MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Technologie, physique et chimie (TPC)

Annexe 1
Programmes de mathématiques

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe TPC

1ère année

Classe préparatoire TPC1
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires technologiques TSI et TPC sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Objectifs de formation

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires technologiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

– **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
– **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
– **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
– **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
– **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
– **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques, permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.
C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :
- prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements;
- connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques;
- prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.
Les programmes proposent des contenus équilibrés d'algèbre, d'analyse et de géométrie, auxquels s'ajoute un enseignement de probabilités visant à consolider les notions étudiées au lycée. Les probabilités permettent de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des ponts avec les autres disciplines.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

La géométrie, en tant qu'outil de modélisation et de représentation, est intégrée à l'ensemble du programme, qui préconise le recours à des figures pour aborder l'algèbre linéaire et les fonctions de variable réelle.

Le choix a été fait d'introduire assez tôt dans l'année un module substantiel visant à consolider ou à introduire des pratiques de calcul (limites des fonctions, dérivation, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles) avant d'introduire les théories sous-jacentes, afin d'en faciliter l'assimilation.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants. Cela doit être notamment la règle lors des séances de travaux dirigés et de travaux pratiques d'informatique.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections du programme ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression : afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques.

Programme

Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions sont introduites de manière progressive et trouvent naturellement leur place dans les autres sections, en vue d'être acquises en fin de première année. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme. Plusieurs groupes classiques étant rencontrés dans le cadre du programme, la terminologie associée peut être utilisée mais aucune connaissance théorique n'est exigible.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Connecteurs logiques : disjonction (ou), conjonction (et), implication, équivalence.	Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs et les connecteurs logiques pour formuler avec précision certains énoncés et leur négation.
b) Ensembles	
Appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie) de E. Ensemble vide.	Démontrer une égalité, une inclusion de deux ensembles.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire.	Maîtriser le lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes. Notations $E \setminus A$, $\overline{A}$, A^c.
Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles.	Un élément de E^p est appelé p-liste ou p-uplet d'éléments de E.
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
c) Propriétés de $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence	
Propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$.	Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$ sont supposées connues. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément. Toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.	
Raisonnement par récurrence.	Dans la pratique, on se limite aux récurrences simple ou double. Les connaissances du cycle terminal sur les suites arithmétiques ou géométriques ou les calculs de sommes pourront servir de premier support d'étude, la mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence trouvant progressivement sa place dans des situations variées du programme.
d) Autres méthodes de raisonnement	
Raisonnement par contraposition. Raisonnement par l'absurde.	
Principe d'analyse-synthèse.	Les étudiants doivent savoir distinguer condition nécessaire et condition suffisante. L'objectif est de donner une méthode de résolution détaillée pour les exemples du programme nécessitant ce type de raisonnement. On se limite à des exemples simples en évitant tout excès de technicité.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Fonctions	
Fonction (ou application) d'un ensemble E dans un ensemble F. Graphe.	Notation $\mathscr{F}(E,F)$. Le point de vue est intuitif : une fonction de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Toute formalisation est hors programme.
Restriction.	Notation $f\|_A$.
Image directe, image réciproque.	On évite tout développement technique sur la notion d'image réciproque. Notation $f^{-1}(B)$.
Composition.	Reconnaître une fonction composée.
Injection, surjection, bijection, réciproque d'une bijection.	Interpréter l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité à l'aide du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
Fonction identité.	

Premier semestre

Nombres complexes

L'objectif est d'introduire tôt dans l'année les nombres complexes, qui ne figurent pas au programme de la série STL. Le programme combine plusieurs aspects :

- *équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;*
- *interprétation géométrique des nombres complexes ;*
- *exponentielle complexe et applications à la trigonométrie.*

Il est recommandé d'illustrer le cours de nombreuses figures et de relier cette section aux besoins des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire, forme algébrique. Opérations sur les nombres complexes. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, affixe d'un point, d'un vecteur et image d'un nombre complexe.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme. Notations $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$. On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.
b) Conjugaison et module	
Conjugaison : définition, compatibilité avec les opérations. Module d'un nombre complexe. Relation $\|z\|^2 = z\overline{z}$. Module d'un produit et d'un quotient. Inégalité triangulaire.	Notation $\overline{z}$. Interpréter géométriquement le conjugué d'un nombre complexe. Notation $\|z\|$. Interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe. Interpréter géométriquement $\|z-a\|$ pour $a,\ z \in \mathbb{C}$.
c) Nombres complexes de module 1	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, formules d'Euler. Description des éléments de $\mathbb{U}$. Relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$. Formule de Moivre.	Notation $\mathbb{U}$. Factoriser $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$. Linéariser et factoriser des expressions trigonométriques. Retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ pour de petites valeurs de n. Il s'agit de consolider une pratique du calcul, en évitant tout excès de technicité.
d) Arguments d'un nombre complexe non nul	
Arguments d'un nombre complexe non nul. Arguments d'un produit, d'un quotient.	Écrire un nombre complexe non nul sous la forme $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme exponentielle). Interpréter géométriquement un argument d'un nombre complexe.
e) Exponentielle complexe	
Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ où $z = x + \mathrm{i}y$ et $x,\ y \in \mathbb{R}$. Relation $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Résoudre une équation du type $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$.

Pratique calculatoire

Prenant appui sur les acquis de la classe de terminale, cette section a pour but de mettre en œuvre des techniques de calcul indispensables en mathématiques et dans les autres disciplines scientifiques. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul intégral et différentiel sont étudiées ultérieurement. Le point de vue adopté ici est principalement pratique. Le professeur organise cette section de la façon qui lui semble la plus appropriée, en tenant compte des acquis des étudiants et des besoins des autres disciplines. Il est nécessaire d'insister sur ces notions tôt dans l'année afin de faciliter le reste de l'apprentissage.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Inégalités dans $\mathbb{R}$	
Inégalités larges, inégalités strictes, intervalles de $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Résoudre des inéquations. Application à l'étude de la position relative de deux courbes. Interpréter graphiquement une inéquation du type $f(x) \leqslant \lambda$. L'objectif est une maîtrise élémentaire des inégalités.	Dresser un tableau de signe.
Valeur absolue, inégalité triangulaire.	Interpréter sur la droite réelle des inégalités du type $\|x-a\| \leqslant b$.
Majoration, minoration et encadrement de sommes, de produits et de quotients.	
b) Équations, inéquations polynomiales	
Mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré. Discriminant.	
Équation du second degré à coefficients réels. Factorisation d'un polynôme de degré 2. Relation entre coefficients et racines des polynômes du second degré.	Recherche des racines complexes d'un polynôme à coefficients réels. Déterminer le signe d'un trinôme. Connaissant une racine, en déduire rapidement l'autre en utilisant les relations entre coefficients et racines.
Factorisation d'un polynôme dont une racine est connue.	Savoir factoriser un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 dont une racine est connue.
c) Équations, inéquations trigonométriques	
Cercle trigonométrique, valeurs usuelles. Formules exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$. Formules de factorisation de $\cos(p) \pm \cos(q)$ et de $\sin(p) \pm \sin(q)$. Lignes trigonométriques associées aux transformations $\frac{\pi}{2} \pm a$ et $\pi \pm a$. Tangente d'un angle. Arctangente d'un réel.	Trigonométrie dans un triangle rectangle. Utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des équations et inéquations trigonométriques. Linéarisation de $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$. Transformation de $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t + \varphi)$. Introduction à la fonction arctan, comme permettant de trouver la solution de $\tan(x) = \lambda$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Interprétation sur le cercle trigonométrique.
d) Calcul de dérivées, de primitives et d'intégrales	
Ce paragraphe donne des résultats de calcul différentiel utiles aux autres disciplines scientifiques dès le premier semestre.	
Dérivées des fonctions usuelles : $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, exp, ln, cos, sin, $x \mapsto \sqrt{x}$.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées dans des cas simples. Aucune étude théorique de la continuité et de la dérivation n'est abordée à ce stade.
Opérations : somme, produit, quotient, composée.	
Primitive sur un intervalle.	Reconnaître des expressions du type $\dfrac{u'}{u}$, $u'u^n$, $\dfrac{u'}{u^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $u'e^u$, $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, $u' \times \left(v' \circ u\right)$ où u et v sont des fonctions dérivables afin d'en calculer des primitives.

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégrale d'une fonction sur un segment. Interprétation en terme d'aire sous la courbe. Linéarité de l'intégrale.	On s'appuie sur la formule $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a,b]$. On illustre les exercices avec des situations issues des autres disciplines. Aucune étude théorique n'est abordée à ce stade.

e) Sommes et produits

Le symbole de sommation a été introduit au lycée.

Contenus	Capacités & Commentaires
Notations et règles de calcul.	Effectuer un changement d'indice. Sommes et produits télescopiques. L'objectif est de faire acquérir aux étudiants une aisance dans la manipulation des symboles $\sum$ et $\prod$ sur des exemples de difficulté raisonnable.
Factorielle, coefficients binomiaux. Triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton.	Notations $n!$, $\binom{n}{k}$ lue « k parmi n ». Les expressions de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ et $\binom{n}{n}$ sont à connaître.
Factorisation de a^3-b^3. Exemple de calcul de sommes : $$\sum_{k=0}^{n} k, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k, q \in \mathbb{K}.$$	C'est l'occasion de remobiliser les résultats de la classe de terminale portant sur la somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.

Étude globale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Dans le prolongement du cycle terminal du lycée, on consolide dans cette section les méthodes d'étude et de représentation des fonctions réelles d'une variable réelle. Le champ des fonctions mobilisables est étendu : aux fonctions exponentielle et logarithme népérien et aux fonctions trigonométriques, étudiées en classe de terminale, on ajoute les fonctions puissances et les fonctions trigonométriques réciproques. Cette section est naturellement à relier aux disciplines scientifiques et technologiques.

a) Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$

Contenus	Capacités & commentaires
Ensemble de définition d'une fonction.	C'est l'occasion de faire travailler la notion de composition de fonction et la résolution d'inéquations.
Représentation graphique d'une fonction.	Représenter graphiquement une fonction donnée par son expression. Représenter graphiquement $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x \pm a)$, $x \mapsto f(ax)$ et $x \mapsto af(x)$ à partir du graphe de f.
Fonctions paires, impaires, périodiques.	Interpréter graphiquement ces propriétés.
Somme, produit, quotient, composée. Monotonie.	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Interpréter graphiquement ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
Extremum global, extremum local.	C'est l'occasion d'établir des encadrements à partir d'études de signe.
Définition d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Comportement asymptotique d'une fonction	
Les étudiants ont peu manipulé les limites au lycée et il convient d'avoir une approche progressive.	
Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'un inverse. Exemples de formes indéterminées : $\infty - \infty\,;\quad 0\times\infty\,;\quad 1^{\infty}\,;\quad \dfrac{0}{0}\,;\quad \dfrac{\infty}{\infty}.$	
Limites de référence : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x};\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x};\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp(x)-1}{x};\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}.$	Calculer une limite par encadrement ou par comparaison. Ces limites sont l'occasion de varier les situations lors des recherches de limite. La démonstration n'est pas un attendu du premier semestre.
Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\exp(x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\exp(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^n\ln(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$.	
Limite d'une fonction composée. Asymptotes horizontales, verticales.	Interprétation graphique.
c) Dérivation	
Nombre dérivé en un point. Fonction dérivable en un point. Équation de la tangente en un point.	Interprétation graphique du nombre dérivé.
Application à l'étude des variations ou du signe d'une fonction.	Dresser le tableau de variation d'une fonction. Faire le lien entre injectivité et stricte monotonie. Un tableau de variation clairement présenté, accompagné de la détermination du signe de la dérivée et des valeurs ou limites aux bornes, vaut justification de bijectivité.
Fonction réciproque.	Tracer le graphe d'une fonction réciproque. Calculer la dérivée d'une fonction réciproque. Les formules sont admises et pourront être démontrées au second semestre. La formule peut être illustrée graphiquement.
d) Étude d'une fonction	
Plan d'étude d'une fonction.	Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction. Déterminer les symétries et les périodicités afin de réduire l'ensemble d'étude. Déterminer les variations et les limites. Déterminer les extremums éventuels. Tracer le graphe. Obtenir des inégalités grâce à une étude de fonction. Les asymptotes ainsi que la position des tangentes par rapport à la courbe seront traitées ultérieurement comme des applications des développements limités.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Fonctions usuelles	
Racine carrée. Dérivée. Valeur absolue. Partie entière. Étude des fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Les étudiants doivent savoir représenter graphiquement ces fonctions. Notation $\lfloor x \rfloor$. Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. On introduit la notation $\sqrt[n]{x}$ pour $x > 0$, sans développement. Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
Fonctions circulaires directes et réciproques : rappels sur les fonctions cos et sin, définition et étude des fonctions tan, arcsin, arccos, arctan.	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions. Les formules du type $\sin(\arccos x)$ ne sont pas à connaître.
Croissances comparées des fonctions logarithme népérien, puissances et exponentielle. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\exp(\beta x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha \exp(\beta x)$ pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha}$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha (\ln(x))^\beta$ pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.	Comparer les fonctions au voisinage de l'infini. Les fonctions hyperboliques sont hors programme.

Compléments sur les nombres complexes

Contenus	Capacités & commentaires
a) Équation du second degré dans $\mathbb{C}$	
Racines carrées d'un nombre complexe.	Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique ou exponentielle.
Équation du second degré dans $\mathbb{C}$.	Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.
b) Racines n-ièmes	
Racines de l'unité : définition, description, propriétés.	Représenter géométriquement les racines de l'unité. Notation $\mathbb{U}_n$.
Description des racines n-ièmes d'un nombre complexe.	Résoudre l'équation $z^n = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Géométrie élémentaire du plan

À l'issue de la terminale, les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien en tant qu'ensemble de points, la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les propriétés opératoires usuelles. Il convient d'observer que tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants, c'est-à-dire non colinéaires. Dans le plan, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormé, angles. La donnée d'un repère orthonormé identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{C}$. La géométrie joue un rôle essentiel en mathématiques et dans les disciplines scientifiques et technologiques ; elle est au cœur des compétences de modélisation et de représentation. Cette section doit être traitée en liaison avec les autres disciplines.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans le plan	
Repère orthonormé (ou orthonormal).	On peut introduire à cette occasion le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires.
Coordonnées cartésiennes. Coordonnées polaires.	Passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes et inversement.
b) Produit scalaire	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ sinon.	Interpréter le produit scalaire en termes de projections orthogonales. Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormée. Caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs. Déterminer une mesure d'un angle non orienté.
Bilinéarité, symétrie.	Démonstrations hors programme.
c) Déterminant dans une base orthonormée directe	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$\det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$ et $\det(\vec{u},\vec{v})=0$ sinon.	Interpréter $\lvert\det(\vec{u},\vec{v})\rvert$ comme l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Caractériser la colinéarité de deux vecteurs. La notion d'orientation du plan est admise, ainsi que celle de base orthonormée directe.
Expression du déterminant dans une base orthonormée directe.	Notation : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.
Bilinéarité, antisymétrie.	Démonstrations hors programme.
d) Droites	
Définition, vecteur directeur, vecteur normal.	
Équation cartésienne et système d'équations paramétriques.	Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et inversement. Déterminer l'intersection de deux droites.
Projeté orthogonal d'un point sur une droite. Distance d'un point à une droite.	Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite. Application au calcul de la distance d'un point à une droite. Aucune formule de distance d'un point à une droite n'est au programme.
e) Cercles	
Définition, équation cartésienne. Représentation paramétrique.	Reconnaître une équation cartésienne de cercle. Déterminer une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon. Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir d'une équation.

Géométrie élémentaire de l'espace

Dans cette section, on adapte à l'espace les notions étudiées dans la section de géométrie plane. L'étude de ce contenu mathématique nouveau s'appuie de façon essentielle sur la section de géométrie plane et sur l'intuition géométrique développée dans les autres disciplines. Des notions telles que le repérage dans l'espace et le produit vectoriel doivent être abordées en concertation avec les professeurs des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans l'espace	
Repère orthonormé (ou orthonormal) de l'espace. Coordonnées cartésiennes.	Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée. On peut à nouveau utiliser le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.
b) Produit scalaire	
Définition géométrique. Bilinéarité, symétrie.	Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormée directe. Démonstrations hors programme.
c) Produit vectoriel dans l'espace orienté	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $$\vec{u} \wedge \vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert\,\lVert\vec{v}\rVert \sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)\vec{k}$$ avec $\vec{k}$ unitaire et directement orthogonal à $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$; sinon le produit vectoriel est le vecteur nul. Bilinéarité, antisymétrie.	La notion d'orientation de l'espace, reposant sur les conventions physiques usuelles, est admise. Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires. Exprimer les coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormée directe. Démonstrations hors programme.
d) Déterminant dans l'espace orienté muni d'une base orthonormée directe	
Définition du déterminant de trois vecteurs : $$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)\cdot\vec{w}.$$ Expression du déterminant dans une base orthonormée directe. Trilinéarité, antisymétrie.	Déterminer si trois vecteurs sont coplanaires. Interpréter $\left\lvert\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right\rvert$ comme volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Notation : $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$. Développement du déterminant selon la troisième colonne, en lien avec la définition. Démonstrations hors programme.
e) Plans et droites	
Différents modes de définition d'un plan : par un point et deux vecteurs non colinéaires, un point et un vecteur normal, trois points non alignés. Différents modes de définition d'une droite : par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, comme intersection de deux plans.	Déterminer une équation cartésienne ou un système d'équations paramétriques d'un plan. Passer d'une représentation à l'autre. Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie comme intersection de deux plans. Déterminer un système d'équations cartésiennes ou un système d'équations paramétriques d'une droite. Passer d'une représentation à l'autre. Étudier les intersections.
Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan. Distance d'un point à un plan, distance d'un point à une droite.	Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan. Application au calcul de distances. Aucune formule de distance d'un point à une droite ou à un plan n'est au programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
f) Sphères	
Définition, équation cartésienne dans un repère orthonormé.	Reconnaître une équation cartésienne de sphère. Déterminer une équation d'une sphère à partir de son centre et de son rayon. Déterminer le centre et le rayon d'une sphère à partir d'une équation. Déterminer l'intersection d'une sphère et d'un plan.

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

En classe de terminale, les étudiants ont étudié des exemples simples d'équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre. Il s'agit dans cette section de consolider et d'étendre cette étude. Les équations différentielles sont un domaine à la fois très riche pour les mathématiques et pour la physique-chimie. Cette section doit être traitée en concertation avec les professeurs des autres disciplines afin de l'illustrer par des exemples issus des domaines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant	
Équation $y' + ay = b(t)$ où $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et où b est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Écrire et résoudre l'équation homogène associée.
Principe de superposition. Description de la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.	Détermination d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $Ae^{\lambda t}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ ou de la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec $(A,B,\omega) \in \mathbb{R}^3$. Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre. Les étudiants doivent savoir étudier des équations dans lesquelles la variable et la fonction inconnue sont représentées par d'autres lettres que t et y.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme. Détermination de la solution vérifiant une condition initiale donnée.
Équation $y' + ay = b$ où a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$ et problème de Cauchy associé.	Les solutions relèvent des automatismes de calcul.
b) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + ay' + by = c(t)$ où a et b sont des nombres réels et c est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Résoudre l'équation homogène en passant par l'équation caractéristique associée.
Principe de superposition. Description de la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.	Détermination d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $Ae^{\lambda t}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ ou de la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec $(A,B,\omega) \in \mathbb{R}^3$. Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme. Détermination de la solution vérifiant une condition initiale donnée.
Équation $y'' \pm \omega^2 y = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}$ et problème de Cauchy associé.	Les solutions relèvent des automatismes de calcul.

