Annexe n°2
Programme du premier concours d'admission groupe sciences sociales (B/L)

I - Mathématiques

Programme de l'épreuve écrite d'admissibilité et de l'épreuve orale d'admission

I. Algèbre linéaire

Les définitions d'un groupe et d'un corps (au sens de corps commutatif) seront données, à l'exclusion de toute théorie relative à ces notions. Le corps de base est R ou C.

Les nombres complexes ne figurent pas dans ce programme pour eux-mêmes, mais comme outils. Sont à connaître les règles élémentaires de calcul, les notations Re (z), Im (z), $\bar{z}$, |z|, le module et l'argument d'un produit, l'inégalité triangulaire, la résolution de l'équation du second degré à coefficients réels et de l'équation $z^n = a$, l'affixe d'un point et d'un vecteur.

A. Espaces vectoriels et applications linéaires

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Applications linéaires, noyau, image ; isomorphisme.

Espaces vectoriels de dimension finie ; bases, rang d'une application linéaire ; somme directe de sous-espaces, sous-espaces supplémentaires.

B. Calcul matriciel

Matrices à n lignes et p colonnes ; opérations sur les matrices ; matrice transposée. Matrices carrées d'ordre n ; groupe des matrices inversibles.

Matrice d'une application linéaire ; effet d'un changement de base(s), matrices équivalentes, matrices semblables.

C. Systèmes d'équations linéaires

Les déterminants ne sont pas au programme.

Systèmes de Cramer, lien avec le calcul de l'inverse d'une matrice carrée.

Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice carrée. Méthode du pivot de Gauss appliquée aux questions suivantes : recherche d'une forme triangulaire, de l'inverse d'une matrice carrée, résolution d'un système de n équations linéaires à p inconnues.

D. Valeurs propres et vecteurs propres

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée).

Toute somme de sous-espaces propres est directe. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si l'espace est somme directe des sous-espaces propres.

La notion de polynôme caractéristique n'est pas au programme ; la réduction des matrices à la forme triangulaire n'est pas au programme.

II. Analyses

A. Suites et séries de nombres réels

Enoncé des propriétés de R (admises).

Suites de nombres réels. Suites monotones. Suites définies par une relation de récurrence un+1 = f(un). Convergence d'une série. Somme. Séries à termes positifs, comparaison de deux séries. Séries à termes réels. Convergence absolue.

B. Continuité et dérivation

a) Fonctions numériques d'une variable réelle.

Notion de limite.

Théorèmes sur les limites.

Continuité d'une fonction. Enoncé des propriétés des fonctions continues sur un intervalle (sans démonstration).

Fonctions monotones. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

b) Notion de dérivée.

Calcul des dérivées, dérivée d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Fonction dérivée, dérivées d'ordre supérieur.

c) Théorème des accroissements finis. Sens de variation d'une fonction dérivable. Graphe.

C. Fonctions usuelles

Fonctions polynômes, fonctions rationnelles.

La construction formelle des polynômes et fractions rationnelles n'est pas au programme, pas plus que les notions de PGCD, PPCM, polynômes premiers entre eux. Le théorème de

d'Alembert est admis. Aucun résultat sur la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples n'est à connaître.
Degré. Définition de la division euclidienne (résultats admis). Zéros (ou racines) d'un polynôme, divisibilité par (x-a). Ordre de multiplicité d'un zéro. Décomposition d'un polynôme réel sur C et sur R (existence et unicité admises).
Fonctions circulaires et circulaires réciproques.
En dehors des formules $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, aucune formule de trigonométrie autre que celles résultant des symétries des fonctions cos, sin, tan n'est à mémoriser.
Fonctions logarithmiques et exponentielles.
Fonctions puissances. Fonctions $t \to e^{it}$, formules de Moivre et d'Euler.
Comparaison, pour x tendant vers l'infini, des fonctions x^{α}, a^{x}, lnx.

