Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **scientifique**

Voie : **Technologie et biologie (TB)**

Discipline : **Mathématiques**

Seconde année

Programme de mathématiques TB2

Préambule

Objectifs de la formation

En classe de TB2 l'objectif est, dans le cadre d'un approfondissement de la formation, d'amener l'étudiant à intégrer les différentes étapes permettant de résoudre un problème exprimable de façon mathématique. L'enjeu est la reformulation et la résolution de problèmes issus de contextes ou de réalités a priori non mathématiques (provenant souvent d'autres disciplines).

Ainsi sont mises en jeu diverses compétences. Certaines ont déjà été envisagées en première année (TB1), et sont consolidées en seconde année :

1. Engager une recherche, définir une stratégie.
2. Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique.
3. Représenter, changer de registre.
4. Raisonner, démontrer, argumenter...
5. Calculer (symboliquement ou numériquement avec une calculatrice ou un ordinateur), maîtriser le formalisme mathématique.
6. Communiquer à l'écrit et à l'oral.

D'autres constituent des objectifs plus spécifiquement approfondis en seconde année, dans la perspective du concours :

- identifier un problème sous différents aspects ;
- mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes ;
- critiquer ou valider un modèle ou un résultat.

Buts visés

Le programme de mathématiques de TB2 approfondit celui de TB1 et introduit de nouvelles notions, ce qui se traduit par les enjeux suivants :

- Consolider les acquis mathématiques de TB1, notamment en matière de calcul et raisonnement. Par souci de clarté, il a été choisi de numéroter de manière compatible les têtes de chapitre des programmes de TB1 et de TB2.
- Généraliser les concepts introduits en TB1 en augmentant la taille et la complexité des objets étudiés.
- Mettre un accent particulier sur la notion de modélisation, où se confrontent les mathématiques et les autres sciences ; cela peut notamment se concrétiser dans les exemples proposés en cours ou en travaux dirigés, ou dans le cadre des T.I.P.E.

Équilibre entre compétences

Les différentes compétences sont développées puis évaluées (au cours de l'année puis lors du concours) en veillant à leur équilibre. On prend garde en particulier à ne pas surdévelopper une compétence par rapport à une autre.

Les capacités en calcul par exemple (point 5 ci-dessus), lorsqu'elles sont propres aux mathématiques (comme la justification de la convergence d'une série ou d'une intégrale impropre), restent relativement simples, l'objectif n'étant pas ici d'aboutir à une quelconque virtuosité technique. On attend, en la matière, une bonne maîtrise des calculs, concepts et théorèmes mathématiques, dans des situations simples et ordinaires, sans pour autant négliger les compétences 1, 2, 3, 4 et 6.

Contenu

Probabilités

Les probabilités, abordées en première année (TB1) et étudiées selon différentes modalités depuis la classe de troisième, comportent plusieurs aspects.

- ▷ Un approfondissement des notions vues en TB1 : reprise des techniques élémentaires et des raisonnements vus en TB1, et développement de ceux-ci, motivant l'introduction d'outils comme les séries ou les intégrales impropres. Le but n'est pas d'étudier ces objets pour eux-mêmes ; pour ce qui concerne les variables aléatoires à densité, on ne manipule essentiellement que des variables aléatoires à valeurs positives, exception faite de la loi normale.
- ▷ Une importante connexion avec la notion de modélisation : modélisation par des événements, des probabilités conditionnelles, des lois classiques.
- ▷ Une reprise des résultats présentés en classe terminale. Afin de faciliter le travail de l'étudiant dans l'assimilation des connaissances, on reprend ces résultats tels qu'ils sont formulés dans les programmes de classe terminale.

Algèbre linéaire

Dans une démarche d'extension typique des mathématiques, l'algèbre linéaire est étendue en abordant la notion générale d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et la dimension finie est envisagée dans sa généralité (les espaces vectoriels présentés en cours pouvant être de dimension $n \geqslant 4$).

On commence par développer un point de vue « intrinsèque » des applications linéaires avant d'aborder la notion générale de représentation d'un endomorphisme par une matrice dans une base quelconque, visant essentiellement la diagonalisation des matrices ou endomorphismes en dimension restreinte (4 au plus).

En géométrie euclidienne les notions de produit scalaire et de projection orthogonale préparent à l'analyse de données statistiques en grande dimension, qui pourra être abordée dans la poursuite d'études.

Analyse

L'analyse de TB1 est consolidée pendant l'année de TB2. De nouveaux éléments sont introduits (séries et intégrales impropres), qui pour la plupart trouvent leur cadre naturel dans le contexte des probabilités. Par ailleurs, les développements limités (abordés comme outil) permettent d'approfondir l'étude des fonctions et fournissent des exemples d'approximation. Enfin, une première approche des équations différentielles non linéaires permet d'enrichir les liens interdisciplinaires.

La recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes n'est pas un objectif de ce programme.

Les travaux dirigés

Comme en première année, un certain nombre de thématiques, exercices et domaines d'application sont proposés pour aider les étudiants à assimiler les concepts fondamentaux. Ces démarches doivent avoir été pratiquées au cours de l'année ; toutefois, les travaux dirigés ne définissent pas de connaissances supplémentaires exigibles lors des épreuves de concours.

Mathématiques pratiques

Le calcul effectif se fait le plus souvent, aujourd'hui, au moyen d'outils de calcul (logiciel, langage de programmation ou calculatrice), ce qu'il est prévu d'évaluer dans l'oral du concours, où une place importante est faite au calcul numérique et aux représentations graphiques.

Lorsqu'il a paru possible au cours d'un chapitre de mettre en valeur les notions d'approximation, de valeur approchée, de calcul automatisé ou de représentation graphique, on a employé le symbole $\triangle$. Aucune connaissance spécifique sur tel ou tel instrument de calcul (logiciel ou calculatrice) n'est exigible.

Les notions d'algorithmes et de programmation figurant dans le programme d'informatique peuvent intervenir dans les épreuves de mathématiques ; les algorithmes pourront être rédigés soit en langage naturel soit en recourant au langage utilisé pour l'enseignement de l'informatique.

Comme en première année, les situations permettant de mettre en évidence des liens avec les autres enseignements scientifiques sont signalées par un symbole $\rightleftharpoons$. Ces questions sont susceptibles de fournir le cadre d'une épreuve écrite ou orale de mathématiques, mais aucune connaissance spécifique n'est exigible à leur sujet.

Programme de seconde année

La répartition en chapitres proposée ci-dessous est fournie à titre indicatif et ne constitue pas une progression figée ou obligatoire. Les impératifs pédagogiques liés à la préparation aux concours peuvent justifier une organisation différente, sous réserve de maintenir une structure cohérente.

Outils et calculs

Les compléments présentés dans ce chapitre sont essentiellement destinés aux probabilités discrètes.

Exemple de capacité : calculer avec des symboles de sommes.

Contenus	Commentaires
Reprise et extension des règles de calcul sur le symbole $\sum$.	Changements d'indices (translations et symétries), télescopages.
Sommes doubles du type $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant p} a_{i,j}\Big)$.	Les attendus du programme concernant les sommes doubles se limitent au maniement des sommations du type indiqué.

Travaux dirigés

Exercices sur le programme de première année et sur les maniements de sommes.

Algèbre linéaire 3 – Espaces vectoriels

On reprend les notions vues en première année et on les étend à l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 4)$ sur $\mathbf{R}$, puis à tout espace vectoriel sur le corps K (K étant égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), de dimension finie. L'utilisation d'espaces vectoriels de dimension infinie n'est pas un objectif du programme.

Exemples de capacités : démontrer le caractère libre, lié, générateur d'une famille finie de vecteurs ; trouver une base d'un espace vectoriel ; déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel ; calculer le rang d'une famille.

Contenus	Commentaires
Structure d'espace vectoriel.	Les espaces vectoriels suivants doivent être vus à titre d'exemples : K^n, $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.
Sous-espaces vectoriels. Sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de sous-espaces vectoriels. Familles finies de vecteurs, familles génératrices d'un sous-espace vectoriel. Familles libres finies, familles liées finies.	On utilise la notation $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_k)$.
Bases et dimension d'un espace vectoriel, d'un sous-espace vectoriel.	On admet que pour qu'une famille de p vecteurs d'un espace E soit une base de E il suffit que deux des propositions suivantes soit vérifiées : – la famille est génératrice – la famille est libre – la dimension de E est égale à p.

Contenus (suite)	Commentaires
Composantes d'un vecteur dans une base.	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. L'étude des matrices proprement dite est abordée plus loin (Algèbre linéaire 6).
Base canonique de K^n. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la dimension de F est inférieure ou égale à la dimension de E. Si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$. Rang d'une famille finie de vecteurs.	

Travaux dirigés

Calcul du rang de familles finies de vecteurs au moyen de la méthode du pivot de Gauss.
Quelques exemples et exercices illustrant l'espace $\mathbf{R}_n[X]$ en tant qu'un espace vectoriel muni d'une base canonique.

Algèbre linéaire 5 – Applications linéaires

Exemples de capacités : démontrer et exploiter la linéarité d'une application ; déterminer si une application linéaire est injective ou surjective ; déterminer un noyau et une image.

