

Dans un plan affine euclidien, il existe un triangle ABC dont les bissectrices intérieures issues des sommets A et B sont perpendiculaires.

**Proposition 3 :**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ à valeurs dans l'ensemble des nombres réels.

Si $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 1$, alors $f(x) \geq 1$ pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

**Proposition 4 :**

L'affirmation « les deux événements A et B sont indépendants » est équivalente à l'affirmation « la probabilité de l'événement « B sachant A » est égale à la probabilité de l'événement B ».

**Proposition 5 :**

Pour tout nombre entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on a $n! \geq 2^{n-1}$.

**Proposition 6 :**

Dans un espace affine euclidien orienté de dimension trois, muni d'un repère orthonormé direct, si chacun des sommets d'un parallélogramme est à coordonnées entières, alors l'aire de ce parallélogramme est aussi un nombre entier.

## Exercice 3

Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan affine euclidien, $k$ un nombre réel non nul et $\alpha$ un nombre réel différent de $-1$. On note $h$ l'homothétie de centre $B$ et de rapport $k$.
Soit $f$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M$ du plan associe le point $f(M)$ barycentre des points $A$ et $h(M)$ affectés respectivement des coefficients $\alpha$ et 1.

1. Montrer que pour tout point $M$ du plan, on a l'égalité vectorielle suivante :
$$(\alpha+1)\,\overrightarrow{Mf(M)} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB}.$$
2. Montrer que si $k = \alpha+1$ alors l'application $f$ est une translation dont on déterminera le vecteur.
3. Montrer que si $k \neq \alpha+1$, alors l'application $f$ admet un point invariant $G$. Déterminer alors la nature de l'application $f$ ainsi que ses éléments caractéristiques.
4. On suppose dans cette question que $AB = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 3$ et $k = 2$.

   On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [$AB$]. Représenter sur une même figure les points $A$ et $B$, le cercle $\mathcal{C}$ et son image par l'application $f$.

## Exercice 4

$\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

*L'objectif de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite* $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, U_n = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

### Partie A : Étude de la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.
2. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$V_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geq 2,\ V_n = 1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} = 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}.$$

   a. Montrer qu'il existe deux nombres réels $A$ et $B$ tels que, pour tout nombre entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on a l'égalité $\dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{A}{n-1}+\dfrac{B}{n}$.

   b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on a $V_n = 2-\dfrac{1}{n}$.

   c. Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on a $U_n < V_n$.
3. En utilisant les résultats précédents, prouver que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente.

### Partie B : Expression de $U_n$ à l'aide d'une intégrale

Dans cette partie, $n$ désigne un nombre entier naturel non nul.

On note $\mathrm{i}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soient $C_n$ et $S_n$ les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ par :

$$C_n(t) = \cos(t)+\cos(2t)+\cdots+\cos(nt) = \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\ ;$$

$$S_n(t) = \sin(t)+\sin(2t)+\cdots+\sin(nt) = \sum_{k=1}^{n}\sin(kt).$$

   a. Calculer $C_n(0)$.

   b. Pour tout nombre réel $t$ dans l'intervalle $]0\,;\pi]$, calculer le nombre complexe $C_n(t)+\mathrm{i}\,S_n(t)$.

   c. En déduire que pour tout nombre réel $t$ dans l'intervalle $]0\,;\pi]$ on a :

$$C_n(t) = \frac{\sin\left(\dfrac{nt}{2}\right)\cos\left(\dfrac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

   d. Justifier que la fonction $C_n$ est continue sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
2. a. Vérifier que pour tout nombre réel $t$ dans l'intervalle $]0\,;\pi]$ on a :

$$1+2C_n(t) = \frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

 **Tournez la page S.V.P.**

b. Soit $h_n$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\pi]$ par $h_n(t)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$.

Montrer que la fonction $h_n$ peut être prolongée par continuité en 0.

3. a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$. Faire apparaître le détail des calculs sur la copie.

b. En déduire que $U_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)C_n(t)\,\mathrm{d}t$.

