Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **scientifique**

Voie : **Technologie et sciences industrielles (TSI)**

Discipline : **Mathématiques**

Seconde année

Classe préparatoire TSI deuxième année
Programme de mathématiques

Table des matières

Le programme de mathématiques de TSI2, dans le prolongement de celui de TSI1, s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.

Objectifs de formation

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.
Dans ce cadre, la formation mathématique vise le développement des compétences générales suivantes :

– **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
– **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
– **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique . . .) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
– **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
– **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable, à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel. . .), contrôler les résultats ;
– **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique.
La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemple, la géométrie apparaît comme un champ d'utilisation des concepts développés en algèbre linéaire et en analyse ; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques et les sciences industrielles ; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.
C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques, chimiques ou industriels (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques…).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés. **Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires** afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :
– prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements ;
– connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques ;
– prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.
Il a été conçu pour s'adapter aux intentions de la réforme des séries STI2D et STL. Les étudiants de cette série ont désormais pour vocation d'entrer dans un cycle long de formation supérieure : le programme de mathématiques se doit d'être d'une ambition réaliste. Les grands équilibres du programme n'ont pas été modifiés. C'est ainsi que les deux grands axes « Analyse et géométrie » et « Algèbre et géométrie » demeurent présents. S'y ajoute un enseignement de probabilités visant à prolonger les notions figurant dans le programme de TSI1 et à préparer celles qui seront ultérieurement introduites dans les grandes écoles. Les probabilités permettent de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des ponts avec les autres disciplines, et d'enrichir les thèmes susceptibles d'être abordés lors du TIPE.

La géométrie, en tant qu'outil de modélisation et de représentation, est intégrée à l'ensemble du programme, qui préconise le recours à des figures pour aborder l'algèbre linéaire et préhilbertienne, les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et le calcul différentiel.

Le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année, introduit la notion de déterminant et aboutit à la théorie de la réduction dont il développe quelques applications. Le second, consacré à l'algèbre euclidienne, met l'accent sur les relations entre les points de vue matriciel et géométrique, notamment à travers l'étude des isométries vectorielles en dimensions deux et trois. La réduction des matrices symétriques réelles permet de faire le lien entre ces deux volets.

Le programme d'analyse est introduit par l'étude des fonctions vectorielles d'une variable réelle qui s'attache à relier les registres analytique et géométrique en développant l'étude affine des arcs paramétrés.
L'étude de l'intégration, entamée en première année dans le cadre des fonctions continues sur un segment, se poursuit dans celui des fonctions continues sur un intervalle quelconque. L'intégrale généralisée est un intermédiaire à l'introduction de la notion de fonction intégrable.
Le chapitre relatif aux séries numériques a pour objectif la détermination de la nature d'une série par comparaison avec les séries de référence et se limite au cas de la convergence absolue. Il constitue une introduction à l'étude des séries entières et des séries de Fourier. En étroite articulation avec les concepts propres aux sciences physiques et aux sciences de l'ingénieur, le chapitre sur les séries de Fourier valorise les interprétations en termes de signaux.
L'étude des équations et des systèmes différentiels est limitée au cas linéaire, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'origine analytique. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet de mettre en œuvre des techniques de réduction matricielle. Dans le cas des équations différentielles d'ordre deux à coefficients continus, la recherche de solutions sous la forme de sommes de séries entières établit un lien entre deux parties importantes du programme d'analyse.
Le chapitre relatif au calcul différentiel à plusieurs variables est limité au cas des fonctions numériques de deux ou trois variables réelles. Il fournit des méthodes et des outils opérationnels pour résoudre des problèmes pouvant être issus d'autres disciplines scientifiques (recherche d'extremums, équations aux dérivées partielles). Il comporte un paragraphe présentant les premières notions de géométrie différentielle et favorise ainsi les interprétations et visualisations géométriques.

L'enseignement des probabilités consolide et complète l'étude traitée en première année sur un univers fini et aborde le cadre d'un univers dénombrable. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes, en prolongement des variables finies, ce qui permet d'élargir aux processus stochastiques à temps discret le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
Le programme est décliné en chapitres. Chaque chapitre comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.