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Cette section est à concevoir comme une initiation aux structures algébriques et plus particulièrement à l'algèbre linéaire « abstraite » qui sera étudiée au second semestre.

La problématique de départ est la résolution des systèmes linéaires. Elle est à la fois familière aux étudiants – ils l'ont rencontrée et pratiquée dans l'enseignement secondaire pour de petites dimensions, par exemple en géométrie – et motivante par le nombre important de problèmes se ramenant à la résolution d'un système linéaire (méthode des différences finies, méthode des moindres carrés, etc). L'objectif majeur de la sous-section « B - Systèmes linéaires » est la justification et la mise en œuvre de l'algorithme de Gauss-Jordan de résolution d'un système linéaire.

La recherche d'une méthode systématique de résolution d'un système linéaire par cet algorithme conduit naturellement au calcul matriciel qui recèle à la fois des propriétés inhabituelles pour les étudiants (existence de diviseurs de 0, non commutativité) et des propriétés analogues à celles des ensembles de nombres (distributivité, etc.) qu'il convient de mettre en évidence.

L'ordre d'exposition choisi ci-dessous n'est nullement impératif. On pourra aussi bien commencer par introduire la théorie des systèmes linéaires, avant de traiter le calcul matriciel. On veillera à respecter les objectifs de formation suivants :
- *Familiariser les étudiants avec les différentes représentations des solutions d'un système linéaire.*
- *Entraîner au calcul matriciel. On évitera cependant tout excès de technicité et on se limitera à des systèmes et des matrices de taille raisonnable dans les applications numériques.*
- *Consolider la formation à l'algorithmique et la programmation.*

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Calcul matriciel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	Notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Opérations sur les matrices : addition, multiplication par un scalaire et produit de deux matrices (bilinéarité, associativité).	Si X est une matrice colonne, interpréter le produit AX comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A. Interpréter la j-ème colonne du produit AB comme le produit de A par la j-ème colonne de B. Interpréter la i-ème ligne du produit AB comme le produit de la i-ème ligne de A par B. Cas particulier de la multiplication à droite par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou la multiplication à gauche par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ pour en extraire une ligne ou une colonne. Produit non commutatif. Exemples de diviseurs de zéro.
Transposée. Opérations sur les transposées (addition, multiplication par un scalaire et produit).	Notation $A^\top$.
b) Ensemble des matrices carrées	
Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matrices diagonales et triangulaires.	Stabilité des opérations.
Notation I_n.	Exemples de matrices nilpotentes.
Matrices symétriques et antisymétriques.	
Puissance d'une matrice carrée et formule du binôme.	
Opérations élémentaires et interprétation au moyen des matrices élémentaires.	L'objectif est d'interpréter l'effet d'un tel produit. Aucune technicité n'est attendue.
Matrice inversible, inverse.	Notation A^{-1}. Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Contenus	Capacités & Commentaires
	Calcul de l'inverse d'une matrice A carrée de taille n. Exemple d'inversion à l'aide d'un polynôme annulateur donné. On admet que l'inversibilité à droite implique l'inversibilité à gauche et réciproquement. Toute théorie générale des groupes est exclue. La notion de comatrice est hors programme.
Inverse du produit de matrices inversibles. Inverse de la transposée d'une matrice inversible.	

B - Systèmes linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Systèmes linéaires	
Équation linéaire à p inconnues. Système linéaire de n équations à p inconnues. Système homogène. Matrice A d'un système linéaire. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système : échange des lignes L_i et L_j, multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$, ajout de λL_j à L_i pour $i \neq j$.	Interprétation géométrique dans le plan et dans l'espace. Les solutions sont définies comme éléments de $\mathbb{R}^p$. Système homogène associé à un système quelconque. Écrire un système sous la forme matricielle $AX = B$. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
Deux systèmes sont dits équivalents si on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	Relier cette notion aux opérations élémentaires sur les matrices.
b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan	
Un système est dit échelonné s'il vérifie les deux propriétés suivantes : 1. si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ; 2. à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.	Résolution d'un système linéaire via l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan.
On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non entièrement nulle.	L'invariance du nombre de pivots est admise.
c) Ensemble des solutions d'un système linéaire	
Inconnues principales et inconnues secondaires (paramètres).	Faire le lien entre nombre d'équations, nombre d'inconnues et nombre de pivots.
Rang d'un système linéaire. Système incompatible. Système compatible.	Le rang est ici défini comme le nombre de pivots. Déterminer des conditions de compatibilité pour un système donné.
Structure de l'ensemble des solutions d'un système compatible. Cas particulier des systèmes carrés.	Résoudre un système compatible. Application aux problèmes d'intersection en géométrie. Lien avec la notion de matrice inversible.

Dénombrement

Cette section a pour but de présenter les bases du dénombrement, notamment en vue de l'étude des probabilités. Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *on adopte un point de vue intuitif pour la définition d'un ensemble fini et la notion de cardinal ;*
- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

Cette section est également l'occasion d'aborder les coefficients binomiaux sous un autre angle que celui de la section « Pratique calculatoire ».

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini non vide. L'ensemble vide est de cardinal nul.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	Maîtriser le langage des applications et des bijections dans le cadre des ensembles finis, et le relier aux notions élémentaires sur le dénombrement.
Cardinal d'une union disjointe, de l'union de deux ensembles, d'un complémentaire, d'un produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
b) Dénombrement	
Nombre de p-uplets (ou p-listes) d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.	Reconnaître des situations relevant de ce cadre. La notation A_n^p est hors programme.
Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Lien avec les coefficients binomiaux.	Reconnaître des situations de dénombrement relevant de ce cadre. Donner une interprétation combinatoire des propriétés suivantes : $$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}; \quad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n; \quad \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Deuxième semestre

Nombres réels et suites numériques

L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximations de nombres réels). Les notions de borne supérieure et inférieure sont introduites uniquement pour aboutir au théorème de la limite monotone.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres réels	
Ensembles usuels de nombres : entiers naturels, entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels.	La construction de ces ensembles de nombres est hors programme.
Droite réelle.	Faire le lien avec la géométrie. La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.
Distance entre deux réels.	
La relation d'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$. Majorant, maximum, minorant, minimum. Borne supérieure, borne inférieure.	Cas d'une partie de $\mathbb{R}$, puis d'une fonction réelle.
Toute partie majorée (resp. minorée) non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	Résultat admis. Aucun développement n'est attendu.
Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$: une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, $[a,b] \subset I$.	
b) Généralités sur les suites réelles	
Modes de définition d'une suite.	Reconnaître une suite définie de façon explicite, implicite ou par récurrence. Reconnaître une suite extraite. Représenter les termes d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Toute étude d'une telle suite doit être guidée.
Opérations. Monotonie, stricte monotonie.	
Suite minorée, majorée, bornée.	Manipuler sur des exemples des majorations et minorations. Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(\lvert u_n \rvert)$ est majorée.
Suite arithmétique, suite géométrique, suite arithmético-géométrique.	En terminale technologique, les suites géométriques n'ont été vues qu'avec des raisons positives. Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$, recherche d'une solution constante et détermination des solutions.
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite réelle convergente est bornée.	
Si une suite possède une limite (finie ou infinie) alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Montrer la divergence d'une suite à l'aide de suites extraites.
Si les suites $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ convergent vers la même limite alors la suite $\left(u_n\right)$ converge vers cette limite commune.	
Opérations sur les limites de suites : somme, multiplication par un scalaire, produit, inverse.	Lever une indétermination.
Cas des suites géométriques, arithmétiques. Passage à la limite dans une inégalité.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Théorèmes d'existence d'une limite	
Théorèmes de convergence par encadrement.	On pourra montrer l'existence d'une limite ℓ en majorant $\lvert u_n - \ell \rvert$, notamment lorsque la suite vérifie une inégalité du type : $\lvert u_{n+1} - \ell \rvert \leqslant M \lvert u_n - \ell \rvert$.
Divergence par comparaison : si (u_n) tend vers $+\infty$ et si, à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant v_n$, alors (v_n) tend vers $+\infty$.	Adapter cet énoncé aux suites tendant vers $-\infty$.
Théorème de la limite monotone.	Exploiter ce théorème sur des exemples.
Théorème des suites adjacentes.	Il convient d'insister sur l'intérêt algorithmique de cette notion : résolution approchée par dichotomie d'une équation du type $f(x) = 0$.
e) Comparaisons de suites	
Relations de comparaison : négligeabilité, équivalence.	Notation $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ en supposant que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Croissances comparées des suites usuelles : $(\ln(n)^\beta)$, (n^α) et (a^n).	Traduire les croissances comparées à l'aide de o.
Lien entre les différentes relations de comparaison.	Équivalence entre les relations $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient, les puissances.	Exploiter ces résultats pour déterminer le comportement asymptotique de suites. Toute autre opération sur les équivalents est hors programme.
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

Limites, continuité et dérivabilité

Cette section est divisée en deux parties, consacrées aux limites et à la continuité pour la première, au calcul différentiel pour la seconde. On y formalise les résultats qui ont été utilisés d'un point de vue calculatoire au premier semestre.

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A]$ si $a = -\infty$.

A - Limites et continuité

L'essentiel du paragraphe qui suit consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Limite finie ou infinie en un point ou en $\pm\infty$	
Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a. Unicité de la limite.	Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la limite et le mettre en relation avec l'intuition géométrique. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \ell$, $\quad \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Notations $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, $\quad \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a. Limite à droite, limite à gauche.	Aucun formalisme n'est attendu sur la notion de voisinage. Notations $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$. Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a.	Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite à l'aide de deux suites.

b) Comparaison de fonctions

Passage à la limite dans une inégalité. Théorème d'encadrement pour les fonctions. Théorème de la limite monotone. Relations de négligeabilité et d'équivalence.	Démonstration non exigible. Adapter au cas des fonctions les définitions et les résultats étudiés sur les suites.

c) Continuité en un point

Continuité de f en un point a de I.	Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la continuité et le mettre en relation avec l'intuition géométrique. La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à droite et à gauche. Prolongement par continuité en un point.	Pour a n'appartenant pas à I, la fonction f se prolonge par continuité en a si et seulement si elle admet une limite finie en a.
Opérations sur les fonctions continues : somme, produit, quotient, composition.	Exploiter ces résultats sur des exemples. On pourra en profiter pour introduire la notion de stabilité d'un ensemble par combinaison linéaire sans évocation particulière de structure vectorielle.

d) Continuité sur un intervalle

Définition. Opérations. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue.	Appliquer le procédé de dichotomie à l'approximation d'un zéro d'une fonction continue. Démonstration hors programme.
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	Démonstration hors programme.

e) Continuité et bijectivité

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$; sa réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ (de même monotonie que la fonction f).	Appliquer ce résultat sur des exemples. Comparer la représentation graphique d'une fonction continue strictement monotone et celle de sa réciproque. Démonstration hors programme.

f) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Opérations sur les fonctions continues : somme, produit, quotient.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire. Les théorèmes sur les images d'intervalles ne s'étendent pas dans $\mathbb{C}$.

B - Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité de f en a, nombre dérivé.	Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier, à partir de la définition. Notation $f'(a)$.
Équivalence avec l'existence d'un développement limité en a à l'ordre 1.	La droite d'équation $$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$ est appelée tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Cette définition peut être justifiée (limite de sécantes). Interprétation cinématique.
Dérivabilité à droite et à gauche en a.	Demi-tangente à droite et à gauche au point d'abscisse a.
Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.	Notation f'.
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Si f et g sont dérivables en a, dérivabilité et dérivée en a de $f+g$, fg et, si $g(a) \neq 0$, de $\dfrac{f}{g}$.	
Dérivabilité et dérivée en a de $g \circ f$ lorsque f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$.	
Si f est une fonction continue et strictement monotone (donc bijective) de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ et si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et calcul de la dérivée de f^{-1} en ce point.	Interprétation géométrique de la formule de la dérivée de la fonction réciproque.
Extension des résultats précédents aux fonctions dérivables sur un intervalle. En particulier, propriétés de la réciproque d'une bijection de classe $\mathscr{C}^1$.	
c) Propriétés des fonctions dérivables	
Notion d'extremum local. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable sur un intervalle I et si, pour tout $t \in I, \lvert f'(t)\rvert \leqslant M$, alors $$\text{pour tous } x, y \text{ de } I, \lvert f(y) - f(x)\rvert \leqslant M\lvert y-x\rvert.$$	
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Appliquer ces résultats sur des exemples.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I, où k appartient à $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.	Notation $f^{(k)}$.
Opérations : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composée, réciproque.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées. Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents aux fonctions à valeurs complexes.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire. L'inégalité des accroissements finis est hors programme.
Dérivation de $t \mapsto \exp(\varphi(t))$ avec φ à valeurs dans $\mathbb{C}$.	

Intégration sur un segment

L'objectif de cette section est de consolider, d'approfondir et d'étendre la notion d'intégrale étudiée au lycée. La présentation de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment s'appuie sur la notion d'aire, mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme. Le cas des fonctions à valeurs réelles est étendu sans difficulté au cas complexe.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale $\int_a^b f$ d'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.	Interpréter géométriquement l'intégrale d'une fonction positive (aire sous la courbe). Modéliser une situation physique par une intégration. La construction est hors programme. Notations $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f$.
Valeur moyenne.	Interprétation graphique.
Inégalité $\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$.	Majorer et minorer une intégrale.
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$.
Une fonction continue et positive sur $[a,b]$ (où $a<b$) est nulle si et seulement si son intégrale est nulle. Extension aux fonctions à valeurs complexes.	
b) Calcul intégral	
Si f est une fonction continue sur I et si x_0 est un point de cet intervalle, alors $x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0. En particulier, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Pour f de classe $\mathscr{C}^1$: $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)-f(a)$.	Appliquer ce théorème sur des exemples. Deux primitives d'une fonction continue sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.
Intégration par parties. Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors, pour tous a et b dans I, $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.	Appliquer ces techniques au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu.
Primitives des fonctions usuelles.	Savoir reconnaître des primitives usuelles. Pour les fonctions rationnelles, on se limite à des cas simples : aucune théorie de la décomposition en éléments simples n'est au programme.

Polynômes

L'objectif est d'étudier par des méthodes élémentaires les propriétés de base des polynômes, et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques. Le programme se limite au cas où les coefficients sont réels ou complexes ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On pourra confondre polynômes et fonctions polynomiales.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Polynômes à une indéterminée	
Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Notation $\mathbb{K}[X]$. La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Notation $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ ou $\sum_{p=0}^{n} a_p X^p$.
Opérations : somme, produit et composée. Degré d'un polynôme. Coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'une somme, d'un produit et de la composée.	Le degré du polynôme nul vaut par convention $-\infty$. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. La notion de valuation d'un polynôme est hors programme.
Fonction polynomiale associée à un polynôme.	
b) Bases de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Diviseurs et multiples. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.	Effectuer une division euclidienne de polynômes.
c) Dérivation	
Polynôme dérivé. Dérivées de la somme, de la multiplication par un scalaire, d'un produit. Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Leibniz.	
d) Racines	
Racine d'un polynôme.	Déterminer les racines d'un polynôme. Caractériser les racines par la divisibilité.
Multiplicité d'une racine. Caractérisation par les valeurs des dérivées successives en a de l'ordre de multiplicité de la racine a. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.	
e) Décomposition en facteurs de degré 1	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Décomposition d'un polynôme en facteurs de degré 1 sur $\mathbb{C}$.	Démonstration hors programme. On illustre l'idée de la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ à partir de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, mais l'étude générale des polynômes irréductibles est hors programme.
f) Somme et produit des racines d'un polynôme de degré 2	
Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme de degré 2 en fonction de ses coefficients. Recherche de deux nombres complexes connaissant leur somme et leur produit.	Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Le programme se limite à l'algèbre linéaire sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Après l'approche numérique de la section « Calcul matriciel et systèmes linéaires », on passe à une vision plus géométrique. Les trois grands thèmes traités sont les espaces vectoriels, la théorie de la dimension finie et les applications linéaires.

Dans la sous-section « A - Espaces vectoriels » on généralise les objets de la géométrie du plan et de l'espace : vecteurs, bases, droites, plans...

La deuxième sous-section « B - Espaces vectoriels de dimension finie » vise à définir la dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie et en présente plusieurs méthodes de calcul. La notion de dimension interprète le nombre de degrés de liberté pour un problème linéaire.

L'étude des applications linéaires suit naturellement celle des espaces vectoriels à la sous-section « C - Applications linéaires et représentations matricielles ». Son objectif est de fournir un cadre aux problèmes linéaires. Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à une dimension supérieure.

Au moins deux approches pédagogiques sont possibles :
- *traiter cette section selon l'ordre présenté ci-dessous, en l'illustrant notamment sur les espaces $\mathbb{K}^n$ à l'aide des techniques développées dans la section « Calcul matriciel et systèmes linéaires » ;*
- *mettre en place les différentes notions (sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, applications linéaires) dans le cas particulier des espaces $\mathbb{K}^n$ avant de les étendre aux espaces vectoriels généraux.*

Il est attendu des étudiants qu'ils sachent reconnaître une situation se prêtant à une modélisation linéaire conduisant à une représentation adaptée dans un espace bien choisi.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	
Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.	
Sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : définition et caractérisation. Droites et plans vectoriels.	Les étudiants doivent savoir montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel en l'identifiant comme un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.	
L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.	Appréhender le concept d'espace vectoriel de fonctions.
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de sous-espaces vectoriels.	Notation $\text{Vect}(u_1,\ldots,u_p)$. Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.
Somme de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.	
La somme $F+G$ est directe si l'écriture de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est unique.	Exploiter une relation $F \cap G = \{0\}$ pour démontrer que F et G sont en somme directe.
Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.	Notation $F \oplus G = E$. Déterminer l'unique décomposition d'un vecteur donné sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
b) Familles finies de vecteurs	
Vecteurs colinéaires. Vecteurs coplanaires.	
Famille libre, famille liée.	Déterminer si une famille donnée est libre ou liée. Obtenir une relation de dépendance dans une famille liée.

Contenus	Capacités & Commentaires
Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre.	
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	Déterminer si une famille est génératrice.

B - Espaces vectoriels de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dimension finie	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.	Exhiber une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie.
Bases.	
Exemples usuels : bases canoniques des espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	
Coordonnées dans une base. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathscr{B}$.	Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans une base donnée. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.
Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.	Application à l'existence d'une base pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie.
Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.	
Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension.	Notation $\dim(E)$.
Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	On convient que l'espace vectoriel $\{0_E\}$ est de dimension nulle.
Si E est de dimension n et $\mathscr{F}$ est une famille de n vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre, si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice de E.	
b) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie	
Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si les deux dimensions sont égales.	Démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels à l'aide d'une inclusion et de l'égalité des dimensions.
Base adaptée à une somme directe.	
Si $(e_1, \ldots e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ sont en somme directe.	
Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel. Existence, dimension commune.	Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide de la caractérisation par leur intersection réduite à $\{0_E\}$ et la somme des dimensions. Base obtenue par concaténation de bases de sous-espaces vectoriels supplémentaires.
Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels : formule de Grassmann.	Cas d'une somme directe.
c) Familles finies de vecteurs	
Rang d'une famille finie $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Notation $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p)$. Utiliser le rang d'une famille de vecteurs pour démontrer qu'elle est libre ou génératrice.