**<u>Partie C</u> : Détermination de la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$**

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ par : $f(0)=2$ et $\forall t\in\,]0\,;\pi],\, f(t)=\dfrac{t-\dfrac{t^2}{2\pi}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$.

1. a. Montrer que la fonction *f* est continue sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

   b. En déduire qu'il existe un réel $M_1$ tel que, pour tout nombre réel $t$ appartenant à l'intervalle $[0\,;\pi]$, on a $0\leq f(t)\leq M_1$.

2. Soit $\alpha$ un nombre réel fixé tel que $0<\alpha<\pi$.

   a. Montrer que pour tout nombre entier naturel $n$, on a :
   $$\left|\int_0^{\alpha} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\right|\leq \alpha M_1.$$

   b. Justifier que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $[\alpha\,;\pi]$ et que sa fonction dérivée, notée $f'$, est continue sur l'intervalle $[\alpha\,;\pi]$.

   c. En déduire l'existence d'un réel $M_2$ tel que, pour tout nombre réel $t$ appartenant à l'intervalle $[\alpha\,;\pi]$, on a $|f'(t)|\leq M_2$.

3. On pose, pour tout nombre entier naturel $n$, $I_n=\displaystyle\int_{\alpha}^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$.

   À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est 0.

4. Calculer, en faisant apparaître les calculs sur la copie, la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\mathrm{d}t$.

5. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

# Annexe 1

**Généralités concernant le tableur :**

La touche $\boxed{\textbf{F9}}$ permet de recalculer toutes les feuilles de calcul de tous les classeurs ouverts.

Les cellules sont référencées XN, X étant la référence de la colonne, N le numéro de la ligne : par exemple la cellule A3 se situe sur la 1$^{re}$ colonne et sur la 3$^{e}$ ligne.

**Quelques fonctions du tableur :**

**ALEA( )** renvoie un nombre réel aléatoire distribué de manière uniforme, ce nombre aléatoire étant supérieur ou égal à 0 et strictement inférieur à 1.

**COMBIN(nombre_éléments;no_éléments_choisis)** renvoie le nombre de combinaisons pour un nombre donné d'éléments.

**ECARTYPE(nombre1;nombre2;...)** évalue l'écart-type d'une population en se basant sur un échantillon.

**nombre1;nombre2;...** représentent de 1 à 255 arguments numériques correspondant à un échantillon de population. On peut aussi utiliser une matrice ou une référence à une matrice plutôt que des arguments séparés par des points-virgules.

**ENT(nombre)** arrondit un nombre à l'entier immédiatement inférieur.

**FACT(nombre)** donne la factorielle d'un nombre.

**MAX(nombre1;nombre2;...)** renvoie le plus grand nombre de la série de valeurs.

**MOYENNE(nombre1;nombre2;...)** renvoie la moyenne (arithmétique) des arguments.

**NB.SI(plage;critères)** compte le nombre de cellules d'une plage qui répondent à un critère spécifique.

**plage** : représente un certain nombre de cellules à compter.

**critères :** nombre, expression, référence de cellule ou chaîne de texte qui détermine les cellules à compter. Par exemple, les critères peuvent être exprimés sous les formes suivantes : 21, "<21", D8, "cerises"

**NBVAL(valeur1;valeur2;...)** compte le nombre de cellules qui ne sont pas vides dans une plage.

**SI(test_logique;valeur_si_vrai;valeur_si_faux)** renvoie la valeur **valeur_si_vrai** si la condition **test_logique** est vraie et renvoie **valeur_si_faux** dans le cas contraire.