D. Intégration

a) Définition et propriétés de l'intégrale d'une fonction continue, lien avec les primitives (la présentation n'est pas imposée ; on peut admettre qu'une fonction continue possède une primitive). Inégalité de la moyenne.
b) Intégration d'une fonction continue sur un intervalle non compact ; convergence, convergence absolue.
c) Calcul de primitives et d'intégrales. Changement de variables. Intégration par parties. Exemples. Exercices simples d'intégration de fonctions (par exemple fonctions rationnelles, produit d'une exponentielle par un polynôme).

E. Méthodes d'approximation

a) Approximation locale des fonctions. Formule de Taylor-Young. Développements limités. Application à la recherche de limites.
b) Comparaison d'une série et d'une intégrale. Séries de Riemann.

F. Fonctions de plusieurs variables

Fonctions numériques de plusieurs variables ; dérivées partielles (d'ordres un et deux) ; théorème de Schwarz. Différentielle. Fonctions homogènes ; théorème d'Euler. Conditions nécessaires (du premier ordre) pour un extremum libre. Extrema liés dans le cas d'une contrainte linéaire.

III. Probabilités et statistiques

Dans tout ce paragraphe, on mettra l'accent sur la correspondance entre le vocabulaire et les notions intuitives (probabilités, événements, variables aléatoires, indépendance), les exemples, les techniques de calcul et non sur la justification théorique des résultats.

A. Fondements des probabilités

On introduira le vocabulaire indispensable relatif aux ensembles : réunion, intersection, complémentaire, partition. Aucun exercice ou problème ne portera exclusivement sur ces notions.
1. Analyse combinatoire
Permutations, arrangements et combinaisons (sans répétition). Formule du binôme de Newton et triangle de Pascal.
2. Probabilités discrètes
Epreuve, ensemble des résultats de l'épreuve (univers), tribu (ou σ - algèbre) des événements ; définition d'une probabilité, additivité.
On se limitera au cas où les événements sont les parties de l'univers et l'on procédera par addition des probabilités des événements élémentaires.
3. Probabilité conditionnelle
Définition, propriétés, formule P(B) = ∑ P(A i) P Ai(B), formule de Bayes. Indépendance de 2, de n événements.

B. Variables aléatoires

On n'insistera pas sur les aspects théoriques, l'important étant la maîtrise intuitive et opératoire du concept.
1. Variables aléatoires discrètes
On se limitera au cas où l'ensemble des valeurs est fini ou inclus dans Z.
Loi de probabilité, fonction de répartition, définie par $F(x) = P(X \leq x)$.
Exemples : variable certaine, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson.
2. Variables aléatoires à densité
Densité de probabilité, fonction de répartition.

© Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche > www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

On se limitera au cas où la fonction de répartition est continue sur R et admet, sauf peut-être en un nombre fini de points, une dérivée continue. On étendra au cas des variables aléatoires à densité le langage et les résultats des paragraphes A2 et A3.
Loi uniforme sur un segment, loi exponentielle, loi normale.
L'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,dt = \sqrt{2\pi}$ doit être connue des candidats, sans qu'ils aient à la justifier.
3. Paramètres de position et de dispersion
Espérance, variance, écart type.
4. Couples de variables aléatoires discrètes.
Loi d'un couple ; lois marginales, lois conditionnelles. Covariance. Couple de variables aléatoires indépendantes, variance de leur somme ; extension à n variables.
C. Statistique descriptive et statistique inférentielle
1. Statistique descriptive élémentaire
Echantillon de n observations d'une variable numérique.
Description de la répartition des valeurs : diagrammes en bâtons, histogrammes.
Paramètres de position : moyenne, médiane, quantiles.
Paramètres de dispersion : variance, écart type, écarts interquantiles.
2. Statistique inférentielle
Estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance.
Notion d'estimateur : biais et variance d'un estimateur.
Enoncé (sans démonstration) de la loi faible des grands nombres et du théorème de la limite centrée.
Notion d'intervalle de confiance sur une moyenne et une proportion.

© Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche > www.enseignementsup-recherche.gouv.fr