C- Applications linéaires et représentations matricielles

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes et automorphismes.	Notations $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E)$. Savoir utiliser l'image par une application linéaire de quelques vecteurs pour en déduire l'image d'une combinaison linéaire de ces derniers.
Identité.	Notation Id_E. On peut identifier $\mathbb{K}^n$ à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Opérations sur les applications linéaires : combinaisons linéaires et composées. Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes. Image directe, image réciproque d'un sous-espace vectoriel.	Notation $\mathrm{GL}(E)$ pour le groupe linéaire.
Image et noyau. L'image par une application linéaire u d'une famille génératrice de E est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.	Notations $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Déterminer une base de l'image, du noyau d'une application linéaire. Caractériser l'injectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau, la surjectivité à l'aide de l'image.
b) Isomorphismes	
Une application linéaire de E dans F est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une (toute) base de E en une base de F. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Si E et F ont même dimension finie, alors une application linéaire de E dans F est bijective si elle est injective ou surjective.	Cas particulier des endomorphismes. Contre-exemples en dimension infinie.
c) Modes de définition d'une application linéaire	
Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.	
d) Rang d'une application linéaire	
Rang d'une application linéaire. Théorème du rang : si E est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ alors u est de rang fini et $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$.	Notation $\mathrm{rg}(u)$. Démonstration hors programme. Utilisation pour la recherche d'une base de l'image et du noyau d'un endomorphisme.
e) Application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à une matrice.	
On peut identifier les éléments de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ avec des matrices colonnes.	
Application $X \mapsto AX$ avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Linéarité. L'image AX est combinaison linéaire des colonnes de A.	
Image et noyau d'une matrice.	Notations $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$. Déterminer les équations de l'image et du noyau de A. On utilise l'échelonnement d'un système pour déterminer des équations de l'image.

Contenus	Capacités & Commentaires
f) Représentation matricielle en dimension finie	
Matrice d'une application linéaire u dans un couple de bases.	Expression des coordonnées de $u(x)$ en fonction de celles de x. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ où $\mathscr{B}$ est une base de l'espace de départ et $\mathscr{C}$ une base de l'espace d'arrivée. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ dans le cas où $\mathscr{B}=\mathscr{C}$.
Un couple de bases $(\mathscr{B},\mathscr{C})$ étant fixé, isomorphisme $u\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Application au calcul de la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$. Matrice d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme. Matrices semblables.	Déterminer la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire après un changement de base(s). Choisir une base adaptée à un problème donné. L'objectif est de donner une première approche de notions qui seront approfondies en seconde année. La diagonalisation est hors programme.
g) Rang d'une matrice	
Rang d'une matrice $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Défini comme le rang de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$ ou, de manière équivalente, comme le rang de l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associée.
Le rang d'une matrice est égal au nombre de pivots du système linéaire $AX=0$. Théorème du rang appliqué aux matrices.	
Le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice dans un couple de bases. Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang.	Calculer le rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire par la méthode du pivot.

Développements limités

L'objectif est la maîtrise du calcul de développements limités simples. Le calcul de développements limités à un ordre élevé n'est pas un objectif du programme ; il relève des outils logiciels.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Si f est définie sur l'intervalle I et si a est un point de I ou une extrémité de I, développement limité d'ordre n de f au voisinage de a. Unicité, troncature.	Interpréter un développement limité comme approximation d'une fonction. Ramener un développement limité en 0 par translation. Adaptation au cas où f est définie sur $I\setminus\{a\}$. Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire. Étudier le signe d'une fonction au voisinage d'un point à l'aide d'un développement limité.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit.	
Composition, passage au quotient.	Déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible. La division suivant les puissances croissantes est hors programme.
Intégration terme à terme d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point a de I d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.	Calculer le développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ à partir de ses dérivées successives.

Contenus	Capacités & Commentaires
Développements limités usuels.	Exploiter les développements limités usuels dans le cadre de développements limités simples. Exploiter les outils logiciels pour des développements limités plus complexes. Les étudiants doivent connaître les développement limités à tout ordre en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, arctan ainsi que celui de tan à l'ordre 3.
b) Applications des développements limités	
Aucune théorie n'est attendue dans ce paragraphe. On illustrera seulement les différents cas de figure. Calcul de limites.	Utiliser les développements limités pour lever une forme indéterminée.
Étude locale d'une fonction.	Déterminer un prolongement par continuité, la dérivabilité en un point, la nature d'un extremum, une tangente et sa position relative locale par rapport à la courbe, grâce à un développement limité. Déterminer les éventuelles asymptotes et leurs positions relatives locales. Aucun résultat général n'est exigible.

Probabilités sur un univers fini

Cette section a pour objectifs de mettre en place un cadre théorique permettant de fonder l'étude des probabilités dans le cas d'un univers fini et de développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste. On enrichit le point de vue fréquentiste étudié au lycée par une formalisation ensembliste. On mettra l'accent sur des exemples issus de la vie courante ou provenant des autres disciplines.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces probabilisés finis	
Expérience aléatoire. L'ensemble des issues (ou des résultats possibles, ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers et est noté Ω.	Modéliser des situations aléatoires. On se limite au cas où l'univers Ω est fini.
Événement, événement élémentaire (singleton). Événement certain, événement impossible, événement contraire, événements incompatibles. Opérations sur les événements. Système complet d'événements.	Maîtriser le lien entre point de vue ensembliste et point de vue probabiliste. On se limite au cas où l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω. Notation $\overline{A}$ pour l'événement contraire.
On appelle probabilité sur un univers fini Ω toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et, pour tout couple (A, B) de parties disjointes de Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω. Probabilité de l'union de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance d'une probabilité.	Expliciter l'espace probabilisé modélisant une situation aléatoire décrite en langage naturel.
Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $p_1, \dots, p_n$ sont des réels positifs de somme 1, il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que : $$\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(\{\omega_i\}) = p_i.$$	Calculer la probabilité d'un événement à partir d'un tableau de probabilités. Choisir les valeurs des p_i revient à choisir un modèle probabiliste.
Équiprobabilité (ou probabilité uniforme).	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Indépendance et conditionnement	
Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	Illustrer une expérience aléatoire à l'aide d'arbres de probabilités. La définition de $P_B(A)$ est justifiée par une approche heuristique fréquentiste. L'application P_B est une probabilité.
Formules des probabilités composées, des probabilités totales.	
Formules de Bayes : si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors $$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$	On donnera plusieurs exemples.
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P_B(A) = P(A)$.
Indépendance d'une famille finie d'événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.	L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance si $n \geqslant 3$.

Variables aléatoires sur un univers fini

Contenus	Capacités & commentaires
a) Variable aléatoire	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.	Modéliser des situations données en langage naturel à l'aide de variables aléatoires. Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notation $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notation $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$. Lien entre les événements $(X = k)$, $(X \leqslant k-1)$ et $(X \leqslant k)$.
Loi de probabilité P_X d'une variable aléatoire X.	L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.
Image d'une variable aléatoire par une application.	Si f est une application à valeurs réelles, on admet que $f(X)$ est une variable aléatoire et on se limite aux cas simples du type X^2 et X^3.
Définition de deux variables aléatoires indépendantes.	
Si X et Y sont indépendantes alors pour tout $(A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P\big((X, Y) \in A \times B\big) = P(X \in A)P(X \in B).$$	Démonstration hors programme.
Variables aléatoires indépendantes. Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.	
b) Espérance	
Définition de l'espérance d'une variable aléatoire : si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k).$$	Interpréter l'espérance en terme de moyenne pondérée.
Variable centrée.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire réelle à valeurs finies et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors l'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ est donnée par la formule $\mathrm{E}\big(\varphi(X)\big) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) P(X = x_k)$.	Calculer une espérance à l'aide de la formule de transfert.
$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$ pour a et b réels.	On admet de manière plus générale la linéarité de l'espérance.
Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.	

c) Variance et écart type d'une variable aléatoire

Variance et écart type d'une variable aléatoire.	Notations $\mathrm{V}(X)$ et $\sigma(X)$. Interpréter la variance comme indicateur de dispersion.
Variable réduite. Relation $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$ (Koenig-Huygens). $V(aX + b) = a^2 V(X)$ pour a et b réels.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	L'inégalité de Markov est hors programme.

d) Lois usuelles

Loi certaine.	
Loi uniforme.	Reconnaître des situations modélisables par une loi uniforme.
Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Reconnaître des situations modélisables par une loi de Bernoulli. Notation $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Reconnaître des situations modélisables par une loi binomiale. Notation $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Les étudiants doivent savoir interpréter une loi binomiale comme loi d'une somme de variables de Bernoulli identiques et indépendantes.
Espérance et variance associées à ces différentes lois.	Pour la loi uniforme, on limitera les résultats à la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe TPC

2nde année

Classe préparatoire TPC2
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires technologiques TSI et TPC sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Objectifs de formation

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires technologiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques, permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et informatique).

Représenter

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique.
La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques ; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.
C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques…).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :
- prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements ;
- connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques ;
- prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.
Les programmes proposent des contenus équilibrés d'algèbre, d'analyse et de géométrie, auxquels s'ajoute un enseignement de probabilités visant à consolider les notions étudiées au lycée. Les probabilités permettent de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des ponts avec les autres disciplines.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants. Cela doit être notamment la règle lors des séances de travaux dirigés et de travaux pratiques d'informatique.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. Le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections du programme ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression : afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques.

Programme

Compléments d'algèbre linéaire

Cette section est organisée autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *étudier de nouveaux concepts : hyperplans, projecteurs et symétries, sous-espaces stables, trace, polynômes de matrice ;*
- *passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques en dimensions 2 et 3 et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Sous-espaces vectoriels	
Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie n, défini comme un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Équations d'un hyperplan. Caractérisation comme un sous-espace vectoriel admettant une droite comme supplémentaire.	Interprétation géométrique en dimension 2 et 3.
b) Projecteurs et symétries	
Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Expression de la matrice d'un projecteur et d'une symétrie dans une base adaptée aux supplémentaires permettant de les définir. Caractérisation par les relations $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et leur traduction matricielle.	Déterminer les éléments caractéristiques d'un projecteur et d'une symétrie.
c) Sous-espaces vectoriels stables	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme. Matrice dans une base adaptée.	Les étudiants doivent savoir interpréter une forme matricielle par blocs en termes de sous-espace vectoriel stable, et inversement. On pourra notamment s'appuyer sur les exemples des projecteurs et des symétries.
d) Matrices	
Matrices semblables. Trace d'une matrice carrée. Linéarité. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie. Matrice symétrique, antisymétrique.	
Décomposition d'une matrice comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.	$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Polynôme de matrice.	C'est l'occasion de reprendre le travail fait en première année sur l'exploitation d'un polynôme annulateur pour étudier l'inversibilité d'une matrice.

Déterminants

Cette section développe une théorie du déterminant des matrices carrées, puis des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Il met en évidence l'aspect algébrique (caractérisation des matrices inversibles) et l'aspect géométrique (volume orienté).

Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd.

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée	
Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que : (i) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ; (ii) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ; (iii) le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.	Notation det. La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Interprétation géométrique de cette définition pour $n \in \{2,3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Effet sur un déterminant des opérations élémentaires sur les colonnes. Déterminant d'une matrice triangulaire. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.	
Déterminant d'un produit de matrices carrées. Déterminant de l'inverse d'une matrice carrée.	Démonstration hors programme.
Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.	Démonstration hors programme. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	Démonstration non exigible. La notion de comatrice est hors programme.
c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases.	La formule de changement de base pour un déterminant est hors programme.
Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.	Traduction sur le déterminant d'un endomorphisme des propriétés relatives au déterminant d'une matrice.

Réduction des endomorphismes

Cette section étudie la réduction des matrices et des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres et la notion de polynôme caractéristique, on s'intéresse à la question de la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires dont la résolution repose sur des outils similaires.
Tout développement sur les polynômes d'endomorphisme ou de matrice est hors programme.
Les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres et polynôme caractéristique	
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme f en dimension finie.	Notation $E_\lambda(f)$. Interprétation en termes de droite stable.
Spectre.	Notation $\mathrm{Sp}(f)$.
Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.	
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est défini par la fonction polynomiale $$x \mapsto \chi_f(x) = \det(x\mathrm{id}_E - f).$$	Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f est de coefficient dominant égal à 1. Il s'écrit : $$\chi_f(X) = X^n - \mathrm{Tr}(f)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f).$$
Les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme sont les valeurs propres de cet endomorphisme.	
Polynôme annulateur d'un endomorphisme.	Le théorème de Cayley-Hamilton et la notion de polynôme minimal sont hors programme.
Si un polynôme P annule un endomorphisme u, alors toute valeur propre de u est racine de P.	Cas d'un projecteur ou d'une symétrie.
Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Comparaison entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.	
Éléments propres et polynôme caractéristique d'une matrice.	Extension des définitions et des résultats précédents aux matrices. Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa matrice dans une base donnée.
b) Endomorphismes et matrices diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.	Les projecteurs et les symétries sont des exemples d'endomorphismes diagonalisables. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme diagonalisable à l'aide des valeurs propres.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Extension des résultats précédents aux matrices carrées.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Applications de la réduction	
Puissances d'une matrice diagonale.	Les étudiants peuvent utiliser librement l'expression de D^n pour D diagonale.
Formule $A^n = PB^nP^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $A = PBP^{-1}$.	Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. Application aux récurrences vectorielles d'ordre 1 de la forme $X_{n+1} = AX_n$. Les étudiants peuvent utiliser librement la relation $X_n = A^n X_0$.
Structure de l'ensemble des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Équation caractéristique. Base de solutions.	On se limite au cas homogène. Utilisation pour la résolution d'un système de suites récurrentes linéaires.

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette section est double :

- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues, la notion de fonction intégrable.*

L'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.
Les fonctions considérées sont continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle	
Pour $f : I = [a, b[\to \mathbb{K}$, $b > a$ ou $b = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures. Si tel est le cas, on note cette limite $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.	
Adaptation de la définition aux fonctions définies sur un intervalle $]a, b]$, avec $a < b$ ou $a = -\infty$, puis sur un intervalle $]a, b[$.	Aucun théorème d'intégration par parties sur un intervalle quelconque n'est au programme.
Linéarité, positivité et croissance de l'application $f \mapsto \displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.	
Intégrales de référence : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.	Les intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ ne font pas partie des intégrales de référence.
Nature et valeur de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ selon le signe de α.	
Relation de Chasles.	
Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction φ strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, où $a = \lim\limits_{u \to \alpha} \varphi(u)$ et $b = \lim\limits_{u \to \beta} \varphi(u)$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Intégrales des fonctions positives	
Théorèmes de comparaison pour les fonctions à valeurs réelles, continues et positives sur $[a,b[$, sous l'hypothèse $f \leqslant g$, $f(t) \underset{\substack{t\to b\\ t<b}}{\sim} g(t)$ ou $f(t) \underset{\substack{t\to b\\ t<b}}{=} o\big(g(t)\big)$.	Il suffit de vérifier les hypothèses au voisinage de b.
Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle I et telle que $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle sur I.	
c) Intégrales absolument convergentes	
Définition d'une intégrale absolument convergente.	
Théorème d'absolue convergence : une intégrale absolument convergente est convergente.	Démonstration hors programme.
Si f est continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si son intégrale est absolument convergente sur I, alors $$\left\lvert\int_I f(t)\mathrm{d}t\right\rvert \leqslant \int_I \lvert f(t)\rvert\mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Une fonction continue est dite intégrable sur l'intervalle I si son intégrale sur I est absolument convergente.	Notation $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$.
Espace vectoriel des fonctions intégrables sur I.	

Séries numériques

L'étude des séries prolonge celle des suites et prépare celle des séries entières et des séries de Fourier. Elle permet de mettre en œuvre l'analyse asymptotique. L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série à termes réels ou complexes, sommes partielles. Convergence ou divergence et, en cas de convergence, somme et restes.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, valeur de la somme en cas de convergence.	
Séries télescopiques : la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge, calcul de la somme en cas de convergence.	
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs sous l'hypothèse $u_n \leqslant v_n$, ou $u_n = o(v_n)$, ou $u_n \sim v_n$.	Il suffit que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
Règle de d'Alembert.	Toute autre règle de comparaison est hors programme.
Théorème de comparaison série-intégrale : si $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante, alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.	Exemples simples d'encadrements et d'application à l'étude asymptotique de sommes partielles ou de restes.

Contenus	Capacités & Commentaires
Séries de Riemann.	Les étudiants doivent savoir comparer une série à termes positifs à une série de Riemann.
c) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.	
La convergence absolue implique la convergence.	Démonstration non exigible. La notion de semi-convergence est hors programme.
Pour une série absolument convergente $\sum u_n$, $$\left\lvert\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\rvert \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n\rvert.$$	
d) Séries alternées	
Théorème des séries alternées : si la suite réelle (u_n) converge en décroissant vers 0, alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.	

Séries entières

Les séries entières considérées sont à coefficients réels ou complexes. La variable est réelle ou complexe. Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant au cas d'une variable réelle;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

La théorie des séries entières sera appliquée à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence d'une série entière	
Série entière d'une variable réelle ou complexe.	
Lemme d'Abel : étant donné un nombre réel $r > 0$, tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence défini comme borne supérieure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.	Si le rayon de convergence R est un réel strictement positif, alors pour $\lvert z\rvert < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour $\lvert z\rvert > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.	Toute étude systématique de la convergence sur le cercle de convergence est exclue.
Si $\lvert a_n\rvert \leqslant \lvert b_n\rvert$ à partir d'un certain rang, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant n_0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum_{n\geqslant n_0} b_n z^n$.	
Si $\lvert a_n\rvert \underset{n\to+\infty}{\sim} \lvert b_n\rvert$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à celui de $\sum b_n z^n$.	
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.	Démonstration hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Somme d'une série entière d'une variable réelle	
Fonction somme d'une série entière, domaine de définition.	
La fonction somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme.	Démonstration hors programme.
Relation entre les coefficients et les dérivées successives en 0.	
Intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	Démonstration hors programme.
c) Fonctions développables en série entière	
Fonction développable en série entière au voisinage de 0.	Lien avec la série de Taylor.
Unicité du développement en série entière.	
Développements en série entière usuels : $$\frac{1}{1-x},\quad \ln(1+x),\quad e^x,\quad \cos(x),\quad \sin(x).$$	Les étudiants doivent savoir utiliser l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour déterminer un développement en série entière.
d) Exponentielle complexe	
Développement en série entière admis : $$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$	En première année, l'exponentielle complexe est définie par la relation $$e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$ où x et y sont deux réels quelconques.

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Cette section est organisée autour de trois objectifs :

- *introduire les notions fondamentales liées à la structure préhilbertienne ;*
- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions 2 et 3 en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *traiter la réduction des matrices symétriques réelles.*

A - Structure préhilbertienne

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire et norme	
Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien réel, espace euclidien.	
Produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$.	Exemples de produits scalaires sur des espaces de fonctions ou de polynômes.
Norme associée à un produit scalaire, distance associée.	Notation $\\|\cdot\\|$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	
Identité du parallélogramme, identité de polarisation.	
b) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux.	
Orthogonal d'un sous-espace vectoriel F.	Notation $F^\perp$.
Théorème de Pythagore.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Famille orthogonale, famille orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.	
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Aucune formule n'est exigible.Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre l'algorithme dans le cas d'un nombre restreint de vecteurs.
Existence de bases orthonormées en dimension finie. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme.	

c) Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Pour étudier la notion de projection orthogonale et la distance à un sous-espace, on s'appuie sur des figures.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée.	Les étudiants doivent aussi savoir déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur un sous-espace vectoriel F en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une base de F.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui minimise $\|x - y\|$ avec $y \in F$. Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	Notation $d(x, F)$.

B - Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	L'étude des formes quadratiques est hors programme.
Symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel. Réflexion.	On s'appuie sur des figures.
Groupe orthogonal d'un espace euclidien E.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie ici les propriétés conférant à $\mathrm{O}(E)$ une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Si un sous-espace vectoriel est stable par une isométrie vectorielle, son orthogonal est stable par cette isométrie.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $A^{\top}A = I_n$.	Traduction sur les colonnes ou les lignes de A.
Groupe orthogonal d'ordre n.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n)$.
Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée de E, une base $\mathscr{B}$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est orthogonale. Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée de E et u un endomorphisme de E, alors u est une isométrie vectorielle de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u)$ est orthogonale. Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle. Isométrie vectorielle directe, indirecte.	Application à l'orientation d'un espace euclidien et à la notion de base orthonormée directe.
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SO}(E)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Classification en dimensions 2 et 3	
Caractérisation des symétries orthogonales par leurs représentations matricielles.	
Description du groupe orthogonal en dimensions 2 et 3.	Utilisation des éléments propres pour la classification des isométries vectorielles. Les étudiants doivent savoir déterminer les caractéristiques géométriques et trouver une base orthonormée adaptée à une isométrie vectorielle.
d) Matrices symétriques réelles	
Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles.	Démonstration hors programme.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.	
Théorème spectral : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1} = PDP^{\top}$.	Démonstration hors programme. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme.

Équations différentielles linéaires

L'étude des équations différentielles est limitée au cas linéaire en raison de son importance dans d'autres champs disciplinaires.
Cette section donne l'occasion de faire le lien avec les résultats de première année dans le cas des coefficients constants.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Équations différentielles linéaires d'ordre 1	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(t)y = b(t),$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes, définies et continues sur un intervalle I.	Équation homogène associée.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.	Détermination des solutions.
Principe de superposition.	
Structure de l'ensemble des solutions.	Plan de résolution.
Méthode de variation de la constante.	Le raccordement de solutions est hors programme.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour une équation de la forme $y' + a(t)y = b(t)$.	Détermination la solution vérifiant une condition initiale donnée.
b) Équations différentielles linéaires d'ordre 2	
Équation différentielle linéaire du second ordre $$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),$$ où a, b, c sont des fonctions réelles ou complexes, définies et continues sur un intervalle I.	Équation homogène associée.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.	
Principe de superposition.	Le raccordement de solutions est hors programme.
Structure de l'ensemble des solutions.	Recherche de solutions particulières polynomiales ou développables en série entière.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour une équation de la forme $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	Démonstration hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
Résolution complète par abaissement de l'ordre dans le cas où une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas est connue.	On donne toute indication utile.
Exemples de résolution d'équations différentielles par changement de variable.	On donne toute indication utile.

c) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice carrée réelle ou complexe à coefficients constants.	Pratique guidée de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme.
Réécriture d'une équation scalaire d'ordre n sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1.	
Cas particulier des équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants.	Lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année.

Probabilités

A - Probabilités sur un univers dénombrable

On aborde dans cette sous-section l'étude des probabilités sur un univers dénombrable afin de modéliser les processus stochastiques à temps discret. Les résultats démontrés en première année dans le cadre d'un univers fini sont étendus sans démonstration. La construction d'espaces probabilisés modélisant notamment une suite d'expériences aléatoires indépendantes est hors de portée à ce niveau. On se limite au cas où l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω. La notion de tribu est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Espace probabilisé dénombrable

Ensemble fini. Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dénombrabilité de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$. On signale que les intervalles ne sont pas dénombrables. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.
Expérience aléatoire, événement.	Extension des définitions vues en première année.
Suite infinie d'événements, union et intersection. Système complet d'événements.	Les étudiants doivent faire le lien entre point de vue probabiliste et point de vue ensembliste.
On appelle probabilité sur un univers Ω toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles : $$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	

b) Indépendance et conditionnement

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$	L'application P_B est une probabilité sur Ω.
Formule des probabilités composées.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et, $$P(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(B\cap A_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}P_{A_n}(B)\,P(A_n).$$	
Formule de Bayes : si A et B sont deux événements tels que $P(A)>0$, $P(B)>0$, alors, $P_B(A)=\dfrac{P_A(B)\,P(A)}{P(B)}$.	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P_B(A)=P(A)$.
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance si $n\geqslant 3$.

B - Variables aléatoires discrètes

Cette sous-section a pour objectifs de consolider les acquis de première année sur les variables aléatoires réelles finies et d'étendre les résultats au cas des variables discrètes sur un univers dénombrable. Dans toute cette section, l'univers Ω est supposé dénombrable.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Variable aléatoire réelle	
Une variable aléatoire réelle X est une application définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.	
Loi de probabilité d'une variable aléatoire.	Notation P_X.
L'application P_X est définie par la donnée des $P(X=x)$ pour x dans $X(\Omega)$.	Lien entre $P(X\leqslant k)$, $P(X\leqslant k-1)$ et $P(X=k)$ pour une variable aléatoire réelle discrète à valeurs entières. La notion de fonction de répartition est hors programme.
Image d'une variable aléatoire par une application.	Si f est une application à valeurs réelles, on admet que $f(X)$ est une variable aléatoire et on se limite aux cas simples du type X^2 et X^3.
b) Espérance d'une variable aléatoire	
La variable aléatoire réelle X est dite d'espérance finie si la série $\sum x_nP(X=x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel $\sum_{n=0}^{+\infty}x_nP(X=x_n)$.	On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}x_nP(X=x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. Notation $\mathrm{E}(X)$.
Linéarité de l'espérance.	Démonstration hors programme.
Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum f(x_n)\,P(X=x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on a : $$\mathrm{E}(f(X))=\sum_{n=0}^{+\infty}f(x_n)\,P(X=x_n).$$	Démonstration hors programme. Les étudiants doivent savoir calculer une espérance en appliquant le théorème de transfert.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Variance et écart type d'une variable aléatoire	
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.	
Lorsque X^2 est d'espérance finie, alors $(X-\mathrm{E}(X))^2$ est d'espérance finie et on appelle variance de X le réel $\mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}(X))^2\big)$.	Notation $\mathrm{V}(X)$. Interpréter la variance comme indicateur de dispersion.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2$ (Koenig-Huygens).	
Écart type d'une variable aléatoire.	Notation $\sigma(X)$.
$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$ pour a et b réels.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	L'inégalité de Markov est hors programme.
d) Lois usuelles	
Pour $p\in\,]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ si et seulement si $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P(X=k)=p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$. Les étudiants doivent savoir reconnaître des situations modélisables par une loi géométrique. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, loi de Poisson de paramètre λ : la variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ si et seulement si $$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$. Loi des événements rares.
Espérance et variance d'une loi géométrique, d'une loi de Poisson.	

Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Cette section fournit l'occasion de revoir une partie des notions abordées dans le cours d'analyse de première année. L'étude des fonctions vectorielles en dimension inférieure ou égale à trois permet de présenter des résultats utiles dans les autres disciplines scientifiques et introduit le paragraphe sur les courbes paramétrées. Dans ce cadre, le but est de tracer des courbes sans support logiciel quand les calculs se prêtent à un tracé rapide. Pour les calculs plus longs, on utilise un outil informatique qui permet en plus de mettre en évidence des problèmes d'échelle et de restriction d'intervalle. L'étude des courbes définies par une équation polaire est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$	
Limite en un point. Continuité et dérivabilité (éventuellement à gauche ou à droite) en un point ou sur un intervalle.	Ces notions sont définies à l'aide des fonctions coordonnées. Les étudiants doivent savoir interpréter géométriquement et cinématiquement la notion de dérivée en un point.
Dérivée d'une somme de deux fonctions vectorielles, du produit d'une fonction à valeurs réelles et d'une fonction à valeurs vectorielles.	
Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I. Espace vectoriel $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$.	
Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathscr{C}^k$.	
Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Courbes paramétrées	
Courbe paramétrée. Tangente en un point.	La tangente en un point est définie comme la limite des sécantes.
Demi-tangente à droite ou à gauche en un point.	Une demi-tangente en un point est définie comme la limite à droite ou à gauche des sécantes.
Caractérisation de la tangente à partir du premier vecteur dérivé non nul.	L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.
Cas particulier d'un point régulier.	Interprétation cinématique.
Point stationnaire : point ordinaire, d'inflexion et de rebroussement.	
Position relative locale de la courbe par rapport à sa tangente.	Les étudiants doivent savoir utiliser les développements limités de chacune des composantes.
Exemples de constructions de courbes planes.	Les étudiants doivent savoir exploiter les propriétés des fonctions (parité, périodicité...) afin de restreindre l'ensemble d'étude. L'étude du comportement asymptotique d'une courbe paramétrée est hors programme.

Séries de Fourier

L'étude des séries de Fourier est présentée dans le cadre des fonctions T-périodiques, continues par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette section développe des compétences de calcul à travers celui des coefficients de Fourier et l'application du théorème de Parseval. L'interprétation géométrique de la n-ième somme de Fourier comme projection orthogonale relie les points de vue analytique et géométrique de la théorie. Cette section est aussi particulièrement favorable aux interactions entre les disciplines.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Fonctions définies par morceaux	
Une fonction à valeurs réelles définie sur un segment $[a, b]$ à est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction continue (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$) sur $[a_i, a_{i+1}]$.	
Une fonction à valeurs réelles T-périodique est dite continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$) si elle est continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur une période.	Interprétation graphique.
Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, T-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$).	Notations $\mathscr{C}_T^{0,m}(\mathbb{R})$, $\mathscr{C}_T^{1,m}(\mathbb{R})$.
Intégrale sur une période d'une fonction T-périodique et continue par morceaux.	Extension rapide de la définition et des propriétés de l'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux.
b) Coefficients et séries de Fourier	
Coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction f continue par morceaux, T-périodique.	Notation $a_k(f)$ et $b_k(f)$ ou, plus simplement, a_k et b_k. Le coefficient a_0 est défini comme la valeur moyenne sur une période.
Cas des fonctions paires, impaires.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Série de Fourier d'une fonction f continue par morceaux T-périodique. Sommes partielles : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right) \text{ où } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$	Dans le cas des fonctions continues, interprétation géométrique de $S_n(f)$ comme la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \cos(k\omega t)$ et $t \mapsto \sin(k\omega t)$ ($k \in [\![0, n]\!]$) pour le produit scalaire défini par $$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) Théorèmes de convergence

Théorème de Parseval : si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et : $$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$	Démonstration hors programme. Interprétation géométrique du théorème de Parseval dans le cas des fonctions continues. Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques.
Théorème de Dirichlet : si f est une fonction T-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point $t \in \mathbb{R}$ et $$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\big(f(t+h) + f(t-h)\big).$$	Démonstration hors programme. On appelle régularisée de f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\big(f(t+h) + f(t-h)\big)$.
Cas où f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.	Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques.

Fonctions de plusieurs variables

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'étude des fonctions de plusieurs variables se veut résolument pratique : présentation de recherche d'extremums, résolution d'équations aux dérivées partielles simples.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$ ($n \leqslant 3$)

Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.	Tout développement sur les normes non euclidiennes est hors programme.
Boule ouverte, boule fermée. Partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Partie ouverte, partie fermée.	Notations $B_o(a, r)$, $B_f(a, r)$.
Point intérieur, point extérieur, point adhérent à une partie. Intérieur, frontière (ou bord), adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^n$.	Chaque définition est assortie d'une figure. Les caractérisations séquentielles sont hors programme.

b) Limite et continuité

Limite en un point adhérent, continuité en un point, continuité sur une partie. Opérations.	L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.
Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes.	Démonstration hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Dérivées partielles	
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point intérieur.	Notations $\partial_i f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. La notion de différentielle est hors programme.
Gradient.	Notation ∇f.
Point critique.	
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert. Opérations.	
Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Existence admise.
Dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t))$.	
Dérivées partielles de $(u, v) \mapsto h(f(u, v), g(u, v))$.	Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires et savoir étendre les deux résultats précédents au cas de trois variables.
Dérivées partielles d'ordre 2 en un point intérieur.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $\partial_1 \partial_2 f(a)$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert. Opérations.	
Théorème de Schwarz.	Démonstration hors programme.
d) Équations aux dérivées partielles d'ordre 1	
Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.	Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables suggéré dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires.
e) Extremums d'une fonction de deux variables	
Extremum global, extremum local.	
Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.	
Recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.	

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Technologie, physique et chimie (TPC)

Annexe 2
Programme de physique de $1^{ère}$ année

Programme de physique — TPC1

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique de la classe de TPC1 constitue un ensemble cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques qui préparent les étudiants à la deuxième année de classe préparatoire et, au-delà, à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de consolider les compétences de chaque étudiant, forgées durant le cycle terminal de la voie technologique du lycée, inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle de connaissances scientifiques par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour le professeur. En tant que science expérimentale, la physique est une discipline qui développe la curiosité, la créativité et l'analyse critique. Il est donc naturel que l'expérience se situe au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ils auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

L'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte le caractère incontournable des sciences numériques dans la formation des scientifiques, notamment dans le domaine de la simulation, et vise également à développer chez les étudiants des compétences transférables dans d'autres champs que le seul champ disciplinaire de la physique.
La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits et celui des modèles, des concepts et des théories. Le professeur doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative.

La construction d'un modèle exige bien souvent une utilisation maîtrisée des mathématiques dont Galilée, fondateur de la physique expérimentale, soulignait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde. De façon complémentaire, l'utilisation de l'outil numérique offre aujourd'hui aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation plus poussée du monde réel que ne le permettent les outils mathématiques usuels.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser des connaissances et des capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est globalement organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée **« Formation expérimentale »**, sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de la première année de classe préparatoire TPC1. Leur mise en œuvre s'appuie sur des problématiques concrètes qui mobilisent aussi les capacités expérimentales spécifiques, également exigibles, qui sont identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée **« Contenus thématiques »**. La formation expérimentale doit reposer sur un apprentissage progressif et structuré de l'ensemble des capacités attendues, tout au long des deux années de classe préparatoire TPC.
La seconde partie, intitulée **« Contenus thématiques »** est articulée autour de trois thèmes fédérateurs : **« thème E – énergie : conversions et transferts »**, **« thème M – mouvements et interactions »**, et **« thème S – ondes et signaux »**. La présentation en deux colonnes « notions et contenus » et, en regard, « capacités exigibles » met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise. La progression dans les contenus disciplinaires est organisée en deux semestres. Certains items de cette seconde partie, identifiés en caractères gras dans la colonne « capacités exigibles », se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils

doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants ; l'annexe dédiée à cette composante en précise les objectifs et les attendus en termes de contenus comme de capacités exigibles.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique en fin d'année en TPC1.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression pour chacun des deux semestres. Celle-ci est laissée à la libre appréciation du professeur et relève de sa liberté pédagogique.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Chaque compétence est illustrée par un ensemble de capacités associées qui permettent d'en préciser le contour sans pour autant constituer une liste exhaustive. Certaines peuvent parfois relever de plusieurs compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les différentes compétences doivent être acquises à l'issue des deux années de formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétences	Exemples de capacités associées
S'approprier	— Rechercher, extraire et organiser de l'information ou des données en lien avec la situation étudiée. — Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau,…) — Énoncer ou dégager une problématique scientifique en prenant en compte ses différents aspects (technique, scientifique, sociétal). — Représenter la situation par un schéma modèle. — Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. — Relier le problème à une situation modèle connue. — Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser/Raisonner	— Formuler des hypothèses. — Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. — Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. — Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle, des lois physiques ou chimiques. — Estimer des ordres de grandeur. — Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. — Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de plusieurs documents.

Réaliser	— Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. — Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photographie. — Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. — Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. — Construire des représentations graphiques à partir de données. — Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. — Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	— Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. — Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document ou dans de la bibliographie scientifique, à ses connaissances. — Discuter de la recevabilité d'une hypothèse, d'une information. — Analyser les résultats de manière critique. — Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude,...). — Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.
Communiquer	— À l'écrit comme à l'oral : ∘ présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente. ∘ rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation. ∘ appuyer son propos sur des supports appropriés. ∘ utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, représentations graphiques, cartes mentales, etc.). ∘ citer l'origine des sources utilisées. — Écouter, confronter son point de vue.

Pour atteindre le plein niveau de maîtrise de ces compétences et de ces capacités, les étudiants doivent progressivement développer, dans les différentes activités proposées par le professeur, leur **autonomie**, leur **esprit d'initiative** et leur **esprit critique**. La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à la poursuite d'études scientifiques, à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique, des questions liées à la recherche scientifique actuelle, des enjeux de citoyenneté comme l'engagement, la responsabilité individuelle et collective, la sécurité pour soi et autrui, ou des enjeux environnementaux et climatiques.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, le professeur organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences sera d'autant plus efficace que les étudiants seront acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires, pouvant être en langue anglaise, est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité. Lorsque

le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;

— contribuer à la nécessaire mise en cohérence des différents enseignements scientifiques de physique, de chimie, de mathématiques et d'informatique ainsi que l'enseignement de sciences en langue vivante (ESLV).

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, le professeur veillera soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Première partie

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants.
Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la **mesure** et de l'évaluation des **incertitudes**. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des **capacités expérimentales** qui doivent être acquises et pratiquées en autonomie par les étudiants à l'issue de leur formation en première année de classe préparatoire TPC. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique.
Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans une annexe du présent programme.

1 Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles; leur pleine maîtrise est donc bien un objectif de fin de seconde année. Elles sont communes aux enseignements de physique et de chimie et leur apprentissage s'effectue de manière coordonnée entre les professeurs concernés.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type.
La comparaison entre deux valeurs d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer, à l'aide d'une relation fournie, l'incertitude-type d'une grandeur qui s'exprime en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, par une relation du type somme, différence, produit ou quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. **Capacité numérique :** simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire – simulation de Monte-Carlo – permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. **Capacité numérique :** à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, simuler un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation de Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2 Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales générales que les étudiants doivent acquérir durant les séances de travaux pratiques en première année de classe préparatoire TPC1. Le travail des capacités présentées ci-dessous et leur consolidation se poursuivent en seconde année.

Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret. À ce titre, elle vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la colonne « Capacités exigibles » de la partie **« Contenus thématiques »** – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.

2.1 Mesures de grandeurs physiques

Les activités expérimentales doivent développer, tout au long de la formation des étudiants, la capacité à mettre en œuvre un dispositif de mesure d'une grandeur physique, à choisir le matériel adapté et à l'utiliser de façon autonome, éventuellement à l'aide d'une notice succincte.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
Grandeurs physiques diverses Acquisition et analyse d'une image numérique.	Acquérir (webcam, appareil photo numérique,...) l'image d'un phénomène physique sous forme numérique, et l'exploiter à l'aide d'un logiciel pour conduire l'étude d'un phénomène.
Mesure de longueur à partir d'une photo ou d'une vidéo.	Évaluer, par comparaison à un étalon, une longueur (ou les coordonnées d'une position) sur une image numérique et en estimer la précision.
Mesures de durées et de fréquences Fréquence ou période : mesure directe au fréquencemètre numérique, à l'oscilloscope ou via une carte d'acquisition.	Mettre en œuvre une méthode directe de mesure de fréquence ou de période.
Décalage temporel/différence de phase à l'aide d'un oscilloscope numérique.	Reconnaître une avance ou un retard de phase. Convertir un décalage temporel en une différence de phase et inversement. Repérer précisément une différence de phase nulle ou égale à π en mode XY.
Mesures électriques Mesure d'une tension : — mesure directe au voltmètre numérique ou à l'oscilloscope numérique. Mesure de l'intensité d'un courant : — mesure directe à l'ampèremètre numérique ; — mesure indirecte à l'oscilloscope aux bornes d'une résistance adaptée. Mesure d'une résistance ou d'une capacité : — mesure directe à l'ohmmètre/capacimètre ; — mesure indirecte d'une résistance à l'oscilloscope ou au voltmètre sur un diviseur de tension.	Capacités communes à l'ensemble des mesures électriques : — choisir une résolution, un calibre et un nombre de points adaptés à la mesure ; — préciser la perturbation induite par l'appareil de mesure sur un montage et ses limites (bande passante, résistance d'entrée) ; — définir la nature de la mesure effectuée (valeur efficace, valeur moyenne, amplitude, valeur crête à crête, etc.). — gérer, dans un circuit électronique, les contraintes liées à la liaison entre les masses.
Caractérisation d'un dipôle quelconque.	Visualiser la caractéristique d'un dipôle à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.
Production d'un signal électrique analogique périodique simple à l'aide d'un GBF.	Obtenir un signal de valeur moyenne, de forme, d'amplitude et de fréquence données.