Contenus	Commentaires
a) Définition, opération, noyau et image	
Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes.	Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.
Opérations : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque.	
Noyau, ensemble image, rang d'une application linéaire.	On établit le lien entre le noyau et l'injectivité.
b) Application linaire et dimension finie	
Caractérisation des isomorphismes entre deux espaces vectoriels de dimension finie par l'image d'une base.	
Théorème du rang : $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim E$.	Relation admise.

Travaux dirigés

Utilisation du théorème du rang.

Algèbre linéaire 6 – Matrices à coefficients dans R et C

Exemples de capacités : obtenir la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée ; déterminer un noyau et une image ; opérer un changement de base.

Contenus	Commentaires
a) Représentation par des matrices	
Matrice représentative d'une famille de vecteurs dans une base.	
Matrice d'un endomorphisme, une base ayant été choisie dans l'espace vectoriel E.	On revoit la notion de matrice représentative d'une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ en base canonique, et on l'étend à toute matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. La notion de matrice représentative d'une application linéaire dans un couple de bases n'est pas un attendu du programme.
b) Changements de base	

Contenus (suite)	Commentaires
Changement de base, matrices de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice des composantes d'un vecteur, sur la matrice d'un endomorphisme.	On met en évidence la signification de l'inverse de la matrice de passage.
c) Rang d'une matrice	
Rang d'une matrice.	Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace engendré par une famille de vecteurs représentée par la matrice, et ne dépend pas de la famille envisagée.
Formule $rg(A) = rg({}^tA)$.	Relation admise.
Le rang d'une matrice est le rang du système associé.	Inversement, étant donné un système d'équations linéaires, le rang du système est égal au rang de la matrice associée.
d) Noyau, image d'une matrice	
Interprétation d'une matrice carrée de taille n comme endomorphisme de K^n (muni de la base canonique).	Cette interprétation permet de parler d'image, noyau et de rang de la matrice en lien avec les mêmes notions pour les applications linéaires.

Travaux dirigés

Exercices sur le programme de première année.
Exemples de matrices représentatives simples d'applications linéaires.
Mise en pratique de démarches de changement de base.
Manipulation d'applications linéaires définies sur $\mathbf{R}_n[X]$.

Algèbre linéaire 7 – Géométrie euclidienne dans $\mathbf{R}^n$

Ce chapitre propose une extension très modeste des notions de géométrie euclidienne à l'espace euclidien de dimension n, avec la mise en place d'un résultat fondamental pour les applications, la projection orthogonale sur un sous-espace. Dans ce chapitre, les mots « vecteur » et « point » peuvent être considérés comme interchangeables.

Exemples de capacités : calculer une projection orthogonale, une plus courte distance ; utiliser une base orthonormale adaptée à un problème.

Contenus	Commentaires
a) Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$	
Produit scalaire usuel (ou canonique) dans $\mathbf{R}^n$. Norme euclidienne.	
Vecteurs orthogonaux.	On peut faire observer qu'une famille vecteurs tous non nuls et deux à deux orthogonaux est libre.
Bases orthonormales de $\mathbf{R}^n$.	On souligne le fait que le produit scalaire canonique et la norme euclidienne sont indépendants de la base orthonormale choisie. La matrice de passage P de la base canonique à une base orthonormale vérifie ${}^tPP = I_n$.
b) Projection orthogonale	
Distance entre deux vecteurs (ou points). On appelle projection orthogonale sur un sous-espace F de $\mathbf{R}^n$ un endomorphisme p de $\mathbf{R}^n$ tel que : pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $p(x) \in F$ et pour tout $y \in F$, $p(x) - x$ est orthogonal à y.	

Contenus (suite)	Commentaires
Existence et unicité de la projection orthogonale p sur un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.	On admet qu'il est possible de trouver une base orthonormale du sous-espace F. Écriture de la projection orthogonale dans une base orthonormale de F.
Application : distance d'un vecteur à un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.	Interprétation en tant que démarche d'optimisation ou de meilleure approximation ; en exemple, on peut interpréter l'ajustement affine (régression linéaire) comme une projection sur un sous-espace de dimension 2.

Travaux dirigés

Exercices sur le programme de première année.
Calcul de projections orthogonales dans différents contextes (une base orthonormale adaptée étant fournie).

Algèbre linéaire 8 – Valeurs propres et vecteurs propres

Exemples de capacités : déterminer les éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme ; diagonaliser une matrice, un endomorphisme.