En particulier, l'ordre de présentation des différents chapitres ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

– celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
– celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
– celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.
Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.
Les liens avec les disciplines scientifiques et technologiques sont identifiés par le symbole $\leftrightarrows$ PC pour la physique et la chimie, $\leftrightarrows$ SI pour les sciences industrielles de l'ingénieur et $\leftrightarrows$ I pour l'informatique.
On pourra aussi se reporter à l'annexe aux programmes *Outils mathématiques pour la physique-chimie*.

Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

– pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est en effet d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Quel que soit le contexte (cours, travaux dirigés), la pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants ;
– didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective d'une problématique avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, mais aussi des questions d'actualité ou des débats d'idées, permet de motiver son enseignement.

Programme

Compléments d'algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, hyperplans, sous-espaces stables, trace ;*
- *passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques en dimensions 2 et 3 et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Familles quelconques de vecteurs	
Famille libre, famille génératrice, base.	Extension des résultats vus en première année sur les familles finies.
Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.	Toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\deg(P_k) = k$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
b) Sous-espaces vectoriels	
Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe. En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe.	Par définition, la somme F de p sous-espaces F_i est directe si tout vecteur de F se décompose de manière unique selon les F_i. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Pour $p \geqslant 3$, toute autre caractérisation est hors programme.
Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie n, défini comme sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Équations d'un hyperplan. Caractérisation comme sous-espace admettant une droite comme supplémentaire.	Interprétation géométrique en dimensions 2 et 3.
c) Sous-espaces stables	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Matrice dans une base adaptée.	Les étudiants doivent savoir interpréter une forme matricielle par blocs en termes de sous-espace stable, et inversement. On peut notamment s'appuyer sur les exemples des projecteurs et symétries, déjà étudiés en première année.
d) Matrices	
Trace d'une matrice. Linéarité. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.	
Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.	Notation A^{T}. Matrice symétrique, antisymétrique.

Déterminants

Ce chapitre développe une théorie du déterminant des matrices carrées, puis des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Il met en évidence l'aspect algébrique (caractérisation des matrices inversibles) et l'aspect géométrique (volume orienté).

Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd.

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée	
Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que : (i) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ; (ii) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ; (iii) le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1.	Notation det. La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Interprétation géométrique de cette définition pour $n \in \{2, 3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	
Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes.	⇆ I : calcul du déterminant d'une matrice.
Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.	
Déterminant d'un produit de matrices carrées	Démonstration hors programme.
Déterminant de l'inverse.	
Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.	Démonstration hors programme. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	Démonstration non exigible. La notion de comatrice est hors programme.
c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.	La formule de changement de bases pour un déterminant est hors programme. Traduction sur les déterminants d'endomorphismes des propriétés vues sur les déterminants de matrices.

Réduction d'endomorphismes

Ce chapitre étudie la réduction des matrices et des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires dont la résolution repose sur des outils similaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres et polynôme caractéristique	
Valeur propre, vecteur propre, sous-espaces propre d'un endomorphisme. Spectre. Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.	Interprétation en termes de droite stable. Notation Sp. ⇆ SI : matrice d'inductance, d'inductance cyclique et d'inductance homopolaire.
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.	Le polynôme caractéristique, défini par la fonction polynomiale $x \mapsto \chi_f(x) = \det(x\mathrm{Id}_E - f)$, est de coefficient dominant égal est 1.
Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Comparaison entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.	
Éléments propres d'une matrice.	Extension des définitions et de ces résultats aux matrices.
b) Endomorphismes et matrices diagonalisables	
Un endomorphisme est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé. Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.	
Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Extension des résultats précédents au cas des matrices. ⇆ SI : machines électriques.
c) Endomorphismes et matrices trigonalisables	
Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.	Démonstration hors programme. Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme.
Expression du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction des valeurs propres.	Extension des résultats aux matrices. ⇆ I : calcul de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux puissances itérées consécutives.
d) Applications de la réduction	
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Structure de l'ensemble des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Équation caractéristique. Base de solutions.	On se limite au cas homogène. Les étudiants doivent savoir traduire une récurrence scalaire d'ordre 2 en une récurrence vectorielle d'ordre 1 du type $X_{n+1} = AX_n$. Ils doivent connaître la forme des solutions, à l'aide de la résolution de l'équation caractéristique.

Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Ce chapitre fournit l'occasion de revoir une partie des notions abordées dans le cours d'analyse de première année. L'étude des fonctions vectorielles en dimension inférieure ou égale à trois permet de présenter des résultats utiles dans les autres disciplines scientifiques et introduit le paragraphe sur les courbes paramétrées. Dans ce cadre, le but est de tracer des courbes sans support logiciel quand les calculs se prêtent à un tracé rapide. Pour des calculs dont la gestion relève d'une technicité excessive, on utilise un outil informatique qui permet en plus de mettre en évidence des problèmes d'échelle et de restriction d'intervalle. L'étude des courbes définies par une équation polaire est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$	
Continuité et dérivabilité (éventuellement à gauche ou à droite) en un point ou sur un intervalle.	Ces notions sont définies à l'aide des fonctions coordonnées. Les étudiants doivent savoir interpréter géométriquement et cinématiquement la notion de dérivée en un point. ⇆ PC/SI : cinématique.
Dérivée d'une somme de deux fonctions vectorielles, du produit d'une fonction à valeurs réelles et d'une fonction à valeurs vectorielles. Applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I. Espace vectoriel $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$. Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (éventuellement orienté), dérivation d'un produit scalaire, d'une norme, d'un déterminant et d'un produit vectoriel.	
b) Courbes paramétrées	
Rappels sur les graphes de fonctions réelles d'une variable réelle, tangente à un tel graphe.	
Courbe paramétrée. Tangente en un point.	La tangente en un point est définie comme la limite des sécantes.
Exemples de constructions d'arcs plans.	Les étudiants doivent savoir exploiter les propriétés des fonctions (parité, périodicité) afin de restreindre l'ensemble d'étude. L'étude des points stationnaires et des courbes asymptotes est hors programme. ⇆ I : tracé de courbes paramétrées.
Caractérisation de la tangente à partir du premier vecteur dérivé non nul.	L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.
Cas particulier d'un point régulier.	Interprétation cinématique.
Position relative locale de la courbe par rapport à sa tangente.	Les étudiants doivent savoir utiliser les développements limités de chacune des composantes.
Longueur d'un arc paramétré régulier de classe $\mathscr{C}^1$.	L'abscisse curviligne est hors programme.

Intégration d'une fonction continue sur un intervalle

L'objectif de ce chapitre est double :

- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues, la notion de fonction intégrable.*

L'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.
Les fonctions considérées sont continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle	
Pour $f : [a, b[\to \mathbb{K}$, $b > a$ ou $b = +\infty$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures. Si tel est le cas, on note cette limite $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.	
Théorèmes de comparaison pour les fonctions à valeurs réelles, continues et de signe constant sur $[a, b[$, sous l'hypothèse $f \leqslant g$ ou $f(t) \underset{\substack{t \to b \\ t<b}}{\sim} g(t)$.	Il suffit de vérifier l'hypothèse $f \leqslant g$ au voisinage de b.
Adaptation aux fonctions définies sur un intervalle $]a, b]$, avec $a < b$ ou $a = -\infty$, puis sur un intervalle $]a, b[$.	
Intégrales de référence : $$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t,\ \int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$$	Les étudiants doivent connaître la nature de $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ selon le signe de α.
Relation de Chasles.	
Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction φ strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ avec $a = \lim\limits_{t \to \alpha} \varphi(u)$ et $b = \lim\limits_{t \to \beta} \varphi(u)$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
b) Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle	
Une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite intégrable sur I si $\int_a^b \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ est convergente, où $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.	Notation $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. L'intégrabilité sur I est équivalente à l'intégrabilité sur l'intérieur de I.
Si f est intégrable sur I, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.	Démonstration non exigible.
Linéarité, positivité et croissance de l'application $f \mapsto \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Espace vectoriel des fonctions continues intégrables sur I.	
Si f est continue et intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $$\left\lvert \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert \leqslant \int_I \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration non exigible pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Si f est une fonction continue sur I et telle que $\int_I \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle sur I.	