Agir sur un signal électrique à l'aide des fonctions suivantes : — isolation, amplification, filtrage ; — sommation, intégration	Gérer, dans un circuit électronique, les contraintes liées à la liaison entre les masses. Mettre en œuvre les fonctions de base de l'électronique réalisées par des blocs dont la structure ne fait pas l'objet d'une étude spécifique. Associer ces fonctions de base pour réaliser une fonction complexe en gérant les contraintes liées aux impédances d'entrée et/ou de sortie des blocs.
Optique Former une image.	 Éclairer un objet de manière adaptée. Choisir une ou plusieurs lentilles en fonction des contraintes expérimentales, et choisir leur focale de façon raisonnée. Optimiser la qualité d'une image (alignement, limitation des aberrations…). Estimer une valeur approchée d'une distance focale.
Créer ou repérer une direction de référence.	Régler et mettre en œuvre une lunette autocollimatrice et un collimateur.
Analyser une image numérique.	Acquérir (webcam, appareil photographique numérique…) l'image d'un phénomène physique sous forme numérique, et l'exploiter à l'aide d'un logiciel pour conduire l'étude d'un phénomène.
Mécanique Mesurer une masse.	 Utiliser une balance de précision. Repérer la position d'un centre de masse.
Visualisation et décomposition d'un mouvement.	Mettre en œuvre une méthode de stroboscopie. Enregistrer un phénomène à l'aide d'une caméra numérique et repérer la trajectoire à l'aide d'un logiciel dédié, en déduire la vitesse et l'accélération.
Mesure d'une accélération.	Mettre en œuvre un accéléromètre, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur.
Mesure d'une action mécanique.	Utiliser un dynamomètre.
Thermodynamique Mesure d'une pression.	 Mettre en œuvre un capteur de pression, en identifiant son caractère différentiel ou absolu.
Repérage d'une température.	Mettre en œuvre un capteur de température, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur. Choisir le capteur en fonction de ses caractéristiques (linéarité, sensibilité, gamme de fonctionnement, temps de réponse), et du type de mesures à effectuer.
Bilans d'énergie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie.

3 Prévention du risque au laboratoire

L'apprentissage et le respect des règles de sécurité dans tous les domaines recensés ci-après permettent aux étudiants de prévenir et de minimiser les risques lorsqu'ils évoluent au laboratoire de physique. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Prévention des risques au laboratoire Règles de sécurité au laboratoire.	 Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
Risque électrique.	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
Risque optique.	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
Risques liés à la pression et à la température.	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.

Deuxième partie

Contenus thématiques

L'organisation des semestres est la suivante.

Premier semestre

Second semestre

Premier semestre

Thème S – ondes et signaux

S.1 Formation des images

Dans cette partie, le professeur s'appuie sur les compétences expérimentales des étudiants dans le domaine de la formation des images pour mettre en évidence l'apport de la modélisation et d'une description algébrique du réel. De nombreuses applications technologiques peuvent être abordées; certaines sont précisées par le programme, d'autres sont laissées à la libre appréciation des enseignants (lunette, microscope, optique d'un smartphone, etc.).

Notions et contenus	Capacités exigibles
Sources lumineuses Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre	Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur. Caractériser une source lumineuse par son spectre.
Modèle de l'optique géométrique Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique.
Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes.	Établir la condition de réflexion totale.
Conditions de l'approximation de Gauss et applications Stigmatisme. Miroir plan.	Construire l'image d'un objet par un miroir plan.

Conditions de l'approximation de Gauss.	Énoncer les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences. Relier le stigmatisme approché aux caractéristiques d'un détecteur.
Lentilles minces dans l'approximation de Gauss.	Définir les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence. Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle. Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton. Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente. **Former l'image d'un objet dans des situations variées.**
Modèles de quelques dispositifs optiques L'œil. Punctum proximum, punctum remotum.	 Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe. Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accomodation.
L'appareil photographique.	Modéliser l'appareil photographique comme l'association d'une lentille et d'un capteur. Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné. **Étudier l'influence de la focale, de la durée d'exposition, du diaphragme sur la formation de l'image.**
Système optique à plusieurs lentilles.	**Modéliser, à l'aide de plusieurs lentilles, un dispositif optique d'utilisation courante.**

S.2 Signaux et composants électriques dans l'ARQS

La partie « **S.2 Signaux et composants électriques dans l'ARQS** » pose les bases nécessaires à l'étude des circuits dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS). Si le programme se concentre sur l'étude des dipôles R, L et C, il est possible, lors des travaux pratiques, de faire appel à des composants intégrés ou non linéaires (filtres à capacité commutée, échantillonneur-bloqueur, diodes, photorésistances, etc.) dès lors qu'aucune connaissance spécifique préalable n'est nécessaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Grandeurs électriques Charge électrique, intensité du courant électrique. Régime continu, régime variable quasi-stationnaire. Potentiel, potentiel de référence, tension. Puissance électrique.	 Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charges électriques. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence. Utiliser la loi des nœuds et la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer des ordres de grandeur d'intensités, de tensions et de puissances dans différents domaines d'application.
Dipôles électriques usuels Source de tension.	 Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin. **Évaluer la résistance de sortie d'une source de tension réelle.**
Système à comportement résistif.	Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance.

Association de deux résistances. Ponts diviseurs de tension et de courant.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant. **Mettre en évidence l'influence de la résistance d'entrée d'un voltmètre ou d'un ampèremètre sur les valeurs mesurées.**
Système à comportement capacitif : modèle du condensateur idéal. Relation entre charge et tension; capacité d'un condensateur. Énergie stockée.	Relier l'intensité algébriquement reçue à la tension aux bornes d'un condensateur. Exploiter l'expression fournie de la capacité d'un condensateur en fonction de ses caractéristiques. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur.
Système à comportement inductif : modèle de la bobine idéale. Relation entre intensité et tension; inductance d'une bobine.	Relier l'intensité algébriquement reçue à la tension aux bornes d'une bobine. Exprimer l'énergie stockée dans une bobine.
Caractéristique d'un dipôle. Point de fonctionnement.	**Étudier la caractéristique d'un dipôle pouvant être non-linéaire et mettre en œuvre un capteur dans un dispositif expérimental.**

S.3 Circuits linéaires du premier ordre

La partie « **S.3 Circuits linéaires du premier ordre** » est consacrée à l'étude de l'évolution temporelle transitoire vers un régime permanent d'un système linéaire du premier ordre soumis à un échelon de tension ou en régime libre. Cette partie amène à opérer une distinction entre les régimes transitoires et permanents, et, plus généralement, permet d'introduire le modèle du système linéaire du premier ordre et de faire émerger la notion essentielle de temps caractéristique d'évolution.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèle du circuit RC alimenté par une source idéale de tension constante. Charge et décharge d'un condensateur, temps caractéristique.	Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur. Déterminer en fonction du temps la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge ou de sa décharge. Exploiter la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur. Déterminer un ordre de grandeur de la durée d'un régime transitoire.
Modèle du circuit RL série.	Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans le circuit. Exploiter la continuité du courant circulant dans une bobine. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
Capteurs capacitifs. Capteurs inductifs.	**Mettre en œuvre un capteur capacitif ou inductif et identifier les paramètres influençant ses performances**.
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RC série. Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RL série.
Circuit du premier ordre à une ou deux mailles.	**Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre dans un circuit comportant une ou deux mailles et analyser ses caractéristiques.** **Capacité numérique :** mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.

Thème E – énergie : conversions et transferts

Cette partie propose, en introduction, une présentation de différents états de la matière. La description d'un état d'équilibre thermodynamique d'un système à l'aide d'un jeu réduit de variables d'état s'appuie sur les modèles usuels du gaz parfait et de la phase condensée peu dilatable et peu compressible, dont les limites sont cependant mentionnées par comparaison avec les propriétés physiques de systèmes réels.
Le premier principe de la thermodynamique est ensuite énoncé et permet d'établir les premiers bilans énergétiques, dont la formulation rigoureuse constitue un des objectifs de formation privilégiés. Les capacités identifiées doivent être introduites en s'appuyant, dès que possible, sur des dispositifs expérimentaux qui permettent leur acquisition progressive et authentique.

On utilise les notations suivantes : pour une grandeur extensive A, a désigne la grandeur massique associée et A_m la grandeur molaire associée.

E.1 Descriptions microscopique et macroscopique d'un système

Notions et contenus	Capacités exigibles
Les états de la matière État solide, liquide et gazeux. Échelles microscopique, mésoscopique et macroscopique. Distance moyenne entre particules.	Définir et caractériser les différents états de la matière. Définir l'échelle mésoscopique et en expliquer la nécessité. Citer quelques ordres de grandeur de distances moyennes entre entités dans un solide, un liquide et un gaz.
Système thermodynamique.	Identifier un système ouvert, un système fermé, un système isolé.
État d'équilibre thermodynamique et variables d'état.	Présenter les paramètres usuellement utilisés pour la description d'un système thermodynamique : pression, température, volume, densité volumique de particules, masse volumique. Associer qualitativement la pression aux propriétés physiques du système à l'échelle microscopique. Calculer une pression à partir d'une condition d'équilibre mécanique. Déduire une température d'une condition d'équilibre thermique.
Gaz parfait Modèle du gaz parfait.	Comparer le comportement d'un gaz réel au modèle du gaz parfait sur des réseaux d'isothermes expérimentales en coordonnées de Clapeyron ou d'Amagat.
Équation d'état du gaz parfait.	Citer quelques ordres de grandeur de volumes molaires ou massiques dans les conditions usuelles de pression et de température. Citer et exploiter l'équation d'état des gaz parfaits.
Mélange idéal de gaz parfaits. Pression partielle. Loi de Dalton.	Donner la définition de la pression partielle. Exploiter la loi de Dalton.
Énergie interne du gaz parfait. Capacité thermique à volume constant d'un gaz considéré comme parfait.	Exprimer la variation de l'énergie interne d'un gaz parfait en fonction de la variation de température, la capacité thermique à volume constant étant donnée.
Phase condensée peu dilatable et peu compressible Modèle de la phase condensée peu dilatable et peu compressible.	Interpréter graphiquement la différence de compressibilité entre un liquide et un gaz à partir d'isothermes expérimentales.
Énergie interne et capacité thermique à volume constant d'une phase condensée peu dilatable et peu compressible.	Exprimer la variation de l'énergie interne d'une phase condensée peu dilatable et peu compressible en fonction de la variation de température, la capacité thermique à volume constant étant donnée.
Description d'un corps pur en équilibre diphasé	

Corps pur en équilibre diphasé. Diagramme de phases (P, T), point critique, point triple. Cas particulier de l'équilibre liquide-vapeur : diagramme de Clapeyron (P, v), pression de vapeur saturante, titre en vapeur.	Analyser un diagramme de phases expérimental (P, T) et nommer les différents changements de phase. Positionner les différentes phases d'un corps pur dans les diagrammes (P, T) et (P, v). Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point d'un diagramme (P, v).

E.2 Bilans d'énergie pour un système thermodynamique

Cette partie, centrée sur le premier principe de la thermodynamique, aborde les bilans d'énergie. Les relations entre variables d'état thermodynamiques considérées dans cette partie se limitent exclusivement à celles qui relèvent du modèle du gaz parfait ou du modèle de la phase condensée peu dilatable et peu compressible. La loi de Laplace qui caractérise l'évolution adiabatique et réversible d'un gaz parfait n'est pas exigible, pas plus que ses conditions de validité. Elle peut néanmoins être utilisée à condition d'être fournie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Transformations thermodynamiques Transformation thermodynamique d'un système. Transformations isochore, isobare et monobare. Thermostat, transformations monotherme et isotherme.	Exploiter les conditions imposées par le milieu extérieur au système pour déterminer l'état d'équilibre final. Identifier dans une situation expérimentale le ou les systèmes qui peuvent être modélisés par un thermostat ou dont la pression peut être supposée constante.
Premier principe de la thermodynamique. Bilans d'énergie. Premier principe de la thermodynamique.	Utiliser le premier principe de la thermodynamique entre deux états d'équilibre thermodynamique. Exploiter les propriétés d'extensivité et de fonction d'état de l'énergie interne.
Travail Travail des forces de pression.	Évaluer un travail par découpage en travaux élémentaires et sommation sur un chemin donné dans le cas d'une seule variable. Interpréter géométriquement le travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron ou de Watt.
Transferts thermiques Modes de transferts thermiques.	Caractériser qualitativement les trois modes de transfert thermique : conduction, convection et rayonnement.
Puissance thermique proportionnelle à l'écart des températures du système étudié et du milieu extérieur au système. Modélisation de l'évolution de la température d'un système considéré comme peu compressible et peu dilatable au contact d'un thermostat.	Interpréter qualitativement le signe de la puissance thermique reçue par le système en fonction du signe de l'écart des températures du système étudié et du milieu extérieur au système. Effectuer un bilan d'énergie pour un système considéré comme peu compressible et peu dilatable en contact avec un thermostat : établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la température du système.
Fonction d'état enthalpie Fonction d'état enthalpie ; capacité thermique à pression constante d'un gaz parfait et d'une phase condensée peu compressible et peu dilatable.	Exprimer le premier principe de la thermodynamique sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et dans l'état final. Exploiter les propriétés d'extensivité et de fonction d'état de l'enthalpie. Exprimer la variation d'enthalpie d'un gaz parfait ou d'une phase condensée peu dilatable et peu compressible en fonction de la variation de température, la capacité thermique à pression constante étant donnée. Citer la valeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide.

Enthalpie massique de fusion, de vaporisation et de sublimation. Variation d'enthalpie associée à un changement d'état.	Réaliser un bilan énergétique en prenant en compte des changements d'état. Citer les ordres de grandeur de l'enthalpie massique de fusion et de vaporisation de l'eau. **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure d'une grandeur thermodynamique énergétique (capacité thermique, enthalpie massique de changement d'état, etc.).**

Thème M – mouvements et interactions

M.1 Description et paramétrage du mouvement d'un point

La partie « **M.1 Description et paramétrage du mouvement d'un point** » vise notamment à mettre en place les principaux systèmes de coordonnées : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques. Le but est de permettre aux étudiants de disposer d'outils efficaces pour décrire une grande variété de mouvements de points. Pour atteindre cet objectif, il convient de les familiariser progressivement avec les projections et dérivations de vecteurs ainsi qu'avec l'algébrisation des grandeurs dans un contexte relevant de la physique. Enfin, cette partie est l'occasion de procéder à des analyses qualitatives des comportements cinématiques de systèmes réels assimilés à un point, notamment sur les exemples simples des mouvements rectilignes et circulaires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques. Identifier les degrés de liberté du mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. **Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.**

M.2 Lois de Newton

Dans la partie « **M.2 Lois de Newton** », on cherche d'abord à renforcer les compétences des étudiants relatives à la mise en équations d'un problème, qu'il s'agisse des étapes de bilan des actions mécaniques, de représentation de la situation étudiée par un schéma adapté, de projection de la deuxième loi de Newton sur la base choisie, ou de résolution des équations du mouvement. On cherche par ailleurs, sur l'exemple de quelques mouvements simples, à renforcer les compétences d'analyse qualitative d'une équation différentielle : stabilité des solutions, positions d'équilibre, type d'évolution, durée ou période typique d'évolution, etc. Cette pratique s'articule avec l'utilisation d'un langage de programmation pour résoudre des équations différentielles. Enfin, il s'agit aussi de confronter les étudiants aux limites de validité de certains modèles de forces, et ainsi de donner toute leur importance aux étapes de modélisation et de validation d'un modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Quantité de mouvement Masse d'un système matériel. Conservation de la masse pour un système fermé.	Exploiter la conservation de la masse pour un système matériel fermé.
Quantité de mouvement d'un système matériel. Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.	Réduire le mouvement d'un système matériel à celui d'un point. Écrire la quantité de mouvement d'un système matériel en fonction de la vitesse de son centre de masse : $\vec{p} = m\vec{v}(G)$
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
Modélisation d'une action mécanique par une force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des actions mécaniques sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte en représentant les forces associées sur un schéma adapté.
Deuxième loi de Newton. Théorème de la quantité de mouvement.	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système matériel fermé dans un référentiel galiléen. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force.**
Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Étudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.
Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.	Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.**
Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau.	Modéliser un comportement élastique par une loi de force linéaire; extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de données mesurées ou fournies. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux. **Mettre en œuvre un microcontrôleur lors d'un test de traction.**
Système masse-ressort en l'absence de frottement. Pulsation propre.	Établir l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Identifier l'expression de la pulsation propre dans l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.
Modèle des lois de frottement de glissement : lois de Coulomb.	Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

M.3 Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

La partie « **M.3 Approche énergétique du mouvement d'un point matériel** » vise à construire une démarche alternative et complémentaire pour l'étude d'une situation relevant de la mécanique – et plus généralement de la physique – fondée sur la conservation de certaines grandeurs – ici, l'énergie mécanique. Cette approche est l'occasion d'illustrer la capacité prédictive des analyses graphiques et numériques, par exemple pour pouvoir décrire un comportement à partir d'une représentation graphique de l'énergie potentielle dans le cas d'un mouvement conservatif.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
Champ de force conservative et énergie potentielle Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel) et de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle pour un système à un degré de liberté. Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
Énergie mécanique Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Justifier et exploiter la conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable. **Capacité numérique** : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.

Second semestre

Thème M – mouvements et interactions

M.4 Mouvement de particules chargées dans des champs électriques et magnétiques, uniformes et stationnaires

Dans cette partie, l'accent est d'abord porté sur la production d'un champ électrique ou magnétique. L'examen de cartes de champs électrostatiques et magnétostatiques permet non seulement de localiser leurs sources dont la nature physique (charge ou courant électrique) est affirmée, mais aussi d'identifier les zones de l'espace où le champ, électrostatique ou magnétostatique, peut être modélisé par un champ uniforme. Cette approche prépare l'étude plus approfondie de l'électrostatique et de la magnétostatique menée en seconde année.
L'introduction de la force de Lorentz est ensuite le point de départ pour l'étude du mouvement d'une particule chargée

dans un champ électrique ou magnétique, uniforme et stationnaire, en évitant tout développement calculatoire excessif. Grâce à l'examen de situations concrètes et motivantes, les étudiants sont amenés à analyser des trajectoires, à conduire une réflexion sur les moyens qui peuvent être mis en œuvre pour accélérer une particule chargée. Cette étude peut être articulée avec celle menée en chimie au sujet de la spectrométrie de masse.