Contenus	Commentaires
a) Éléments propres	
Valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension inférieure ou égale à 4.	
Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée de dimension inférieure ou égale 4.	La recherche pratique des valeurs et vecteurs propres conduit le plus souvent à l'étude d'un système linéaire homogène. On rappelle à ce sujet que les déterminants de taille supérieure à 2 sont hors-programme.
b) Diagonalisation des matrices et des endomorphismes	
Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable.	Il est ici commode de rappeler l'identification d'une matrice carrée à un endomorphisme de K^n, évitant les répétitions inutiles.
Sous-espaces propres d'un endomorphisme.	
La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à la dimension de E.	Résultat admis.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres égale la dimension de E.	Résultat admis.
Toute matrice symétrique réelle de taille inférieure ou égale à 4 est diagonalisable, la matrice de passage P vérifiant $P^{-1} = {}^tP$.	On met en valeur les relations matricielles ${}^tPAP = D$ et ${}^tPP = I$.

Travaux dirigés

Exemples de détermination de valeurs propres, et vecteurs propres.
Exemples d'étude de matrices carrées réelles admettant des valeurs propres complexes.
Exemples élémentaires de diagonalisation.

△ Utilisation d'un logiciel pour simplifier les aspects techniques du calcul matriciel, notamment en ce qui concerne le calcul des puissances et inverses des matrices carrées.

⇌ Exemples de calculs de puissances d'une matrice issus de situations itératives en biologie des populations, en probabilités.

$\rightleftharpoons$ Application à l'étude de certaines suites apparaissant dans des situations issues des probabilités, des sciences biologiques : suites définies par une récurrence linéaire du type $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ ($a, b \in \mathbf{R}$), ou suites récurrentes linéaires « croisées ».

Analyse 3 – Dérivation et développements limités

Ce chapitre élargit certains concepts vus en première année en introduisant les dérivées n-èmes et les développements limités à l'ordre n.

Exemples de capacités : rechercher un développement limité pour une fonction simple ; manipuler des équivalents pour calculer une limite ; mener une démarche d'approximation.

Contenus	Commentaires
a) Limites de fonctions et équivalents	
Théorème de la limite monotone pour les fonctions.	
Fonctions équivalentes, notation $f \underset{a}{\sim} g$.	On se limite aux fonctions ne s'annulant pas sur un intervalle de la forme $]a, b[$ ou $]b, a[$.
L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites. Si la suite (u_n) tend vers a, et deux fonctions f et g sont définies et équivalentes au voisinage de a alors $f(u_n) \sim g(u_n)$.	Le développement reste modeste et se limite aux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage du point de référence.
b) Dérivées n-èmes	
Fonction n fois dérivable en un point ou sur un intervalle, dérivée n-ème d'une fonction.	On peut revoir à cette occasion plusieurs études de fonctions. $\rightleftharpoons$ Lien avec la cinématique du point matériel : vitesse, accélération.
Fonction de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$.	La formule de Leibniz est hors-programme.
c) Développements limités au voisinage de 0.	
Définition de la notation $o(x^n)$ pour désigner des fonctions négligeables devant la fonction $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbf{Z}$ et au voisinage de 0 ou de l'infini.	On se ramène, aussi souvent que nécessaire, à la limite d'un quotient.
Définition des développements limités en 0.	Les problèmes de développement limité en un réel non nul ou en $\pm\infty$ sont ramenés en 0. L'étude des développements asymptotiques ne sont pas un attendu du programme.
Interprétation des développements limités d'ordre 1 et 2 (ou plus si nécessaire) en termes de position relative entre tangente et courbe.	$\triangle$ Usage de logiciels traceurs de courbe.
Opérations sur les développements limités : somme, produit.	L'obtention d'un développement limité pour un quotient ou une fonction composée est présentée et exercée sur des exemples simples.
Primitivation d'un développement limité.	
Développements limités de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(x+1)$ et exp.	Le second est obtenu par primitivation et le troisième par primitivations successives.
Formule de Taylor-Young : existence d'un développement limité à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.	La formule de Taylor-Young peut être admise, ou obtenue par primitivations successives dans le cadre d'une récurrence.
Développements limités usuels au voisinage de zéro des fonctions : cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où α est un réel.	

Travaux dirigés

Exemples de recherche d'équivalents.
Exemples d'approximation d'une courbe au voisinage d'un point.
Études de fonctions d'une variable réelle.

△ Exemple d'approximation numérique des fonctions dérivées : pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x, approximation de $f'(x)$ par $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (expérimentation numérique avec un logiciel ou une calculatrice). On peut majorer l'erreur d'approximation $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right|$ au moyen du théorème des accroissements finis. Cette démarche peut être prolongée avec une présentation de la méthode d'Euler pour les équations différentielles.
△ Expérimentations avec la méthode de Newton pour approcher une solution d'équation de la forme $f(x) = 0$.
⇌ Exemples tirés des sciences biologiques, chimiques ou physiques de systèmes évoluant avec le temps vers un état d'équilibre plus simple et stable ; approche qualitative.