**SOMME(nombre1;nombre2;...)** additionne tous les nombres contenus dans une plage de cellules.

**VAR(nombre1;nombre2;...)** calcule la variance sur la base d'un échantillon.



**Tournez la page S.V.P.**

# Annexe 2

Extraits du programme de baccalauréat professionnel et du référentiel de BEP concernant les probabilités (BO spécial n°2 du 19 février 2009)

## Classe de seconde :

**1.2 Fluctuations d'une fréquence selon les échantillons, probabilités**
La notion de fluctuation d'échantillonnage, essentielle en statistique, est abordée dans cette partie du programme en étudiant la variabilité d'observation d'une fréquence. Elle favorise une expérimentation de l'aléatoire. L'objectif de ce module est de faire comprendre que le hasard suit des lois et de préciser l'approche par les fréquences de la notion de probabilité initiée en classe de troisième. Après une expérimentation physique pour une taille fixée des échantillons, la simulation à l'aide du générateur de nombres aléatoires d'une calculatrice ou d'un tableur permet d'augmenter la taille des échantillons et d'observer des résultats associés à la réalisation d'un très grand nombre d'expériences.

| Capacités | Connaissances | Commentaires |
|---|---|---|
| Expérimenter, d'abord à l'aide de pièces, de dés ou d'urnes, puis à l'aide d'une simulation informatique prête à l'emploi, la prise d'échantillons aléatoires de taille $n$ fixée, extraits d'une population où la fréquence $p$ relative à un caractère est connue.<br><br>Déterminer l'étendue des fréquences de la série d'échantillons de taille $n$ obtenus par expérience ou simulation. | Tirage au hasard et avec remise de $n$ éléments dans une population où la fréquence $p$ relative à un caractère est connue.<br><br>Fluctuation d'une fréquence relative à un caractère, sur des échantillons de taille $n$ fixée. | Toutes les informations concernant l'outil de simulation sont fournies. |
| Évaluer la probabilité d'un événement à partir des fréquences. | Stabilisation relative des fréquences vers la probabilité de l'événement quand $n$ augmente. | La propriété de stabilisation relative des fréquences vers la probabilité est mise en évidence graphiquement à l'aide d'un outil de simulation. |
| Évaluer la probabilité d'un événement dans le cas d'une situation aléatoire simple.<br>Faire preuve d'esprit critique. | | |

## Classe de première :

**1.2 Fluctuation d'une fréquence selon les échantillons, probabilités** *(groupements* A, B *et* C*)*
L'objectif de ce module est de consolider et d'approfondir l'étude, initiée en seconde professionnelle, de la variabilité lors d'une prise d'échantillons, pour favoriser la prise de décision dans un contexte aléatoire. La consolidation des notions déjà acquises en seconde professionnelle se traite en prenant appui sur des exemples de situations concrètes, issues de la vie courante, du domaine professionnel ou de la liste des thématiques. L'utilisation des TIC est nécessaire.

| Capacités | Connaissances | Commentaires |
|---|---|---|
| Expérimenter, à l'aide d'une simulation informatique, la prise d'échantillons aléatoires de taille $n$ fixée, extraits d'une population où la fréquence $p$ relative à un caractère est connue. | Distribution d'échantillonnage d'une fréquence. | |
| Calculer la moyenne de la série des fréquences $f_i$ des échantillons aléatoires de même taille $n$ prélevés.<br><br>Comparer la fréquence $p$ de la population et la moyenne de la série des fréquences $f_i$ des échantillons aléatoires de même taille $n$ prélevés, lorsque $p$ est connu. | Moyenne de la distribution d'échantillonnage d'une fréquence. | La population est suffisamment importante pour pouvoir assimiler les prélèvements à des tirages avec remise.<br><br>La stabilisation vers $p$, lorsque la taille $n$ des échantillons augmente, de la moyenne des fréquences est mise en évidence graphiquement à l'aide d'un outil de simulation.<br>Distinguer, par leurs notations, la fréquence $p$ de la population et les fréquences $f_i$ des échantillons aléatoires. |

| | | |
|---|---|---|
| Calculer le pourcentage des échantillons de taille $n$ simulés, pour lesquels la fréquence relative au caractère étudié appartient à l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ et comparer à une probabilité de 0,95.<br>Exercer un regard critique sur des données statistiques en s'appuyant sur la probabilité précédente. | Intervalle de fluctuation. | Se restreindre au cas où $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ : la connaissance de ces conditions n'est pas exigible. La formule de l'intervalle est donnée.<br><br>La connaissance de la « variabilité naturelle » des fréquences d'échantillons (la probabilité qu'un échantillon aléatoire de taille $n$ fournisse une fréquence dans l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ est supérieure à 0,95) permet de juger de la pertinence de certaines observations. |