M.4.1 Champs électrique et magnétique

Notions et contenus	Capacités exigibles
Champ électrique Sources de champ électrique ; cartes de champ électrique.	Tracer l'allure des cartes de champ électrique pour une charge ponctuelle et un condensateur plan. Identifier sur une carte de champ électrique les zones où le champ peut être modélisé par un champ uniforme. Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ électrique à partir d'expressions fournies. Citer l'ordre de grandeur de la rigidité diélectrique de l'air sec.
Champ magnétique Sources de champ magnétique ; cartes de champ magnétique.	Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue. Identifier sur une carte de champ magnétique les zones où le champ peut être modélisé par un champ uniforme. Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.

M.4.2 Mouvement de particules chargées

Notions et contenus	Capacités exigibles
Force de Lorentz exercée sur une particule chargée.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
Puissance de la force de Lorentz.	Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Énergie potentielle d'une charge soumise à un champ électrique.	Exprimer l'énergie potentielle d'une particule chargée en fonction de sa charge et du potentiel électrique.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

Thème S – ondes et signaux

S.4 Oscillateurs électriques et mécaniques en régime libre

Dans le prolongement des parties **M.2** et **S.3**, on aborde désormais l'étude temporelle de systèmes du deuxième ordre, en prenant en compte des effets dissipatifs. L'oscillateur LC est d'abord introduit de manière à mettre l'accent sur l'universalité du modèle de l'oscillateur harmonique. L'étude conjointe des oscillateurs amortis mécaniques et électriques s'appuie sur leur analogie formelle et de comportement. L'approche énergétique peut aussi donner l'occasion de déterminer l'équation différentielle caractéristique de l'évolution temporelle d'un oscillateur harmonique à partir de la propriété de conservation de son énergie, qu'il soit de nature électrique ou mécanique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oscillateurs harmoniques Modèle du circuit LC.	Établir l'équation différentielle qui caractérise un circuit LC ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Identifier l'expression de la pulsation propre dans l'équation différentielle d'un circuit LC.
Oscillateurs amortis Modèles du circuit RLC série et de l'oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir qualitativement l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. **Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électrique.** **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.**
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

S.5 Régime sinusoïdal forcé

La partie « **S.5 Régime sinusoïdal forcé** » est l'occasion d'introduire les notions d'impédance et de résonance. En lien avec la partie **S.4**, le professeur est invité à signaler l'existence d'analogies comportementales avec des situations relevant du domaine de la mécanique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Régime sinusoïdal forcé.	Identifier une situation de régime sinusoïdal forcé.
Description du comportement d'un dipôle en régime sinusoïdal forcé. Impédance complexe.	Utiliser la représentation complexe des signaux pour étudier le régime forcé. Interpréter physiquement le module et l'argument de l'impédance complexe d'un dipôle. Établir l'expression de l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateurs électriques soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Relier qualitativement l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.**

S.6 Propagation d'un signal

Dans la partie **« S.6 Propagation d'un signal »**, il est recommandé de s'appuyer sur une approche expérimentale ou sur des logiciels de simulation pour permettre aux étudiants de faire le lien entre l'observation de signaux qui se propagent et la traduction mathématique de cette propagation, sans qu'aucune référence ne soit faite à une équation d'onde. L'étude de la somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence et du phénomène d'interférences associé permet de mettre en évidence le rôle essentiel joué par la différence de phase entre les deux signaux dans le signal résultant. L'étude des interférences lumineuses est l'occasion d'introduire la notion de différence de chemin optique et de la relier à la différence de phase. Les ondes stationnaires permettent d'illustrer le rôle des conditions aux limites dans l'apparition de modes propres.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Exemples de signaux.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, mécaniques, électromagnétiques.
Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$. Écrire les signaux sous la forme $f(t-x/c)$ ou $g(t+x/c)$. Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Phase, phase à l'origine, vitesse de phase, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase. Relier la différence de phase entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation. **Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et la différence de phase dues à la propagation d'un phénomène ondulatoire.**
Phénomène d'interférences Interférences de deux ondes de même fréquence. Interférences constructives, interférences destructives.	Caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes et en citer des conséquences concrètes. Établir les conditions d'interférences constructives et destructives de deux ondes issues de deux sources ponctuelles en phase dans le cas d'un milieu de propagation homogène. Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction de la différence de phase. **Capacité numérique :** représenter, à l'aide d'un langage de programmation, la somme de deux signaux sinusoïdaux périodiques synchrones en faisant varier la phase à l'origine de l'un des deux.
Interférences de deux ondes lumineuses de même fréquence, différence de chemin optique. Exemple du dispositif des trous de Young éclairé par une source monochromatique.	Déterminer les lieux d'interférences constructives et les lieux d'interférences destructives dans le cas des trous de Young. Relier la différence de phase entre les deux ondes à la différence de chemin optique. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique linéarisée entre les deux ondes. Établir l'expression de l'interfrange. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser le phénomène d'interférences de deux ondes.**
Ondes stationnaires mécaniques	

Modes propres.	Caractériser une onde stationnaire par l'existence de nœuds et de ventres. Exprimer les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde. Utiliser la propriété énonçant qu'une vibration quelconque d'une corde accrochée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres. Relier les notions sur les ondes stationnaires avec celles utilisées en musique. **Décrire une onde stationnaire observée par stroboscopie sur la corde de Melde.** **Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant d'analyser le spectre du signal acoustique produit par une corde vibrante.** **Capacité numérique :** représenter, à l'aide d'un langage de programmation, une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de celle du fondamental.

S.7 Induction électromagnétique

S.7.1 Lois de l'induction

Cette partie repose intégralement sur la loi de Faraday, qui se prête parfaitement à une introduction expérimentale et qui constitue un bel exemple d'illustration de l'histoire des sciences. On évoque, à ce sujet, les différentes descriptions possibles d'un même phénomène selon le référentiel dans lequel on se place pour le modéliser.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Flux d'un champ magnétique Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	**Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.**
Loi de modération de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.

S.7.2 Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps

Dans la continuité de l'introduction de la loi de Faraday, on aborde le phénomène d'auto-induction, puis le couplage par mutuelle inductance entre deux circuits fixes. Le transformateur de tension est présenté comme un exemple concret de système exploitant ce couplage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Auto-induction Flux propre et inductance propre.	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur. **Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.**
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.

Cas de deux bobines en interaction Inductance mutuelle entre deux bobines.	Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale ». **Mesurer la valeur de l'inductance mutuelle entre deux bobines et étudier l'influence de la géométrie.**
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
Transformateur de tension.	Établir la loi des tensions.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.

S.7.3 Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

La conversion de puissance électromécanique constitue le cœur de cette partie, dans laquelle le professeur est libre d'introduire la force de Laplace avec ou sans référence à la force de Lorentz. L'objectif est de se doter d'expressions opérationnelles pour pouvoir étudier le mouvement d'une barre en translation dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. Cette situation, simple sur plan géométrique, permet de dégager les concepts et les paramètres physiques pertinents pour la modélisation des convertisseurs électromécaniques, dont le haut-parleur électrodynamique fait figure d'exemple de référence.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Force de Laplace Densité linéique de la force de Laplace dans le cas d'un élément de courant filiforme.	Distinguer le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.
Résultante et puissance de la force de Laplace.	Établir et exploiter l'expression de la résultante de la force de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. Exprimer la puissance de la force de Laplace.
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique Rail de Laplace.	Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en citer des exemples d'utilisation.
Conversion de puissance électrique en puissance mécanique Haut-parleur électrodynamique.	Analyser le fonctionnement du haut-parleur électrodynamique en s'appuyant sur la configuration des rails de Laplace. Réaliser un bilan énergétique. **Mettre en œuvre une étude expérimentale d'un haut-parleur électrodynamique visant à illustrer son principe de fonctionnement ou à déterminer quelques-unes de ses caractéristiques.**

Thème E – énergie : conversions et transferts

E.3 Statique des fluides

La partie « **E.3 Statique des fluides** » s'organise en deux sous-parties. L'établissement de la relation fondamentale de la statique des fluides donne l'occasion de mettre en œuvre un raisonnement à l'échelle locale de la particule de fluide. Il convient d'insister sur le principe du découpage d'un domaine physique (volume, surface) en éléments infinitésimaux et de la sommation d'une grandeur extensive (force) pour ce découpage. La notion de gradient d'un champ scalaire est hors programme. L'étude d'un fluide à l'équilibre hydrostatique dans le champ de pesanteur est ensuite conduite à l'aide de deux exemples : le modèle de l'atmosphère isotherme et la modélisation du champ de pression dans un fluide considéré comme incompressible. L'utilisation de l'outil numérique permet d'aller au-delà de ces modèles introductifs pour s'approcher d'une description plus réaliste.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Pression dans un fluide au repos Forces volumiques, forces surfaciques.	Citer des exemples de forces surfaciques ou volumiques.
Résultante de forces de pression sur une surface.	Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Déterminer l'expression ou la valeur de la résultante des forces de pression sur une surface plane.
Statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme.	Établir la relation $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \pm\rho g$.
Équilibre hydrostatique dans le champ de pesanteur terrestre Modèle de l'atmosphère isotherme. Échelle de hauteur caractéristique de variation de la pression.	Établir l'expression de la pression en fonction de l'altitude dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait. Citer la valeur de la pression atmosphérique moyenne au niveau de la mer. **Capacité numérique :** à l'aide d'un langage de programmation, étudier les variations de température et de pression dans l'atmosphère.
Distribution de pression dans un fluide homogène incompressible.	Établir l'expression de la pression en fonction de la profondeur dans le cas d'un fluide incompressible.
Poussée d'Archimède.	Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède.

E.4 Bilan énergétique pour un fluide en écoulement stationnaire

La partie « **E.4 Bilan énergétique pour un fluide en écoulement stationnaire** » s'appuie sur les compétences développées par les étudiants dans la voie technologique du lycée. Il s'agit ici d'introduire les outils théoriques nécessaires à la description de systèmes hydrauliques sur le plan énergétique. Le premier principe de la thermodynamique est appliqué à l'étude de l'écoulement stationnaire d'un fluide dans un système hydraulique. Sa démonstration permet non seulement de comprendre pourquoi la fonction d'état enthalpie intervient mais aussi d'insister sur le fait que les différentes variations sont calculées entre l'entrée et la sortie du système. Pour autant, cette démonstration n'est pas exigible des étudiants. La relation de Bernoulli est admise dans le cas particulier de l'écoulement adiabatique et stationnaire d'un fluide considéré comme incompressible, la parenté de sa formulation avec le premier principe appliqué à l'étude de l'écoulement stationnaire d'un fluide étant soulignée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Bilans de masse. Débit de masse. Conservation du débit de masse pour un écoulement stationnaire.	Établir et exploiter un bilan de masse en raisonnant sur un système ouvert ou fermé adapté.
Bilan énergétique pour un fluide en écoulement stationnaire Premier principe de la thermodynamique pour l'écoulement d'un fluide en régime stationnaire dans un système muni d'une seule entrée et d'une seule sortie. Travail utile et transfert thermique massiques.	Exploiter le premier principe de la thermodynamique pour l'écoulement d'un fluide en régime stationnaire, en termes de grandeurs massiques, notamment pour l'étude d'un détendeur, d'un compresseur, d'une turbine, d'un échangeur thermique.
Diagramme (P,h) d'un fluide réel.	Repérer l'état thermodynamique d'un fluide par un point sur le diagramme. Décrire qualitativement ou quantitativement l'état thermodynamique d'un fluide repéré par un point du diagramme.

Cas particulier de l'écoulement adiabatique et stationnaire d'un fluide considéré comme incompressible.	
Relation de Bernoulli pour l'écoulement adiabatique et stationnaire d'un fluide considéré comme incompressible dans un système muni d'une seule entrée et d'une seule sortie.	Exploiter la relation de Bernoulli, fournie sous la forme $\frac{P_2-P_1}{\rho}+\frac{1}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right)\pm g(z_2-z_1)=w_u$, en procédant, le cas échéant, à la simplification de termes négligeables.

E.5 Machines thermiques

La partie « **E.5 Machines thermiques** » se limite à la modélisation du fonctionnement d'une machine thermique par une évolution cyclique ditherme. Elle s'inscrit dans le prolongement de la section **E.4** où sont étudiés, sur le plan énergétique, différents éléments hydrauliques constitutifs de machines thermiques réelles. La limitation de la performance d'une machine thermique imposée par le second principe de la thermodynamique, vu en deuxième année, est abordée grâce à l'inégalité de Clausius, admise à ce stade de la formation des étudiants. Le recours au diagramme (P,h) d'un fluide réel permet d'étudier des situations concrètes, de se libérer de calculs excessifs et de s'interroger sur les limites des modèles de fluides idéalisés. Les diagrammes (T,s) sont hors-programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Application du premier principe de la thermodynamique aux machines thermiques cycliques dithermes. Rendement, efficacité.	Décrire le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur thermique ditherme. Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme. Étudier des propriétés des machines thermiques réelles à l'aide de diagrammes (P,h). Définir un rendement ou une efficacité et la relier aux énergies échangées au cours d'un cycle. Citer quelques ordres de grandeur des rendements ou efficacités des machines thermiques réelles actuelles. Expliquer le principe de la cogénération.
Inégalité de Clausius. Limitation du rendement ou de l'efficacité d'une machine thermique cyclique ditherme.	Exploiter l'inégalité de Clausius fournie. Identifier quelques phénomènes physiques responsables de la limitation du rendement ou de l'efficacité d'une machine thermique.

Annexe 1 : matériel

La liste ci-dessous regroupe le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

1. **Domaine optique**
   — Goniomètre
   — Viseur à frontale fixe
   — Lunette auto-collimatrice
   — Laser à gaz
   — Lampes spectrales
   — Source de lumière blanche à condenseur
2. **Domaine électrique**
   — Oscilloscope numérique
   — Carte d'acquisition et logiciel dédié
   — Générateur de signaux basse fréquence
   — Multimètre numérique
   — Multiplieur analogique
   — Émetteur et récepteur acoustique (domaine audible et domaine ultrasonore)
   — Microcontrôleur
3. **Domaines mécanique et thermodynamique**
   — Dynamomètre
   — Capteur de pression
   — Accéléromètre
   — Stroboscope
   — Webcam avec logiciel dédié
   — Appareil photo numérique ou caméra numérique
   — Thermomètre ou thermocouple
   — Calorimètre
   — Machines thermiques dithermes

Annexe 2 : outils mathématiques

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en physique. La capacité à mettre en œuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la physique fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année. Il est complété dans le programme de seconde année. Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité, sont traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique).

Outils mathématiques	Capacités exigibles
1. Équations algébriques	
Systèmes linéaires de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas $n = p = 2$.
Équations non linéaires.	Représenter graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$. Interpréter graphiquement la ou les solutions.
2. Équations différentielles	
Équations différentielles linéaires à coefficients constants.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$.	Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A\cos(\omega x + \varphi)$ (en utilisant la notation complexe).
Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$.	Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre. Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A\exp(\lambda x)$ avec λ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton $x'' = f(x)$ et l'exploiter graphiquement. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.
3. Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ($x \to x^a$).
Dérivée. Notation $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.
Développements limités.	Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1+x)^\alpha$, e^x et $\ln(1+x)$, et à l'ordre 2 des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Valeur moyenne.	Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions cos, sin, $\cos^2$ et $\sin^2$.
Représentation graphique d'une fonction.	Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni par un formulaire.
4. Géométrie	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Projection d'un vecteur et produit scalaire.	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
Produit vectoriel.	Interpréter géométriquement le produit vectoriel et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée directe. Utiliser la bilinéarité et le caractère antisymétrique du produit vectoriel. Faire le lien avec l'orientation des trièdres.
Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations de l'espace. Utiliser leur effet sur l'orientation de l'espace.

Courbes planes.	Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle. Utiliser la représentation polaire d'une courbe plane ; utiliser un grapheur pour obtenir son tracé.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre.
5. Trigonométrie	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés. Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles d'un plan perpendiculaire à cet axe.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos(\pi/2 \pm x)$, parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Citer les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.
Nombres complexes et représentation dans le plan. Somme et produit de nombres complexes.	Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclut l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.
Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que les capacités exigibles en fin de première année.

Domaines numériques	Capacités exigibles
1. Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque `matplotlib` pour représenter un nuage de points.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque `matplotlib` pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
Courbes planes paramétrées.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque `matplotlib` pour tracer une courbe plane paramétrée.
2. Équations algébriques	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par une méthode dichotomique. Mettre en œuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction `bisect` de la bibliothèque `scipy.optimize` (sa spécification étant fournie).
Systèmes linéaires de n équations indépendantes à n inconnues.	Définir les matrices A et B à la représentation matricielle $AX = B$ du système à résoudre. Utiliser la fonction `solve` de la bibliothèque `numpy.linalg` (sa spécification étant fournie).
3. Intégration – Dérivation	

Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.	Mettre en œuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment.
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.
4. Équations différentielles	
Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.
Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2	Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1. Utiliser la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate` (sa spécification étant fournie).
5. Probabilité - statistiques	
Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques `random` et/ou `numpy` (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction `hist` de la bibliothèque `matplotlib.pyplot` (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.
6. Traitement de données numériques	
Régression linéaire.	Utiliser la fonction `polyfit` de la bibliothèque `numpy` (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction `random.normal` de la bibliothèque `numpy` (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Technologie, physique et chimie (TPC)

Annexe 3
Programme de chimie de 1ère année

Programme de chimie — TPC1

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de chimie de la classe de TPC1 est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques préparant les étudiants à la deuxième année de classe préparatoire et, au-delà, à un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant ou de scientifique. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences déjà travaillées au lycée inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats. L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant.

Parce que la chimie est avant tout une science expérimentale qui développe la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours, en travaux dirigés ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ils auront à le faire dans l'exercice de leur métier d'ingénieur, de chercheur ou de scientifique.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques, notamment dans le domaine de la simulation. Ces sciences offrent aujourd'hui aux étudiants la possibilité de modélisations numériques complexes, permettant de décrire plus finement le monde réel.

Afin justement de pouvoir élaborer des modèles en prise avec la réalité, les étudiants doivent apprendre à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits et celui des concepts et des théories. La démarche de modélisation occupe donc une place centrale dans le programme et l'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative.

La construction d'un modèle passe par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie de l'étudiant et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à apprendre à mobiliser connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est globalement organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée « **Formation expérimentale** », sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques** » est structurée autour de chapitres portant sur les transformations de la matière d'une part et la structure et les propriétés physiques et chimiques de la matière d'autre part, des modélisations macroscopiques et microscopiques venant rendre compte des phénomènes de plus en plus précisément. La présentation en deux colonnes « notions et contenus » et« capacités exigibles » met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise. La progression dans les contenus disciplinaires est organisée en deux semestres. Pour faciliter la progressivité des acquisitions, des reprises sont effectuées en enrichissant les descriptions ; par exemple, les transformations sont essentiellement modélisées macroscopiquement au premier semestre, puis progressivement des descriptions microscopiques sont envisagées et enfin un dialogue entre les deux niveaux de description macroscopique-microscopique est engagé.

Certains items de cette seconde partie, **identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants ; l'annexe dédiée à cette composante en précise les objectifs.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de chimie et de physique en fin de l'année de TPC1.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour l'ensemble des étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression pour chacun des deux semestres ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétences	Exemples de capacités associées
S'approprier	— Rechercher, extraire et organiser de l'information ou des données en lien avec la situation étudiée. — Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, représentation graphique, tableau, ...). — Énoncer ou dégager une problématique scientifique. — Représenter la situation par un schéma modèle. — Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. — Relier le problème à une situation modèle connue. — Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser / Raisonner	— Formuler des hypothèses. — Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. — Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. — Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle, des lois physiques ou chimiques. — Évaluer des ordres de grandeur. — Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. — Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de plusieurs documents.
Réaliser	— Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, d'un protocole, d'un modèle. — Extraire une information d'un texte, d'une représentation graphique, d'un tableau, d'un schéma, d'une photographie. — Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. — Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. — Effectuer des représentations graphiques à partir de données. — Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. — Conduire une analyse dimensionnelle.