Analyse 6 – Équations différentielles

Ce chapitre consolide les équations différentielles vues en TB1, et présente deux exemples d'équations différentielles non linéaires autonomes.

Exemples de capacités : observer le caractère linéaire ou non d'une équation différentielle et en tirer parti ; résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants ; proposer une résolution formelle pour une équation différentielle autonome très simple.

Contenus	Commentaires
Exemple d'équation différentielle non linéaire autonome : $y' + ky^2 = 0$.	On montre comment obtenir une expression des solutions sans se poser la question d'éventuelles annulations. La définition des équations autonomes est hors programme. Le changement de fonction inconnue peut être envisagé en cours, mais n'est pas un attendu du programme. ⇌ Réactions d'ordre 2 en cinétique chimique (on met en valeur, dans ce contexte particulier, la notion de conditions initiales).
Étude de l'équation logistique $y' = y(1-y)$ dans le seul cas où $0 < y < 1$.	On introduit la fonction auxiliaire $z = \frac{1}{y}$. ⇌ Ce modèle (dit logistique normalisé) trouve sa source en dynamique des populations.

Travaux dirigés

Exercices sur le programme de première année.
△ Utiliser un logiciel ou un algorithme pour tracer des solutions approchées.
⇌ Discussion de stratégies r et K sur le modèle logistique.

Probabilités 2 – Concepts de base des probabilités

Ce chapitre a pour but de développer les variables aléatoires réelles vues en première année, et de compléter et consolider les techniques du calcul des probabilités vues en première année.

On ne soulèvera aucune difficulté théorique sur les notions introduites dans cette partie du programme où un bon nombre de résultats seront admis.

Les séries à termes positifs sont exclusivement introduites en vue du calcul des probabilités. Au cours d'une épreuve de mathématiques les séries ne pourront intervenir que dans le cadre probabiliste.

Les séries considérées seront à termes positifs.

Exemples de capacités : déterminer la nature d'une série ; modéliser un problème par un univers probabilisé ; justifier qu'on dispose d'une probabilité ; exprimer un événement en fonction d'événements plus simples portant sur des variables aléatoires.

Contenus	Commentaires
a) Séries à termes positifs	
Définition, terme général, somme, somme partielle d'ordre n.	
Convergence et divergence d'une série.	On convient d'utiliser le symbole $\sum u_n$ pour désigner la série (sans préjuger de sa convergence).
La somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est définie comme la limite, finie ou infinie, de la suite des sommes partielles. On a l'alternative : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$ ou $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$.	Le symbole $+\infty$ ne peut être manipulé que dans le cadre des sommes de séries à termes positifs. Les règles de calcul sont déduites des propriétés des limites de suites (vues en première année).
Propriétés de linéarité de la somme. Relations sur les sommes $\sum u_n + v_n = \sum(u_n + v_n)$ et $\sum \lambda u_n = \lambda \sum u_n$ pour $\lambda > 0$.	On relie les identités : $(+\infty) + a = +\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $\lambda.(+\infty) = \infty$ (pour $\lambda > 0$) avec les théorèmes correspondants sur les limites de suites.
Sommation des séries géométriques et des séries de terme général nq^n (avec $0 < q < 1$) ; convergence des séries $n^2 q^n$ pour $0 < q < 1$, $\sum \frac{x^k}{k!}$ pour $x > 0$.	On admet la formule $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
Convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum \frac{1}{n}$.	L'étude générale des séries de Riemann est hors programme.
Théorème de comparaison pour deux séries à termes positifs : si deux séries de termes généraux u_n, v_n vérifient $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, alors $\sum_n u_n \leqslant \sum_n v_n$.	Le cas où la série minorante diverge est à considérer. Tout autre critère de comparaison est hors programme.
b) Généralités sur les probabilités	
Extension des définitions données en première année au cas où l'univers est un ensemble infini.	On pourra signaler les problèmes qui peuvent survenir pour la définition de la probabilité d'une partie quelconque de l'univers mais la notion de tribu et les résultats sur la probabilité d'une réunion (respectivement une intersection) croissante (respectivement décroissante) d'événements sont hors programme.
Pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles, expression de $P(\bigcup A_n)$. Révision et extension à ce nouveau cadre des résultats de première année sur les probabilités et sur les probabilités conditionnelles.	
c) Variables aléatoires réelles	
Définition d'une variable aléatoire sur un univers quelconque.	On convient de dire que $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une variable aléatoire si, pour tout intervalle J, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in J\}$ (également noté $(X \in J)$) est un événement. Aucun développement théorique n'est au programme.
Fonction de répartition.	On fait le lien avec la recherche de la probabilité des événements de la forme $(X \leqslant a)$.
Propriétés d'une fonction de répartition.	Résultats admis.
Notion d'indépendance de deux variables aléatoires.	L'indépendance de X et Y est exprimée par rapport aux événements $(X \in I)$ et $(Y \in J)$, où I et J sont des intervalles. La définition de l'indépendance de n variables aléatoires pour $n \geqslant 3$ n'est pas un attendu du programme.