## Classe de terminale :

**1.2 Probabilités** *(groupements* A, B *et* C*)*

L'objectif de ce module est d'entraîner les élèves à décrire quelques expériences aléatoires simples à mettre en oeuvre, et à calculer des probabilités. Tout développement théorique est exclu. La notion de probabilité est introduite en s'appuyant sur l'observation de la fluctuation d'échantillonnage d'une fréquence et sur la relative stabilité de cette fréquence lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois. Les études menées s'appuient sur des exemples simples issus du domaine technologique ou de la vie courante. Les capacités figurant au programme de première professionnelle, concernant la fluctuation d'échantillonnage, restent exigibles.

| **Capacités** | **Connaissances** | **Commentaires** |
|---|---|---|
| Passer du langage probabiliste au langage courant et réciproquement. | Expérience aléatoire, événement élémentaire, univers, événement.<br>Réunion et intersection d'événements.<br>Événements incompatibles, événements contraires. | Se limiter au cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini.<br>La connaissance des symboles $\cup$ (réunion), $\cap$ (intersection) et la notation $\overline{A}$ (événement contraire) est exigible. |
| Calculer la probabilité d'un événement par addition des probabilités d'événements élémentaires.<br>Reconnaître et réinvestir des situations de probabilités issues d'expériences aléatoires connues : tirages aléatoires avec ou sans remise, urnes.<br>Calculer la probabilité d'un événement contraire $\overline{A}$.<br>Calculer la probabilité de la réunion d'événements incompatibles.<br>Utiliser la formule reliant la probabilité de $A \cup B$ et de $A \cap B$. | Probabilité d'un événement.<br>Événements élémentaires équiprobables.<br>Événements élémentaires non équiprobables. | Faire le lien avec les propriétés des fréquences.<br>Les tirages simultanés sont exclus.<br>Entraîner les élèves à utiliser à bon escient des représentations pertinentes (arbres, tableaux, diagrammes) pour organiser et dénombrer des données relatives à une expérience aléatoire. Ces représentations constituent une preuve.<br>Toute utilisation de formules d'arrangement ou de combinaison est hors programme.<br>La généralisation à des cas où les événements élémentaires ne sont pas équiprobables se fait à partir d'exemples simples. La notion d'indépendance est hors programme. |

## Référentiel de mathématiques de B.E.P

**1.2 Fluctuations d'une fréquence selon les échantillons, probabilités**

| **Capacités** | **Indicateurs pour l'évaluation** |
|---|---|
| Expérimenter à l'aide d'une simulation informatique prête à l'emploi, la prise d'échantillons aléatoires de taille $n$ fixée, extraits d'une population où la fréquence $p$ relative à un caractère est connue. | Toutes les informations nécessaires sur l'outil de simulation sont fournies. |
| Déterminer l'étendue des fréquences de la série l'échantillon de taille $n$. | Les fréquences de la série peuvent être données, ou obtenues par simulation. |
| Calculer le pourcentage des échantillons de taille $n$ simulés, pour lesquels la fréquence relative au caractère étudié appartient à l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$. Comparer le pourcentage obtenu avec 95 %. Exercer un regard critique sur la situation étudiée. | Les nombres $n$ et $p$ vérifient $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. La connaissance de ces conditions n'est pas exigible.<br>La formule de l'intervalle est donnée. |
| Évaluer la probabilité d'un événement à partir des fréquences.<br>Faire preuve d'esprit critique, face à une situation aléatoire. | La situation aléatoire étudiée est une situation simple. |