Valider	— Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. — Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. — Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. — Analyser les résultats de manière critique. — Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, ...). — Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.
Communiquer	— À l'écrit comme à l'oral : ∘ présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente. ∘ rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation. ∘ appuyer son propos sur des supports appropriés. ∘ utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, représentations graphiques, cartes mentales, ...). — Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.
La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à la poursuite d'études scientifiques, à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme par exemple la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'éducation à l'**environnement** et au **développement durable**, le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences sera d'autant plus efficace que les étudiants seront acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires, pouvant être en langue anglaise, est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques, physique, mathématiques et informatique, ainsi qu'avec l'enseignement de sciences en langue vivante (ESLV).

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veillera soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Première partie

Formation expérimentale

Cette partie, spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques, vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.
D'une part, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la **mesure** et de l'évaluation des **incertitudes**. D'autre part, elle présente de façon détaillée l'ensemble des **capacités expérimentales** qui doivent être acquises et pratiquées en autonomie par les étudiants à l'issue de leur première année de CPGE.
Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure en Annexe 1 du présent programme.

1 Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année. Elles sont communes aux enseignements de physique et de chimie et leur apprentissage s'effectue de manière coordonnée entre les enseignants.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de résultats expérimentaux, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur qui s'exprime en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. **Capacité numérique :** simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de type simulation de Monte-Carlo permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. **Capacité numérique :** à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, simuler un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation de Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2 Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales que les étudiants doivent avoir acquises, durant les séances de travaux pratiques, à l'issue de la première année. Une séance de travaux pratiques s'articule autour d'une problématique, que les thèmes – repérés en gras dans le corps du programme – peuvent servir à définir.
Les capacités rassemblées ici ne constituent donc en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'organiseraient autour d'une découverte du matériel : par exemple, toutes les capacités mises en œuvre autour d'un appareil de mesure ne sauraient être l'objectif unique d'une séance, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion de l'étude d'un problème concret.
Les différentes capacités à acquérir sont, pour plus de clarté, regroupées en quatre domaines en chimie, les deux premiers étant davantage transversaux :

2.1 Prévention du risque au laboratoire de chimie

2.2 Mesures de grandeurs physiques

2.3 Synthèses chimiques

2.4 Analyses qualitatives et quantitatives

Cette structuration ne constitue pas une incitation à limiter une activité expérimentale à un seul domaine. En effet, lors de la mise en œuvre d'une synthèse au laboratoire, il peut être utile de procéder à une analyse du produit formé ou à une mesure de grandeur physique caractéristique et, bien entendu, il est indispensable de prendre en compte les consignes de sécurité.
Par ailleurs, il convient de développer les compétences de la démarche scientifique et de favoriser l'autonomie et la prise d'initiative des étudiants lors des activités expérimentales.
Le matériel nécessaire à l'acquisition de l'ensemble des capacités ci-dessous figure en **Annexe 1** du programme.

2.1 Prévention du risque chimique au laboratoire

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation, au rejet et au stockage des espèces chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Prévention du risque chimique Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H), conseils de prudence (P). Fiches de données de sécurité (FDS).	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et aux conditions de stockage des produits chimiques. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

2.2 Mesures de grandeurs physiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
Mesures de : — Volume — Masse — pH — Conductance et conductivité — Tension — Température — Pouvoir rotatoire — Indice de réfraction — Absorbance et transmittance	Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise. Distinguer les instruments de verrerie *In* et *Ex*. Préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée à partir d'un solide, d'un liquide, d'une solution de composition connue avec le matériel approprié. Utiliser les méthodes et le matériel adéquats pour transférer l'intégralité du solide ou du liquide pesé. Utiliser un appareil de mesure (balance, pH-mètre, conductimètre, voltmètre, thermomètre, réfractomètre, spectrophotomètre, polarimètre) en s'appuyant sur une notice. Mettre en œuvre des mesures calorimétriques à pression constante. Choisir les électrodes adaptées à une mesure électrochimique. Construire un dispositif électrochimique à partir de sa représentation symbolique. Étalonner une chaîne de mesure.

2.3 Synthèses chimiques

Au cours de la première année, l'étudiant acquiert la maîtrise de différentes techniques mises en œuvre dans les synthèses et les fondements théoriques de ces techniques, en lien avec les propriétés physico-chimiques concernées. Progressivement, il est invité à proposer des stratégies de transformation des réactifs, de séparation et de purification des produits synthétisés.

Les différentes techniques utilisées permettent de réaliser les opérations de :

— chauffage et refroidissement ;

— séparation et purification : extraction liquide-liquide ou liquide-solide, filtrations, séchage d'un liquide ou d'un solide, séparation avec usage de l'évaporateur rotatif, recristallisation.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Transformation chimique	Choisir la verrerie adaptée à la transformation réalisée et aux conditions opératoires mises en œuvre.
Transformations à chaud, à froid, à température ambiante. Contrôle et régulation de la température du milieu réactionnel.	Réaliser le ou les montages appropriés et en expliquer le principe et l'intérêt. Choisir ou justifier l'ordre d'introduction des réactifs. Réaliser et réguler une addition au goutte à goutte. Utiliser le moyen de chauffage ou de refroidissement adéquat. Suivre et contrôler l'évolution de la température dans le réacteur. Choisir un moyen approprié pour réguler une éventuelle ébullition. Utiliser un réfrigérant, contrôler et réguler le reflux.
Suivi de l'évolution de la transformation.	Mettre en œuvre des méthodes permettant de suivre qualitativement ou quantitativement l'avancement de la transformation.
Séparation et purification	Choisir ou justifier un protocole de séparation ou de purification d'une espèce chimique, sur la base de données fournies ou issues d'observations et/ou de mesures.
Séparation de deux liquides non miscibles.	Réaliser une extraction liquide-liquide. Identifier la nature des phases dans une ampoule à décanter. Distinguer extraction et lavage d'une phase.

Séparation de deux espèces chimiques dissoutes dans une phase liquide.	Élaborer et mettre en œuvre un protocole de séparation de deux espèces dissoutes dans une phase liquide.
Séparation d'un soluté du solvant.	Expliquer l'intérêt de l'évaporateur rotatif.
Séparation d'un liquide et d'un solide.	Réaliser et mettre en œuvre une filtration simple, une filtration sous pression réduite. Choisir et justifier la méthode de filtration adaptée au système étudié.
Lavage d'un solide.	Réaliser et justifier les différentes étapes du lavage d'un solide : ajout du solvant de lavage, trituration, essorage.
Recristallisation d'un solide.	Expliquer et mettre en œuvre la technique de recristallisation. Justifier à l'aide de données pertinentes et/ou par l'observation le choix d'un solvant de recristallisation et la quantité mise en œuvre.
Séchage d'un solide.	Sécher un solide dans une étuve. Estimer, par des mesures de masse, l'efficacité du séchage.
Séchage d'un liquide.	Utiliser un desséchant solide et estimer correctement, par l'observation, la quantité à utiliser.

2.4 Analyses qualitatives et quantitatives

Au cours de la première année, l'étudiant acquiert la maîtrise de différentes techniques expérimentales mises en œuvre lors des analyses qualitatives et quantitatives pour caractériser une espèce chimique, en contrôler la pureté ou la doser. L'étudiant sait distinguer les méthodes d'analyse destructives et non destructives et développe progressivement la capacité à proposer une stratégie de mesures de concentrations ou de quantités de matière, une méthode de caractérisation d'une espèce chimique, tenant compte des propriétés physico-chimiques du système étudié.

Les techniques utilisées lors des analyses qualitatives et quantitatives sont les suivantes : pH-métrie, conductimétrie, potentiométrie à intensité nulle, spectrophotométrie UV-visible, polarimétrie, réfractométrie, chromatographie sur couche mince.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
Caractérisation d'une espèce chimique et contrôle de sa pureté	Proposer ou mettre en œuvre, à partir d'informations fournies, des tests qualitatifs préalables à l'élaboration d'un protocole.
Chromatographies sur couche mince.	Mettre en œuvre une chromatographie sur couche mince pour la caractérisation d'une espèce chimique et le suivi d'une transformation. Justifier le choix de la méthode de révélation utilisée.
Détermination expérimentale de grandeurs physiques ou spectroscopiques caractéristiques de l'espèce chimique (les principes théoriques de la RMN sont hors programme).	Extraire d'une banque de données des informations sur les propriétés physiques des espèces chimiques. Mesurer une température de fusion. Mesurer un indice de réfraction. Mesurer un pouvoir rotatoire. Mesurer une absorbance. Déterminer un coefficient d'absorption molaire en spectrophotométrie UV-visible. Comparer les données tabulées aux valeurs mesurées et interpréter d'éventuels écarts. Comparer les caractéristiques d'un produit synthétisé avec celles du produit commercial. À partir d'une mesure appropriée, déterminer le rendement d'une synthèse, d'une méthode de séparation.
Dosages par étalonnage	Déterminer une concentration en exploitant la mesure de grandeurs physiques caractéristiques de l'espèce chimique ou en construisant et en utilisant une courbe d'étalonnage. Déterminer une concentration ou une quantité de matière par spectrophotométrie UV-visible.

Dosages par titrage Titrages directs, indirects. Équivalence. Titrages simples, successifs, simultanés. Méthodes expérimentales de suivi d'un titrage : pH-métrie, conductimétrie, potentiométrie à intensité nulle, indicateurs colorés de fin de titrage.	Identifier et exploiter la réaction support du titrage (recenser les espèces présentes dans le milieu au cours du titrage, repérer l'équivalence, justifier qualitativement l'allure de la courbe ou le changement de couleur ou d'aspect observé). Proposer ou justifier le protocole d'un titrage à l'aide de données fournies ou à rechercher. Mettre en œuvre un protocole expérimental correspondant à un titrage direct ou indirect. Choisir et utiliser un indicateur coloré de fin de titrage.
Méthodes d'exploitation des courbes expérimentales.	Exploiter une courbe de titrage pour déterminer la quantité de matière, masse ou concentration de l'espèce titrée. Exploiter une courbe de titrage pour déterminer une valeur expérimentale d'une constante thermodynamique d'équilibre. Utiliser un logiciel de simulation pour tracer des courbes de distribution et confronter la courbe de titrage simulée à la courbe expérimentale. Justifier la nécessité d'effectuer un titrage indirect. Distinguer équivalence et repérage de fin de titrage.
Suivi cinétique de transformations chimiques Suivi en continu de l'évolution temporelle d'une grandeur physique. Limitation de l'évolution temporelle (trempe) d'un système par dilution, transformation chimique ou refroidissement. Régulation de température.	Choisir une méthode de suivi prenant en compte la facilité de mise en œuvre, les propriétés des espèces chimiques étudiées, la durée de la transformation estimée ou fournie. Exploiter les résultats d'un suivi temporel de concentration pour déterminer les caractéristiques cinétiques d'une réaction. Proposer et mettre en œuvre des conditions expérimentales permettant la simplification de la loi de vitesse. Déterminer la valeur d'une énergie d'activation.

Deuxième partie
Contenus thématiques

L'organisation des semestres est la suivante.

Premier semestre

Deuxième semestre

Premier semestre

1. Transformations de la matière

L'objectif de cette partie est d'amener les étudiants à mobiliser de manière autonome les notions et modèles pour décrire, au niveau macroscopique, un système physico-chimique et son évolution. Il convient que les problématiques abordées, les illustrations et les applications prennent largement appui sur des transformations chimiques rencontrées dans la vie courante, au laboratoire, en milieu industriel ou dans le monde du vivant.

À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être, par la suite, valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

— décrire un système physico-chimique avec méthode et en utilisant un vocabulaire scientifique précis ;

— effectuer une distinction entre les mondes des objets et des phénomènes (systèmes physico-chimiques, transformations chimiques) et le monde des modèles (réaction chimique comme modèle d'une transformation, lois d'évolution temporelle comme modèle macroscopique de l'évolution) ;

— exploiter les outils de description ou d'analyse expérimentale des systèmes chimiques pour modéliser leur évolution ;

— proposer des approximations simplifiant l'exploitation quantitative de données expérimentales et en vérifier la pertinence ;

— confronter les prévisions d'un modèle avec des résultats expérimentaux ;

— traduire, en langage de programmation, les démarches mises en œuvre pour déterminer l'état final d'un système ou pour exploiter des résultats expérimentaux et les confronter à des modèles.

1.1 Description et évolution d'un système vers un état final lors d'une transformation chimique

Les concepts développés dans cette partie permettent d'envisager l'optimisation des synthèses ou des analyses, tout à la fois pour obtenir davantage de produit désiré, réduire des produits secondaires non désirés ou favoriser une réaction support d'une analyse.
L'étude quantitative de l'état final d'un système, siège d'une transformation chimique, est réalisée à partir d'une modélisation par une seule réaction chimique symbolisée par une équation de réaction à laquelle est associée une constante thermodynamique d'équilibre. Il s'agit de prévoir le sens d'évolution de systèmes homogènes ou hétérogènes et de déterminer leur composition dans l'état final.
L'utilisation d'un langage de programmation permet l'étude, le cas échéant, d'un système siège d'une transformation chimique modélisée par une réaction unique et pour lequel la résolution analytique exacte est difficile.
Les compétences relatives à cette partie du programme sont ensuite mobilisées régulièrement au cours de l'année, plus particulièrement au second semestre lors des transformations en solution aqueuse, et en seconde année, notamment dans le cadre de la thermodynamique chimique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Système physico-chimique Espèces physico-chimiques.	Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système.
Corps purs et mélanges : concentration en quantité de matière, fraction molaire, pression partielle. Variables intensives et extensives. Composition d'un système physico-chimique. Modèle du gaz parfait : équation d'état.	Décrire la composition d'un système à l'aide des grandeurs physiques pertinentes. Reconnaître le caractère extensif ou intensif d'une variable. Utiliser l'équation d'état du gaz parfait dans le cas d'un système gazeux.
Transformation chimique d'un système Modélisation d'une transformation par une ou plusieurs réactions chimiques. Équation de réaction ; constante thermodynamique d'équilibre.	Écrire l'équation de la réaction (ou des réactions) qui modélise(nt) une transformation chimique donnée. **Déterminer une constante thermodynamique d'équilibre et tester l'influence de différents paramètres sur l'état d'équilibre d'un système.**
Évolution d'un système lors d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique : avancement, activité, quotient de réaction, critère d'évolution.	Décrire qualitativement et quantitativement un système chimique dans l'état initial ou dans un état d'avancement quelconque. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées ou de mélanges de gaz parfaits avec référence à l'état standard. Exprimer le quotient de réaction. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique.
Composition chimique du système dans l'état final : état d'équilibre chimique, transformation totale.	Identifier un état d'équilibre chimique. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique du système et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. **Capacité numérique :** déterminer, à l'aide d'un langage de programmation, l'état final d'un système, siège d'une transformation, modélisée par une réaction unique à partir des conditions initiales et de la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre.
Optimisation d'un procédé chimique : — par modification de la valeur de K° ; — par modification de la valeur du quotient de réaction.	Identifier les paramètres d'influence d'un état d'équilibre et leur contrôle pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable.

1.2 Évolution temporelle d'un système, siège d'une transformation chimique

L'étude de l'évolution temporelle d'un système chimique permet, dans un premier temps, de dégager expérimentalement les facteurs cinétiques concentration et température et de les mettre en œuvre en stratégie de synthèse et d'analyse. Cette mise en évidence est prolongée par les premières modélisations macroscopiques d'évolution des concentrations avec des lois de vitesse d'ordre simple et d'influence de la température avec la loi d'Arrhenius.
Les déterminations d'ordre global ou apparent mettent en œuvre la méthode différentielle ou intégrale, et peuvent s'effectuer à l'aide de logiciels dédiés ou d'un langage de programmation, pour l'exploitation des mesures dans le cadre d'un réacteur fermé parfaitement agité.
La modélisation microscopique par le biais des mécanismes réactionnels est présentée lors des premières synthèses en chimie organique (partie 2.3). Elle est approfondie ultérieurement avec une approche plus exhaustive des mécanismes et leur validation par confrontation des lois de vitesse issues du modèle et des résultats expérimentaux (en partie 4.1).

Notions et contenus	Capacités exigibles
Cinétique en réacteur fermé de composition uniforme Vitesses volumiques de consommation d'un réactif et de formation d'un produit. Vitesse de réaction pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique (supposée sans accumulation d'intermédiaires).	Relier la vitesse de réaction, dans les cas où elle est définie, à la vitesse volumique de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit.
Lois de vitesse : réactions sans ordre, réactions avec ordre simple (0, 1, 2), ordre global, ordre apparent. Temps de demi-vie d'un réactif, temps de demi-réaction.	**Établir une loi de vitesse à partir du suivi temporel d'une grandeur physique.** Exprimer, pour une transformation modélisée par une seule réaction chimique, la loi de vitesse si la réaction chimique admet un ordre et déterminer la valeur de la constante de vitesse à une température donnée. Déterminer la vitesse de réaction à différentes dates en utilisant une méthode numérique ou graphique. Déterminer un ordre de réaction à l'aide de la méthode différentielle ou à l'aide des temps de demi-réaction. Confirmer la valeur d'un ordre par la méthode intégrale, en se limitant strictement à une décomposition d'ordre 0, 1 ou 2 d'un unique réactif, ou se ramenant à un tel cas par dégénérescence de l'ordre ou conditions initiales stœchiométriques. **Capacité numérique :** à l'aide d'un langage de programmation ou d'un logiciel dédié, et à partir de données expérimentales, tracer l'évolution temporelle d'une concentration, d'une vitesse volumique de formation ou de consommation, d'une vitesse de réaction et tester une loi de vitesse donnée.
Loi empirique d'Arrhenius ; énergie d'activation.	**Déterminer l'énergie d'activation d'une réaction chimique.** Déterminer la valeur de l'énergie d'activation d'une réaction chimique à partir de valeurs de la constante cinétique à différentes températures.
Facteurs concentration et température en stratégie de synthèse et d'analyse : dilution, chauffage, reflux, trempe.	Reconnaître, dans un protocole, des opérations visant à augmenter ou à diminuer une vitesse de réaction.

2. Relations entre structure des entités chimiques, propriétés physiques et réactivité

Décrivant la matière au niveau macroscopique par des espèces chimiques aux propriétés physiques et chimiques caractéristiques, les chimistes la modélisent au niveau microscopique par des entités chimiques dont les structures électroniques et géométriques permettent d'interpréter et de prévoir certaines de ces propriétés.

À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être, par la suite, valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

- utiliser le tableau périodique des éléments pour déterminer ou justifier des structures d'entités et des propriétés microscopiques (polarité, polarisabilité, amphiphilie, nucléophilie, électrophilie)
- s'approprier les outils de description des entités chimiques et leur complémentarité dans la description des interactions intermoléculaires;
- relier structure et propriétés microscopiques aux grandeurs et comportements macroscopiques (cohésion, solubilité, miscibilité, températures de changement d'état, tensioactivité);
- appréhender la notion de solvant, de tensioactif, d'émulsion au niveau microscopique à travers les interactions intermoléculaires et au niveau macroscopique par leur utilisation au laboratoire, dans l'industrie et dans la vie courante;
- maîtriser et utiliser différentes représentations schématiques d'une entité chimique;
- pratiquer un raisonnement qualitatif argumenté pour expliquer le choix d'un mécanisme réactionnel en synthèse organique.