Contenus (suite)	Commentaires
Lorsqu'on a une hypothèse d'expériences indépendantes, les variables aléatoires attachées à ces expériences sont indépendantes.	On admet le résultat suivant : soient deux variables aléatoires X et Y indépendantes, et deux fonctions de variable réelle u, v telles que $u(X)$ et $v(Y)$ soient des variables aléatoires, alors $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendantes.

Travaux dirigés

Exercices sur le programme de première année.
Calculs de sommes de séries, démonstrations de convergences, les exemples proposés restant assez simples.
△ Utiliser une représentation graphique de la suite des sommes partielles pour conjecturer la nature ou la valeur de la somme d'une série.
Expression d'événements complexes à partir d'événements de la forme ($X \in J$), J étant un intervalle.

Probabilités 3 – Variables aléatoires discrètes

Exemples de capacités : modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une variable aléatoire ; exprimer un événement en fonction de variables aléatoires et calculer sa probabilité ; démontrer que deux variables sont indépendantes ; élaborer une hypothèse d'indépendance et l'utiliser pour calculer des probabilités.

Contenus	Commentaires
a) Définitions	
On étendra la définition vue en première année au cas où l'ensemble des valeurs prises est contenu dans l'ensemble des entiers positifs.	
Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.	Diagramme en bâtons.
Fonction de répartition.	Représentation graphique.
Détermination de la loi de la variable aléatoire à partir de la fonction de répartition.	On fait le lien avec les statistiques descriptives.
b) Espérance	
Espérance d'une variable aléatoire discrète positive.	
Théorème de transfert : expression de l'espérance de $\Phi(X)$, où Φ est une fonction numérique et X une variable aléatoire discrète.	On se limite au cas où Φ est une fonction positive. Ce résultat est admis.
Linéarité de l'espérance ($E(X+\lambda Y) = E(X)+\lambda E(Y)$ pour $\lambda > 0$).	Résultat admis.
Variance et écart-type.	La formule de König-Huygens $E(X - E(X)) = E(X^2) - E(X)^2$ doit être connue. On fait le lien avec les statistiques descriptives.
c) Expériences et variables aléatoires indépendantes	
Expression de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes dont on connait les lois.	L'indépendance mutuelle de plus de deux variables aléatoires peut être mentionnée mais n'est pas un attendu du programme.
Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.	Résultat admis.
Variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.	
d) Lois classiques	

Contenus (suite)	Commentaires
Présentation des lois classiques : – loi certaine, – loi uniforme discrète, – loi de Bernoulli, – loi de Poisson.	Exception faite de la loi de Poisson, les étudiants devront savoir reconnaître les situations classiques de modélisation pour ces lois. L'espérance et la variance de ces lois doivent être connues.
e) Schéma de Bernoulli et conséquences Formalisme du schéma de Bernoulli. Présentation des lois suivantes dans le cadre d'un schéma de Bernoulli : – loi binomiale, – loi géométrique. Somme de deux variables binomiales indépendantes de même paramètre réel p.	Les étudiants devront savoir reconnaître les situations classiques de modélisation pour ces lois. L'espérance et la variance de ces lois doivent être connues. La loi hypergéométrique peut être étudiée en exercice mais ne constitue pas un attendu du programme.

Travaux dirigés

Calculs de lois, d'espérances et de variances.

Exemples d'extension des notions précédentes à des variables aléatoires discrètes non positives.

Reconnaissance de loi lors de la modélisation de problèmes.
△ Au vu de tableaux ou de diagrammes en bâtons, proposer une loi pouvant modéliser un phénomène.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson (qui justifie ainsi la loi de Poisson comme modèle du nombre d'occurrences de certains événements rares).

⇌ Exemples variés de lois discrètes issues de contextes liés aux autres disciplines et à la vie courante.

Probabilités 4 – Variables aléatoires à densité

Les fonctions continues par morceaux et l'intégrale impropre sont introduites pour définir les variables aléatoires à densité. En dehors de questions probabilistes, les intégrales généralisées ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation.