Séries numériques

L'étude des séries prolonge celle des suites et prépare celle des séries entières et des séries de Fourier. Elle permet de mettre en œuvre l'analyse asymptotique et de mieux appréhender la notion de nombre réel à travers celle de développement décimal. L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Série à termes réels ou complexes ; sommes partielles ; convergence ou divergence ; en cas de convergence, somme et restes.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Les étudiants doivent savoir prouver qu'une série diverge grossièrement en étudiant la limite du terme général.
Séries géométriques : sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, valeur de la somme en cas de convergence. Une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.	
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si (u_n) et (v_n) sont positives et si, pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$, et $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$	
Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ est équivalente à celle de $\sum u_n$.	
Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert.	Toute autre règle de comparaison est hors programme.
Théorème de comparaison séries-intégrales : si $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.	Sur des exemples simples, application à l'étude asymptotique de sommes partielles ou de restes.
Séries de Riemann.	Les étudiants doivent savoir comparer une série à termes positifs à une série de Riemann.
c) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.	
La convergence absolue implique la convergence.	Démonstration non exigible. La notion de semi-convergence est hors programme.
Inégalité triangulaire.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Développement décimal d'un nombre réel	
Développement décimal d'un nombre réel.	Aucune démonstration n'est exigible. On indique la caractérisation des nombres rationnels par la périodicité de leur développement décimal à partir d'un certain rang. ⇆ I : représentation des nombres en informatique. ⇆ SI : électronique embarquée.

Séries entières

Les séries entières considérées sont à coefficients réels ou complexes. La variable est réelle ou complexe. Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :
- *étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant au cas d'une variable réelle ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

La théorie des séries entières sera appliquée à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence d'une série entière	
Série entière d'une variable réelle ou complexe. Lemme d'Abel : étant donné un nombre réel $r>0$, tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert<r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence défini comme borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels $r\geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.	Si le rayon de convergence R est un réel strictement positif, alors pour $\lvert z\rvert<R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour $\lvert z\rvert>R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.	Toute étude systématique de la convergence sur le cercle de convergence est exclue.
Si $\lvert a_n\rvert\leq\lvert b_n\rvert$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$. Si $\lvert a_n\rvert\sim\lvert b_n\rvert$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à celui de $\sum b_n z^n$.	La règle de d'Alembert relative aux séries entières est hors programme.
Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.	Démonstration non exigible.
b) Somme d'une série entière d'une variable réelle	
Fonction somme, domaine de définition.	
La fonction somme est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.	Démonstration hors programme.
La fonction somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme.	Démonstration hors programme.
Intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	Démonstration hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Fonctions développables en série entière	
Fonction développable en série entière au voisinage de 0. Unicité du développement en série entière. Développements en série entière usuels : $$\frac{1}{1-x};\quad \ln(1+x);\quad e^x;$$ $$(1+x)^\alpha;\quad \cos(x);\quad \sin(x).$$	Lien avec la série de Taylor. Les étudiants doivent savoir utiliser l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour déterminer un développement en série entière.
d) Exponentielle complexe	
Expression admise pour un nombre complexe z de $\exp(z)$ (ou e^z) comme somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.	En première année, l'exponentielle complexe est définie par la relation $$e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$ où x et y sont deux réels quelconques.

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :
- *introduire les notions fondamentales liées à la structure préhilbertienne ;*
- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions 2 et 3 en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *traiter la réduction des matrices symétriques réelles et l'appliquer à la classification et à l'étude des coniques.*

A - Structure préhilbertienne

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire et norme	
Produit scalaire. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$. Norme associée à un produit scalaire, distance associée. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Identité du parallélogramme, identité de polarisation.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$. Sur les espaces de fonctions et de polynômes, on donne des exemples de produits scalaires définis par une intégrale.
b) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel F. Théorème de Pythagore. Famille orthogonale, famille orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $F^\perp$. Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre l'algorithme dans le cas d'un nombre restreint de vecteurs. $\leftrightarrows$ I : détermination d'une base orthonormée de polynômes.

Contenus	Capacités & Commentaires
Existence de bases orthonormales en dimension finie. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale ; expression du produit scalaire et de la norme.	

c) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	Les étudiants doivent savoir déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur un sous-espace F en calculant son expression dans une base orthonormale de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F. ⇆ I : programmation de ces méthodes. ⇆ SI : identification paramétrique.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui minimise $\|x - y\|$ avec $y \in F$. Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	Notation $d(x, F)$.