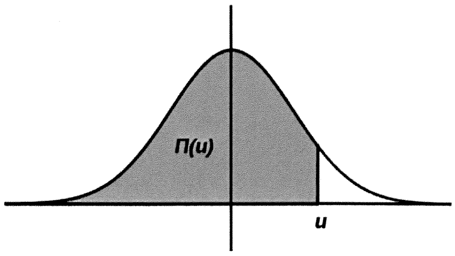
**Tournez la page S.V.P.**

# Annexe 3

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Extraits de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $N(0\ ;\ 1)$ :

$$\Pi(u) = P(X \leq u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)\mathrm{d}x$$




| **u** | **0,00** | **0,01** | **0,02** | **0,03** | **0,04** | **0,05** | **0,06** | **0,07** | **0,08** | **0,09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,500 0 | 0,504 0 | 0,508 0 | 0,512 0 | 0,516 0 | 0,519 9 | 0,5239 | 0,527 9 | 0,531 9 | 0,535 9 |
| **0,1** | 0,539 8 | 0,543 8 | 0,547 8 | 0,551 7 | 0,555 7 | 0,559 6 | 0,5636 | 0,567 5 | 0,571 4 | 0,575 3 |
| **0,2** | 0,579 3 | 0,583 2 | 0,587 1 | 0,591 0 | 0,594 8 | 0,598 7 | 0,6026 | 0,606 4 | 0,610 3 | 0,614 1 |
| **0,3** | 0,617 9 | 0,621 7 | 0,625 5 | 0,629 3 | 0,633 1 | 0,6368 | 0,6406 | 0,644 3 | 0,648 0 | 0,651 7 |
| **0,4** | 0,655 4 | 0,659 1 | 0,662 8 | 0,666 4 | 0,670 0 | 0,673 6 | 0,6772 | 0,680 8 | 0,684 4 | 0,687 9 |
| **0,5** | 0,691 5 | 0,695 0 | 0,698 5 | 0,701 9 | 0,705 4 | 0,708 8 | 0,7123 | 0,715 7 | 0,719 0 | 0,722 4 |
| **0,6** | 0,725 7 | 0,729 1 | 0,732 4 | 0,735 7 | 0,738 9 | 0,742 2 | 0,7454 | 0,748 6 | 0,751 7 | 0,754 9 |
| **0,7** | 0,758 0 | 0,761 1 | 0,764 2 | 0,767 3 | 0,770 4 | 0,773 4 | 0,7764 | 0,779 4 | 0,782 3 | 0,785 2 |
| **0,8** | 0,788 1 | 0,791 0 | 0,793 9 | 0,796 7 | 0,799 5 | 0,802 3 | 0,8051 | 0,807 8 | 0,810 6 | 0,813 3 |
| **0,9** | 0,815 9 | 0,818 6 | 0,821 2 | 0,823 8 | 0,826 4 | 0,828 9 | 0,8315 | 0,834 0 | 0,836 5 | 0,838 9 |
| **1,0** | 0,841 3 | 0,843 8 | 0,846 1 | 0,848 5 | 0,850 8 | 0,853 1 | 0,8554 | 0,857 7 | 0,859 9 | 0,862 1 |
| **1,1** | 0,864 3 | 0,866 5 | 0,868 6 | 0,870 8 | 0,872 9 | 0,874 9 | 0,8770 | 0,879 0 | 0,881 0 | 0,883 0 |
| **1,2** | 0,884 9 | 0,886 9 | 0,888 8 | 0,890 7 | 0,892 5 | 0,894 4 | 0,8962 | 0,898 0 | 0,899 7 | 0,901 5 |
| **1,3** | 0,903 2 | 0,904 9 | 0,906 6 | 0,908 2 | 0,909 9 | 0,911 5 | 0,9131 | 0,914 7 | 0,916 2 | 0,917 7 |
| **1,4** | 0,919 2 | 0,920 7 | 0,922 2 | 0,923 6 | 0,925 1 | 0,926 5 | 0,9279 | 0,929 2 | 0,930 6 | 0,931 9 |