Exemples de capacités : montrer qu'une fonction est une fonction de densité ; justifier le fait qu'une variable aléatoire admet une densité ; employer les intégrales impropres au sein d'un problème de probabilités ; calculer la probabilité d'un événement exprimé à l'aide de variables aléatoires ; calculer une espérance et une variance.

Contenus	Commentaires
a) Fonctions continues par morceaux Définition d'une fonction continue par morceaux sur **R**. Généralisation de la notion d'intégrale aux fonctions continues par morceaux. Propriétés.	 Les fonctions considérées n'ont qu'un nombre fini de discontinuités (et admettent des limites à droite et à gauche en tout point). On évitera les développements théoriques pour se consacrer aux calculs pratiques. On pourra admettre la plus grande partie des adaptations aux fonctions continues par morceaux des résultats mis en place pour les fonctions continues.

Contenus (suite)	Commentaires
Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et soit a un réel, étude des propriétés de la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Croissance dans le cas où f est positive, continuité et dérivabilité.	Résultats admis.
b) Définition de l'intégrale impropre	
Définition de l'intégrale d'une fonction positive continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, sur un intervalle de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$. Convergence et divergence.	On souligne l'importance du théorème de la limite monotone pour démontrer une convergence. On convient que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (resp. $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$), ou bien est fini, ou bien vaut $+\infty$. Interprétation de ces quantités en termes de limites d'aire.
Utilisation d'une primitive.	L'exemple fourni par les intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$ est choisi comme illustration.
L'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.	Résultat admis.
c) Propriétés	
Relation de Chasles. Linéarité.	
Intégrale généralisée et relation d'ordre.	Résultat admis.
Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.	Si la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur un intervalle d'extrémités a et b ayant des limites $\alpha = \lim_a \varphi$ et $\beta = \lim_b \varphi$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β, alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ou divergent simultanément, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.
d) Convergence	
Théorème de comparaison pour deux fonctions positives f et g telles que $f \leqslant g$ au voisinage de la borne considérée.	Tout autre critère de comparaison est hors programme.
e) Généralités sur les variables aléatoires à densité	
Densité de probabilité. Une fonction de densité est une fonction définie sur $\mathbf{R}$, continue par morceaux, positive, dont l'intégrale impropre converge et vaut 1.	
Variable aléatoire positive admettant une densité : expression de la fonction de répartition.	
Sur des exemples simples, recherche de la loi de la variable $Y = f(X)$, X ayant une densité connue.	On peut prendre comme exemples $Y = X^2$, $Y = aX + b$, etc.
Espérance, variance et écart-type de variables aléatoires positives à densité.	On fait une analogie avec le cas discret.
Formule de König-Huygens .	
Théorème de transfert.	
Brève extension des notions précédentes aux variables aléatoires réelles à densité.	Tous les résultats sont admis.
f) Lois classiques	
Étude des lois classiques : loi uniforme, loi exponentielle, loi normale.	Transformation pour se ramener à la loi normale centrée réduite.
Fonction des quantiles.	On fait remarquer que les fonctions de répartition des lois exponentielles et normales sont strictement monotones et continues sur leurs intervalles de définition respectifs. Les fonctions réciproques, nommées « fonctions des quantiles », sont souvent notées u ; interprétation et exemples d'emploi de la fonction u.

Contenus (suite)	Commentaires
Espérance et variance de ces lois.	L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi normale fait apparaitre une intégrale d'une fonction non positive ; on lui donne un sens au moyen d'un découpage. Les espérances et variances des lois mentionnées doivent être connues.

Travaux dirigés

Exemples d'étude de convergence d'intégrales impropres en lien avec des variables aléatoires et leurs espérances.
Exemples de calculs de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires à densité.
△ Simulation des lois uniforme, exponentielle, normale en utilisant un logiciel ou une calculatrice.
⇌ Exemples de phénomènes naturels pouvant être modélisés par des lois uniformes, exponentielles, normales.

Probabilités 5 – Couples de variables aléatoires discrètes

Exemples de capacités : trouver les lois marginales ; calculer une covariance ; calculer la probabilité d'un événement simple exprimé en fonction de deux variables aléatoires.

On se limite ici aux couples de variables aléatoires dont l'une au moins est finie et prend au plus quatre valeurs.

Contenus	Commentaires
Notation (X, Y). Loi conjointe. Lois marginales. Lois conditionnelles. Covariance.	 Interprétation de la notion d'indépendance.

Travaux dirigés

Exemples de détermination de la loi des variables X et Y à partir de la loi d'un couple discret (X, Y).