B - Isométries d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale. Symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace. Réflexion.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie ici les propriétés conférant à $\mathrm{O}(E)$ une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Si un sous-espace est stable par une isométrie vectorielle, son orthogonal est stable par cette isométrie.	

b) Matrices orthogonales

Matrice orthogonale : définition par l'égalité $A^{\mathrm{T}}A = I_n$, caractérisation à l'aide des colonnes ou des lignes.	
Groupe orthogonal d'ordre n.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n)$.
Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormale de E, une base $\mathscr{B}$ de E est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est orthogonale. Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est une isométrie vectorielle de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u)$ est orthogonale.	
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle.	Application à l'orientation d'un espace euclidien et à la notion de base orthonormale directe.
Isométrie vectorielle positive, négative (directe, indirecte). Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SO}(E)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Classification en dimensions 2 et 3	
Description du groupe orthogonal en dimensions 2 et 3.	Utilisation des éléments propres pour la classification des isométries. Les étudiants doivent savoir déterminer les caractéristiques géométriques d'une isométrie.
d) Matrices symétriques réelles	
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux. Théorème spectral : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $D = P^{-1}AP$.	Démonstration hors programme. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme. ⇆ PC/SI : matrice d'inertie.

Séries de Fourier

L'étude des séries de Fourier est présentée dans le cadre des fonctions T-périodiques, continues par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ce chapitre développe des compétences de calcul à travers celui des coefficients de Fourier et l'application du théorème de Parseval. L'interprétation géométrique de la n-ième somme de Fourier comme projection orthogonale relie les points de vue analytique et géométrique de la théorie. Ce chapitre est aussi particulièrement favorable aux interactions entre les disciplines.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Complément sur les fonctions définies par morceaux	
Une fonction définie sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable comme fonction continue (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$) sur $[a_i, a_{i+1}]$.	
Une fonction T-périodique est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) si elle est continue (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$) sur une période.	Interprétation graphique. ⇆ PC/SI : signaux physiques ; dualité temps-fréquence.
Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, T-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.	
Intégrale sur une période d'une fonction T-périodique et continue par morceaux.	Extension rapide de la définition et des propriétés de l'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux.
b) Coefficients et séries de Fourier	
Coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction f.	Notation $a_k(f)$ et $b_k(f)$ ou, plus simplement, a_k et b_k. Le coefficient a_0 est défini comme la valeur moyenne sur une période.
Cas des fonctions paires, impaires.	
Dans le cas des fonctions vérifiant la relation $f\left(x+\dfrac{T}{2}\right) = -f(x)$, tous les coefficients d'indices pairs sont nuls.	⇆ SI : symétrie de glissement.

Contenus	Capacités & Commentaires
Sommes partielles de Fourier d'une fonction f définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \text{ où } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$	Dans le cas des fonctions continues, interprétation géométrique de $S_n(f)$ comme la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \cos(k\omega t)$ et $t \mapsto \sin(k\omega t)$ ($k \in [\![0, n]\!]$) pour le produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Théorèmes de convergence

Théorème de Parseval : si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et : $$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$	Démonstration hors programme. Interprétation géométrique du théorème de Parseval dans le cas des fonctions continues. Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques. ⇆ PC/SI : puissance, valeur efficace, taux de distorsion.
Théorème de Dirichlet : si f est une fonction T-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point et $$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\big(f(t+h) + f(t-h)\big)$$	Démonstration hors programme. On appelle régularisée de f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\big(f(t+h)+f(t-h)\big)$. ⇆ I : tracé de sommes partielles de Fourier d'une fonction.
Cas où f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.	Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques. ⇆ PC/SI : décomposition en harmoniques.

Probabilités

A - Compléments sur les variables aléatoires réelles finies

Ce sous-chapitre a pour objectifs de consolider les acquis de première année sur les variables aléatoires réelles finies et d'étendre les résultats au cas de n variables aléatoires. Dans ce cadre, l'accent est mis sur les couples. Les vecteurs aléatoires ne sont introduits que dans le but d'interpréter une loi binomiale comme une somme de lois de Bernoulli indépendantes. La notion d'espace probabilisé produit n'est pas au programme. L'univers est supposé fini.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Couple de variables aléatoires