| **1,5** | 0,933 2 | 0,934 5 | 0,935 7 | 0,937 0 | 0,938 2 | 0,939 4 | 0,9406 | 0,941 8 | 0,942 9 | 0,944 1 |
| **1,6** | 0,945 2 | 0,946 3 | 0,947 4 | 0,948 4 | 0,949 5 | 0,950 5 | 0,9515 | 0,952 5 | 0,953 5 | 0,954 5 |
| **1,7** | 0,955 4 | 0,956 4 | 0,957 3 | 0,958 2 | 0,959 1 | 0,959 9 | 0,9608 | 0,961 6 | 0,962 5 | 0,963 3 |
| **1,8** | 0,964 1 | 0,964 9 | 0,965 6 | 0,966 4 | 0,967 1 | 0,967 8 | 0,9686 | 0,969 3 | 0,969 9 | 0,970 6 |
| **1,9** | 0,971 3 | 0,971 9 | 0,972 6 | 0,973 2 | 0,973 8 | 0,974 4 | 0,9750 | 0,975 6 | 0,976 1 | 0,976 7 |
| **2,0** | 0,977 2 | 0,977 8 | 0,978 3 | 0,978 8 | 0,979 3 | 0,979 8 | 0,9803 | 0,980 8 | 0,981 2 | 0,981 7 |
| **2,1** | 0,982 1 | 0,982 6 | 0,983 0 | 0,983 4 | 0,983 8 | 0,984 2 | 0,9846 | 0,985 0 | 0,985 4 | 0,985 7 |
| **2,2** | 0,986 1 | 0,986 4 | 0,986 8 | 0,987 1 | 0,987 5 | 0,987 8 | 0,9881 | 0,988 4 | 0,988 7 | 0,989 0 |
| **2,3** | 0,989 3 | 0,989 6 | 0,989 8 | 0,990 1 | 0,990 4 | 0,990 6 | 0,9909 | 0,991 1 | 0,991 3 | 0,991 6 |
| **2,4** | 0,991 8 | 0,992 0 | 0,992 2 | 0,992 5 | 0,992 7 | 0,992 9 | 0,9931 | 0,993 2 | 0,993 4 | 0,993 6 |
| **2,5** | 0,993 8 | 0,994 0 | 0,994 1 | 0,994 3 | 0,994 5 | 0,994 6 | 0,9948 | 0,994 9 | 0,995 1 | 0,995 2 |
| **2,6** | 0,995 3 | 0,995 5 | 0,995 6 | 0,995 7 | 0,995 9 | 0,996 0 | 0,9961 | 0,996 2 | 0,996 3 | 0,996 4 |
| **2,7** | 0,996 5 | 0,996 6 | 0,996 7 | 0,996 8 | 0,996 9 | 0,997 0 | 0,9971 | 0,997 2 | 0,997 3 | 0,997 4 |
| **2,8** | 0,997 4 | 0,997 5 | 0,997 6 | 0,997 7 | 0,997 7 | 0,997 8 | 0,9979 | 0,997 9 | 0,998 0 | 0,998 1 |
| **2,9** | 0,998 1 | 0,998 2 | 0,998 2 | 0,998 3 | 0,998 4 | 0,998 4 | 0,9985 | 0,998 5 | 0,998 6 | 0,998 6 |

Table pour les grandes valeurs de $u$ :

| $u$ | **3,0** | **3,1** | **3,2** | **3,3** | **3,4** | **3,5** | **3,6** | **3,8** | **4,0** | **4,5** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pi(u)$ | 0,998 65 | 0,999 04 | 0,999 31 | 0,999 52 | 0,999 66 | 0,999 76 | 0,999 841 | 0,999 928 | 0,999 968 | 0,999 997 |



IMPRIMERIE NATIONALE – 11 0472 – D'après documents fournis