Probabilités 6 – Théorèmes limites et prise de décision

Ce chapitre met en place un contexte d'étude de phénomènes limites, amenant à une reprise en situation de quelques résultats simples de statistique inférentielle figurant dans le programme de la classe terminale STL ; les liens avec les autres chapitres sont évidemment à souligner.

Exemples de capacités : approcher une loi binomiale par une loi normale ; déterminer et exploiter un intervalle de fluctuation ; donner un intervalle de confiance.

Contenus	Commentaires
a) Lois des grands nombres Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour des variables aléatoires positives. Loi faible des grands nombres. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.	 Résultat admis.
b) Intervalle de fluctuation d'une fréquence	

Contenus (suite)	Commentaires
Intervalle de fluctuation asymptotique à 95% d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n : $$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$ lorsque la proportion p dans la population est connue.	Résultat admis. Il est possible de mettre en évidence le lien entre la constante 1,96 et la valeur de la fonction des quantiles associée à la loi normale centrée réduite au point 0,95.
Test d'hypothèse portant sur une proportion : hypothèse nulle, hypothèse alternative.	À l'aide d'intervalle de fluctuation on parvient à rejeter, ou non, l'hypothèse nulle. La notion d'erreurs de première et de seconde espèce n'est pas un attendu du programme.
c) Intervalle de confiance d'une proportion	
Estimation d'une proportion inconnue avec un niveau de confiance de 95% par l'intervalle $$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$ calculé à partir d'une fréquence f obtenue sur un échantillon de taille n.	Résultat admis. On fait constater par simulation que, pour $n \geqslant 30$, sur un grand nombre d'intervalles de confiance, environ 95 % contiennent la proportion à estimer.
Test de l'égalité de deux proportions à l'aide des intervalles de confiance à 95% correspondant aux fréquences de deux échantillons de taille n.	La différence entre les deux fréquences observées est considérée comme significative quand les intervalles de confiance à 95% sont disjoints.

Travaux dirigés

On utilisera les résultats précédents pour donner des ordres de grandeurs pour des probabilités issues de problèmes concrets.

△ Observation d'une convergence par rapport à un intervalle de fluctuation.
⇌ Acceptabilité d'un résultat.
⇌ Incertitude de mesure associée à un niveau de confiance.
⇌ Méthodes statistiques pratiquées en biologie et en biotechnologies.
⇌ Dénombrement bactérien en milieu solide.

Analyse 7 – Notions sur les fonctions réelles de plusieurs variables réelles

Ce chapitre met en place, très simplement, le vocabulaire et la problématique des fonctions de plusieurs variables. En Mathématiques, on se limite aux fonctions de deux variables (suffisamment lisses) tout en faisant observer qu'il n'y a pas plus de difficulté à aborder des phénomènes à trois variables.

Exemples de capacités : calculer des dérivées partielles, des dérivées partielles d'ordre deux ; déterminer les extrémums possibles d'une fonction de deux variables.

Contenus	Commentaires
a) Notion de fonction de plusieurs variables et de dérivées partielles	
Définition d'une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.	Retour sur la notion d'applications de E dans F vue en première année.
Fonction partielle par rapport à une variable. Dérivée partielle par rapport à une variable	⇌ Notion de coupe sur un milieu (tissu vivant, terrain).
b) Extrémums d'une fonction de plusieurs variables	

Contenus (suite)	Commentaires
Fonctions continues.	On introduit cette notion à partir d'exemples simples et à l'aide d'un support graphique. On utilise la notion de rectangle de $\mathbf{R}^2$ qui généralise celle d'intervalle de $\mathbf{R}$ afin d'exprimer la continuité. Étudier la continuité d'une fonction n'est pas un attendu du programme.
Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.	
Dérivée dune expression de la forme $f(x(t), y(t))$, les fonctions f, x, y étant de classe $\mathcal{C}^1$.	Résultat admis.
Notion d'extrémum local.	Cette notion est exprimée à l'aide des rectangles.
Les dérivées partielles d'une fonction $\mathcal{C}^1$ s'annulent en tout extrémum local de la fonction.	
c) Dérivées d'ordre deux.	
Dérivées partielles d'ordre deux.	Les notations de Monge comme le théorème de Schwarz sont hors-programme.

Travaux dirigés

Détermination d'extrémums dans des problèmes faisant intervenir deux variables.

$\triangle$ Représentation graphique d'une surface et détermination visuelle des extrémums.

$\rightleftharpoons$ Exemples de lois physiques s'exprimant avec des dérivées partielles premières ou secondes (notamment en thermodynamique et à propos des gaz parfaits). La notion de différentielle, vue en physique, peut être évoquée à ce moment.