Couple de variables aléatoires. Loi du couple ou loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.	La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y), les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	

b) Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes : pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si X et Y sont indépendantes, pour tout $(A,B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P\big((X,Y) \in A \times B\big) = P(X \in A)P(X \in B).$$	Démonstration hors programme.
Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.	Démonstration hors programme.
Variables aléatoires mutuellement indépendantes : si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, $$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$	
Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors quel que soit $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.	Démonstration hors programme.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Démonstration hors programme.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Les étudiants doivent savoir interpréter une loi binomiale comme une somme de lois de Bernoulli indépendantes.

c) Covariance et coefficient de corrélation linéaire

Covariance d'un couple de variables aléatoires.	Notation $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
Variance de $aX + bY$.	
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X,Y)$.
Inégalité $\lvert\rho(X,Y)\rvert \leqslant 1$.	Analogie avec la formule donnant le cosinus d'un angle formé par deux vecteurs à partir du produit scalaire et des normes.
Caractérisation des égalités $\rho(X,Y) = 0$ et $\rho(X,Y) = \pm 1$.	
Si X et Y sont indépendantes, $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y); \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0;$$ $$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y).$$	Les réciproques sont fausses en général.

B - Probabilités sur un univers dénombrable

On aborde dans ce sous-chapitre l'étude des probabilités sur un univers dénombrable afin de modéliser les processus stochastiques à temps discret. Les résultats démontrés en première année dans le cadre d'un univers fini sont étendus sans démonstration. La construction d'espaces probabilisés modélisant notamment une suite d'expériences aléatoires indépendantes est hors de portée à ce niveau. On se limite au cas où l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω. La notion de tribu est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces probabilisés dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il peut être décrit en extension par $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.	Dénombrabilité de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.
Expérience aléatoire, événements. Suite infinie d'événements ; union et intersection. Système complet d'événements. On appelle probabilité sur Ω toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_k)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles : $$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$	Extension des définitions vues en première année. Les étudiants doivent faire le lien entre point de vue probabiliste et point de vue ensembliste.
b) Indépendance et conditionnement	
Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$	On la note aussi $P(A\,\vert\,B)$. L'application P_B est une probabilité.
Formules des probabilités composées.	Brève extension des résultats vus dans le cadre d'un univers fini.
Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et, $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\,\vert\,A_n)\,P(A_n)$$	La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
Formules de Bayes : si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, alors, $$P(A\,\vert\,B) = \frac{P(B\,\vert\,A)\,P(A)}{P(B)}$$	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A\,\vert\,B) = P(A)$.
Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

C - Variables aléatoires discrètes

L'utilisation de variables aléatoires pour modéliser des situations simples dépendant du hasard fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite en pratique aux variables aléatoires définies sur un univers dénombrable.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Variable aléatoire réelle	
Une variable aléatoire réelle X est une application définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation P_X.
Loi de probabilité.	
L'application P_X est définie par la donnée des $P(X=x)$ pour x dans $X(\Omega)$.	
Fonction de répartition ; croissance.	$F_X(x) = P(X \leqslant x)$. La connaissance des propriétés générales des fonctions de répartition n'est pas exigible. Les étudiants doivent savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition.
Image d'une variable aléatoire par une application.	Si f est une application à valeurs réelles, on admet que $f(X)$ est une variable aléatoire et on se limite aux cas simples du type X^2 et X^3.
b) Espérance	
La variable aléatoire réelle X est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X=x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X=x_n)$.	On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X=x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. Notation $\mathrm{E}(X)$. ⇆ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Linéarité de l'espérance.	Démonstration hors programme.
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X=x_n)\, f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=x_n)\, f(x_n)$$	Démonstration hors programme. Les étudiants doivent savoir calculer une espérance en appliquant le théorème du transfert.
c) Variance et écart type d'une variable aléatoire	
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.	
Lorsque X^2 est d'espérance finie, on appelle variance de X le réel $\mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$.	Notation $\mathrm{V}(X)$. Les moments d'ordre supérieur ne sont pas au programme.
Écart type d'une variable aléatoire.	
$\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$ pour a et b deux réels donnés.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	L'inégalité de Markov n'est pas au programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Lois usuelles	
Pour $p \in]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. Les étudiants doivent savoir reconnaître des situations modélisables par une loi géométrique. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. On remarquera que cette interprétation requiert l'existence d'une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes, donc un univers non dénombrable. Elle est donnée à titre heuristique.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, loi de Poisson de paramètre λ : la variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Les étudiants doivent savoir reconnaître des situations modélisables par une loi de Poisson. $\leftrightarrows$ PC : compteur Geiger.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi binomiale de paramètre (n, p_n) et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}.$$	Démonstration hors programme. $\leftrightarrows$ I : simulation de cette approximation. La notion de convergence en loi est hors programme.
Espérance et variance d'une loi géométrique, d'une loi de Poisson.	

Équations différentielles

L'étude des équations différentielles est limitée au cas linéaire. L'accent est mis sur les techniques de résolution des équations scalaires d'ordre 2 et des systèmes linéaires à coefficients constants, en raison de leur importance dans d'autres champs disciplinaires. L'approche graphique offerte par l'outil informatique met en évidence les problèmes de stabilité des solutions.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Équations différentielles scalaires d'ordre 2	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme. $\leftrightarrows$ I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée d'un problème de Cauchy.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur un intervalle où a et b sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes.	
Équation avec second membre $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. Principe de superposition.	Les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et d'une solution de l'équation homogène. $\leftrightarrows$ PC/SI : étude de systèmes ayant une masse variable dans le temps.
Résolution dans le cas où une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas est connue.	Recherche de solutions particulières, notamment développables en série entière.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	
Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice réelle ou complexe de taille $n \times n$ à coefficients constants.	⥃ SI : problèmes d'asservissement.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme.
Structure de l'ensemble des solutions.	Pratique de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable ou trigonalisable.
Comportement asymptotique des solutions en fonction du signe de la partie réelle des valeurs propres de A dans le cas où A est diagonalisable.	⥃ PC : stabilité des solutions, état d'équilibre.
Équivalence entre une équation scalaire d'ordre n et un système de n équations d'ordre 1.	
Cas particulier des équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogène à coefficients constants.	Lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année.

Fonctions de plusieurs variables

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On se limite en pratique au cas $n \leqslant 3$. L'étude des fonctions de plusieurs variables se veut résolument pratique : présentation de recherche d'extremums, résolution d'équations aux dérivées partielles simples, application à l'étude de certaines courbes et surfaces.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$ ($n \leqslant 3$)	
Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.	Tout développement sur les normes non euclidiennes est hors programme.
Boules. Partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Partie ouverte, partie fermée.	
Point intérieur, point extérieur, point adhérent. Frontière (ou bord) d'une partie de $\mathbb{R}^n$.	Chaque définition est assortie d'une figure. Les caractérisations séquentielles sont hors programme.
b) Limite et continuité	
Limite en un point adhérent, continuité en un point, continuité sur une partie. Opérations. Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes.	L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.
c) Dérivées partielles, applications de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$ sur une partie ouverte	
Dérivées partielles d'ordre 1.	Notations $\partial_i f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. La notion de différentielle en un point est hors programme. ⥃ PC/SI : notation différentielle $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$.
Gradient.	Notation ∇f.
Point critique. Application de classe $\mathscr{C}^1$. Opérations.	
Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Existence admise.
Dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t))$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées partielles de $(u,v) \mapsto h(f(u,v), g(u,v))$.	Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires et savoir étendre les deux résultats précédents au cas de trois variables.
Dérivées partielles d'ordre 2.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\partial_1\partial_2 f$.
⇆ PC : laplacien. Application de classe $\mathscr{C}^2$. Opérations. Théorème de Schwarz.	Démonstration hors programme.

d) Équations aux dérivées partielles

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. L'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu. ⇆ PC : équation de transport, équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

e) Extremums d'une fonction de deux variables

Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique. Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.	

f) Applications géométriques

Courbe du plan définie par une équation $f(x,y)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier.	Cas particulier des courbes d'équation $y = g(x)$.
Tangente en un point régulier définie comme la droite orthogonale au gradient et passant par le point. En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y)=\lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.	En admettant l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$, lien avec la tangente à un arc paramétré. Démonstration hors programme. ⇆ PC : lignes équipotentielles et lignes de champ. ⇆ I : tracé de lignes de niveau.
Surface définie par une équation $f(x,y,z)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier. Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point. Position relative locale entre une surface d'équation $z = g(x,y)$ et son plan tangent.	Cas particulier des surfaces d'équation $z = g(x,y)$.