2.1 Structure des entités chimiques

L'étude de la constitution de la matière s'appuie sur le tableau périodique des éléments, outil essentiel des chimistes, dans l'objectif de développer progressivement les compétences relatives à l'utilisation des informations qu'il contient pour prévoir, dans cette partie, le nombre de liaisons d'un atome et la nature (apolaire, polaire, ionique) des liaisons chimiques.

En première année, on se limite au modèle de Lewis de la liaison covalente localisée et délocalisée pour rendre compte des structures et propriétés des entités chimiques; le modèle quantique de la liaison avec les orbitales atomiques et moléculaires est abordé uniquement en seconde année.
Le modèle de Lewis permet, pour les entités chimiques organiques, d'introduire les notions d'isomérie de configuration et de conformation. Les ordres de grandeur des énergies de liaison et de la barrière conformationnelle permettent de sensibiliser à la solidité et à la flexibilité des édifices moléculaires.
Sans donner lieu à une étude systématique, la nomenclature IUPAC s'enrichit au fur et à mesure des besoins pour représenter une entité chimique organique à partir de son nom, en tenant compte de la donnée d'éventuelles informations stéréochimiques et en utilisant un type de représentation donné.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèle de Lewis de la liaison covalente Liaison covalente localisée; longueur et énergie de la liaison covalente. Schéma de Lewis d'une molécule ou d'un ion monoatomique ou polyatomique (étude limitée aux éléments des blocs s et p).	Citer l'ordre de grandeur de longueurs et d'énergies de liaison covalente. Déterminer, pour les éléments des blocs s et p, le nombre d'électrons de valence d'un atome à partir de la position de l'élément dans le tableau périodique. Citer les éléments des périodes 1 à 3 du tableau périodique (nom, symbole, numéro atomique). Établir un ou des schémas de Lewis pertinent(s) pour une molécule ou un ion.
Liaison covalente délocalisée : mésomérie.	Identifier et représenter les enchaînements donnant lieu à une délocalisation électronique. Mettre en évidence une éventuelle délocalisation électronique à partir de données expérimentales.
Géométrie et polarité des entités chimiques Structure géométrique d'une molécule ou d'un ion polyatomique. Modèle VSEPR. Représentation de Cram.	Associer qualitativement la géométrie d'une entité à la minimisation de son énergie. Prévoir et interpréter les structures de type AX_n avec $n \leq 4$ et AX_pE_q, avec $p+q = 3$ ou 4.

Électronégativité : liaison polarisée, moment dipolaire, molécule polaire.	Comparer les électronégativités de deux atomes à partir de données ou de leurs positions dans le tableau périodique. Prévoir la polarisation d'une liaison à partir des électronégativités comparées des deux atomes mis en jeu. Relier l'existence ou non d'un moment dipolaire permanent à la structure géométrique d'une molécule. Déterminer direction et sens du vecteur moment dipolaire d'une liaison ou d'une molécule.
Structure des entités chimiques organiques Isomérie de constitution. Stéréoisomérie de conformation en série aliphatique non cyclique ; ordre de grandeur de la barrière conformationnelle. Représentation de Newman. Représentation topologique.	Comparer la stabilité de plusieurs conformations. Interpréter la stabilité d'un conformère donné.
Stéréoisomérie de configuration : chiralité, énantiomérie, diastéréoisomérie, descripteurs stéréochimiques R, S et Z, E.	Attribuer les descripteurs stéréochimiques aux centres stéréogènes. Déterminer la relation d'isomérie entre deux isomères. Représenter une entité chimique organique à partir de son nom, fourni en nomenclature systématique, en tenant compte de la donnée d'éventuelles informations stéréochimiques, en utilisant un type de représentation donné.
Activité optique, pouvoir rotatoire, loi de Biot.	Relier la valeur du pouvoir rotatoire à la composition d'un mélange de stéréoisomères. **Déterminer la composition d'un système chimique ou suivre une transformation chimique en utilisant l'activité optique.**
Séparation de diastéroisomères et d'énantiomères.	Citer des analogies et différences de propriétés entre des diastéréoisomères et des énantiomères. Reconnaître des protocoles de séparation de stéréoisomères.

2.2 Relations entre structure des entités chimiques et propriétés physiques macroscopiques

L'étude des interactions entre entités a pour objectif d'interpréter, de prévoir ou de comparer certaines propriétés physiques : température de changement d'état, miscibilité, solubilité, formation de micelles, d'émulsions. Ces notions sont réinvesties lors de l'étude des chromatographies sur couche mince et en phase gazeuse.
De nombreuses illustrations et applications dans la vie courante ou au niveau du laboratoire (choix de solvant pour les synthèses ou les extractions ; séparation par chromatographie sur colonne) ou dans le domaine du vivant (double couche et solubilisation des médicaments) peuvent être proposées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Interactions entre entités Interactions de van der Waals, polarisabilité. Liaison hydrogène (interaction par pont hydrogène). Ordres de grandeur énergétiques des interactions entre entités.	Lier la polarisabilité d'un atome à sa position dans le tableau périodique. Lier qualitativement la valeur des énergies d'interactions intermoléculaires à la polarité et la polarisabilité des molécules.
Changements d'état Température de changement d'état de corps purs moléculaires.	Prévoir ou interpréter les températures de changement d'état de corps purs moléculaires par l'existence d'interactions de van der Waals ou de liaisons hydrogène.

Solubilité, miscibilité Grandeurs caractéristiques et propriétés de solvants moléculaires : moment dipolaire, permittivité relative, caractère protogène. Mise en solution d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.	Associer une propriété d'un solvant moléculaire à une ou des grandeurs caractéristiques. Interpréter la miscibilité totale, partielle ou nulle de deux solvants. Interpréter la solubilité d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.
Séparation d'espèces d'un mélange : extraction par solvant, dissolution, précipitation, lavage. Constante de partage, log P.	**Déterminer une constante de partage.** **Réaliser une extraction, un lavage et les interpréter en termes de solubilité, miscibilité, constante de partage, ou log P.**
Chromatographies Chromatographie sur couche mince (CCM), rapport frontal. Chromatographie en phase gazeuse (CPG), temps de rétention.	Identifier la phase stationnaire et la phase mobile. Identifier la présence d'une espèce chimique dans un échantillon à partir de son chromatogramme (rapport frontal ou référence). Interpréter l'ordre d'élution des différentes espèces chimiques en relation avec leurs propriétés physico-chimiques et les caractéristiques de la phase stationnaire et de la phase mobile.
Amphiphilie Espèces chimiques amphiphiles, micelles, structure schématique des membranes cellulaires.	Prévoir le caractère amphiphile d'une entité à partir de sa structure. Interpréter la structure d'une association d'entités amphiphiles (micelle, bicouche, membrane cellulaire). Comparer et interpréter, en lien avec la structure des entités, les propriétés physiques d'espèces chimiques amphiphiles (concentration micellaire critique, solubilité).
Émulsions.	Décrire la structure d'une émulsion en distinguant phase dispersée et phase continue. Interpréter les propriétés détergentes ou émulsifiantes des espèces chimiques amphiphiles.

2.3 Réactivité des espèces organiques et premières applications en synthèse

L'objectif de cette partie est d'aborder les premières synthèses organiques en interprétant les transformations chimiques associées à partir de la réactivité des espèces organiques mises en jeu, réactivité déduite de la structure et des propriétés des entités chimiques qui les composent; pour ce qui concerne les propriétés acido-basiques, une table de pK_a sera systématiquement fournie.

Les premières modélisations, au niveau microscopique, des transformations chimiques par un mécanisme réactionnel sont établies sur des exemples simples faisant intervenir des entités nucléophiles et électrophiles, acides et basiques. Ces modélisations permettent de rendre compte de modifications de groupes caractéristiques (substitution, élimination, addition) et de chaînes carbonées, ainsi que de propriétés cinétiques ou stéréochimiques.

Les modèles mécanistiques et le modèle du complexe activé sont introduits sur des exemples de transformations s'appuyant, dans un premier temps, sur les halogénoalcanes, mais dans le but d'une maîtrise permettant un réinvestissement à d'autres groupes caractéristiques.

L'approche mécanistique est privilégiée à l'approche fonctionnelle pour favoriser le raisonnement et la transférabilité dans des situations analogues et pour commencer à engager la réflexion sur les stratégies de synthèse.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Réactivité des espèces organiques et écriture des mécanismes réactionnels Conséquences de la structure sur la réactivité : nucléophile, électrophile.	Identifier les sites électrophiles et/ou nucléophiles d'une entité chimique.

Modélisation microscopique d'une transformation : mécanisme réactionnel, acte élémentaire, molécularité, complexe activé, intermédiaire réactionnel.	Distinguer l'équation chimique symbolisant une réaction chimique de l'équation traduisant un acte élémentaire. Distinguer un intermédiaire réactionnel d'un complexe activé. Tracer et commenter un profil énergétique correspondant à un acte élémentaire ou à plusieurs actes élémentaires successifs. Donner la loi de vitesse d'une réaction se déroulant en un seul acte élémentaire.
Interprétation microscopique de l'influence des facteurs cinétiques.	Interpréter l'influence des concentrations et de la température sur la vitesse d'un acte élémentaire, en termes de fréquence et d'efficacité des chocs entre entités.
Formalisme des flèches courbes.	Utiliser le formalisme des flèches courbes pour rendre compte d'un acte élémentaire et le relier aux caractères nucléophile et électrophile des entités.
Synthèse organique en laboratoire Déroulement expérimental d'une synthèse organique : étapes de transformation, de séparation, de purification et de caractérisation. Détermination du rendement.	**Mettre en œuvre un protocole expérimental sur un exemple simple et représentatif d'une synthèse organique en laboratoire. Justifier et réaliser les différentes étapes de cette synthèse.**
Modifications de groupe caractéristique : exemple des halogénoalcanes Substitution nucléophile aliphatique : mécanismes limites S_N2 et S_N1 ; propriétés cinétiques et stéréochimiques.	Justifier le choix d'un mécanisme limite S_N2 ou S_N1 par des facteurs structuraux des réactifs et par des résultats expérimentaux sur la stéréochimie des produits ou sur la loi de vitesse de la réaction. Prévoir ou analyser la stéréosélectivité ou la stéréospécificité éventuelle d'une substitution nucléophile. Interpréter des différences de réactivité en termes de polarisabilité. Utiliser le postulat de Hammond pour interpréter l'influence de la stabilité du carbocation sur la vitesse d'une S_N1.
β-élimination ; mécanisme limite E2, propriétés stéréochimiques, régiosélectivité.	Prévoir ou analyser la régiosélectivité, la stéréosélectivité et la stéréospécificité éventuelle d'une β-élimination sur un halogénoalcane acyclique. Interpréter la formation de produits indésirables par la compétition entre les réactions de substitution et d'élimination.
Construction du squelette carboné : synthèse et utilisation d'organomagnésiens mixtes Organomagnésiens mixtes : propriétés nucléophiles ; préparation à partir des espèces halogénées ; inversion de polarité (Umpolung) lors de l'insertion du magnésium ; intérêt des organométalliques dans la construction d'une chaîne carbonée. Addition nucléophile, sur l'exemple des réactions entre un organomagnésien mixte et un aldéhyde, une cétone ou le dioxyde de carbone : mécanisme.	Déterminer le produit formé lors de la réaction d'un organomagnésien mixte sur un aldéhyde, une cétone ou le dioxyde de carbone et inversement, prévoir les réactifs utilisés lors de la synthèse magnésienne d'un alcool ou d'un acide carboxylique. **Décrire et mettre en œuvre un protocole de préparation d'un organomagnésien mixte et de son utilisation pour créer une liaison carbone-carbone. Justifier les étapes et conditions expérimentales, y compris l'hydrolyse terminale.**

3. Structures microscopiques et propriétés physiques des solides

Les modèles de description microscopique des solides sont présentés à partir de l'observation de différents solides cristallisés que le professeur est libre de choisir et de la prise en compte des propriétés macroscopiques de ces solides. L'introduction du modèle du cristal parfait se fait sur l'exemple de la maille cubique à faces centrées (CFC), seule maille dont la connaissance est exigible; l'ensemble des notions associées à cette première étude est réinvesti pour étudier d'autres structures cristallines dont la constitution est alors fournie.
L'objectif principal de l'étude des cristaux métalliques, covalents et ioniques est d'aborder une nouvelle fois la notion de modèle : les allers-retours entre le niveau macroscopique (solides de différentes natures) et la modélisation microscopique (cristal parfait) permettent de montrer les limites du modèle du cristal parfait et de confronter les prédictions faites par ce modèle aux valeurs expérimentales mesurées sur le solide réel (distances internucléaires et interatomiques, masse volumique, etc.). Ce chapitre constitue une occasion de revenir sur les positions relatives des éléments dans le tableau périodique, en lien avec la nature des interactions assurant la cohésion des édifices présentés, ainsi que sur les interactions intermoléculaires et la notion de solubilisation pour les solides ioniques et moléculaires.
Une réflexion sur les modèles conduisant à la détermination des différents types de rayons à partir des méthodes expérimentales d'analyse des structures des solides peut être proposée.
À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être, par la suite, valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

— relier la position d'un élément dans le tableau périodique et la nature des interactions entre les entités correspondantes dans un solide;

— effectuer des liens entre différents champs de connaissance;

— appréhender la notion de limite d'un modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèle du cristal parfait Solides amorphes, cristallins, semi-cristallins, polycristallins; variétés allotropiques. Description du modèle du cristal parfait; population, coordinence, compacité, masse volumique.	**Illustrer l'influence des conditions expérimentales sur la formation de solides et de solides cristallins.** Décrire un cristal parfait comme un assemblage de mailles parallélépipédiques. Déterminer la population, la coordinence et la compacité pour une structure fournie. Déterminer la valeur de la masse volumique d'un matériau cristallisé selon une structure cristalline fournie.
Rayons métallique, covalent, de van der Waals ou ionique et évolution dans le tableau périodique.	Relier le rayon métallique, covalent, de van der Waals ou ionique, selon le cas, aux paramètres d'une maille donnée. Citer l'ordre de grandeur de ces rayons.
Modèles d'empilement compact de sphères identiques. Maille conventionnelle CFC et ses sites interstitiels.	**Utiliser un logiciel ou des modèles cristallins pour visualiser des mailles et des sites interstitiels et pour déterminer des paramètres géométriques.** Localiser les interstices tétraédriques et octaédriques entre les plans d'empilement. Localiser et dénombrer les sites tétraédriques et octaédriques d'une maille CFC et déterminer leur habitabilité.
Limites du modèle du cristal parfait.	Confronter des données expérimentales aux prévisions du modèle.
Métaux et alliages Cohésion et propriétés physiques des métaux.	Positionner dans le tableau périodique et reconnaître métaux et non métaux. Relier les caractéristiques de la liaison métallique (ordre de grandeur énergétique, non directionalité) aux propriétés macroscopiques des métaux.
Alliages de substitution et d'insertion.	Citer des exemples d'alliage et leur intérêt par rapport à des métaux purs. Prévoir la possibilité de réaliser des alliages de substitution ou d'insertion selon les caractéristiques des atomes mis en jeu.

Solides covalents et moléculaires Cohésion et propriétés physiques des solides covalents et moléculaires.	Identifier les liaisons covalentes, les interactions de van der Waals et les liaisons hydrogène dans un cristal de structure donnée. Relier les caractéristiques des liaisons covalentes, des interactions de van der Waals et des liaisons hydrogène (directionalité ou non, ordre de grandeur des énergies mises en jeu) et les propriétés macroscopiques des solides correspondants. Comparer les propriétés macroscopiques du diamant et du graphite et interpréter les différences en relation avec les structures microscopiques (structures cristallines fournies).
Solides ioniques Cohésion et propriétés physiques des solides ioniques. Rayon ionique.	Relier les caractéristiques de l'interaction ionique dans le cadre du modèle du solide ionique parfait (ordre de grandeur de l'énergie d'interaction, non directionalité, charge localisée) avec les propriétés macroscopiques des solides ioniques. Comparer le rayon d'un atome et ceux de ses ions. Associer la tangence anion-cation et la non tangence anion-anion, dans une structure cubique de type AB fournie, à la valeur du paramètre de maille.

Deuxième semestre

4. Transformations de la matière

4.1 Évolution d'un système et mécanisme réactionnel

La modélisation, au niveau microscopique, des transformations chimiques développe plus avant les mécanismes réactionnels et notamment les aspects cinétiques microscopiques et macroscopiques en introduisant les notions d'étape cinétiquement déterminante et d'approximation des états quasi-stationnaires pour des intermédiaires réactionnels. Des approches numériques sont privilégiées par rapport aux calculs analytiques pour illustrer ces notions, ainsi que celles de contrôles cinétique et thermodynamique.
Introduit expérimentalement, l'effet catalytique est modélisé, au niveau microscopique, par un nouveau mécanisme réactionnel concurrent présentant des étapes souvent plus nombreuses et plus rapides. L'étude de la catalyse enzymatique est illustrée par des exemples dans le domaine du vivant et du biomimétisme et permet de réinvestir les structures et interactions entre entités.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modélisation microscopique d'une transformation chimique Modélisation d'une transformation par deux actes élémentaires opposés, état d'équilibre d'un système.	Relier la constante thermodynamique d'équilibre aux constantes de vitesse dans le cas d'une transformation modélisée par deux actes élémentaires opposés.
Modélisation d'une transformation par un mécanisme constitué par plusieurs actes élémentaires successifs ; étape cinétiquement déterminante, approximation de l'état quasi-stationnaire, équilibre rapidement établi, loi de vitesse associée.	**Capacité numérique :** établir un système d'équations différentielles et le résoudre numériquement afin de visualiser l'évolution temporelle des concentrations et de leurs dérivées dans le cas d'un mécanisme à deux actes élémentaires successifs. Mettre en évidence l'étape cinétiquement déterminante ou l'approximation de l'état quasi-stationnaire d'un intermédiaire réactionnel. Reconnaître, à partir d'informations fournies, l'étape cinétiquement déterminante d'un mécanisme ou les conditions d'utilisation de l'approximation de l'état quasi-stationnaire d'un intermédiaire réactionnel. Établir la loi de vitesse de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit à partir d'un mécanisme réactionnel simple et d'informations fournies.
Contrôle cinétique, contrôle thermodynamique.	Reconnaître les paramètres qui favorisent la formation d'un produit dans le cas de deux réactions compétitives. **Capacité numérique :** établir un système d'équations différentielles et le résoudre numériquement, avec un langage de programmation, afin de visualiser l'évolution des concentrations au cours du temps pour mettre en évidence les situations de contrôle cinétique ou thermodynamique.
Catalyse Catalyse d'une transformation, intervention du catalyseur dans le mécanisme réactionnel, sélectivité.	Reconnaître un effet catalytique dans un mécanisme réactionnel ou sur un profil énergétique. Reconnaître un effet de sélectivité par action d'un catalyseur.
Catalyse enzymatique, site actif d'une enzyme, complexe enzyme-substrat.	Établir la loi de vitesse de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit à partir d'un mécanisme de catalyse enzymatique fourni. Identifier, à partir d'informations structurales, les interactions mises en jeu entre le site actif d'une enzyme et son substrat et interpréter le rôle catalytique de l'enzyme.

4.2 Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques

Cette partie aborde l'application du premier principe de la thermodynamique à l'étude des transformations chimiques. Les enthalpies standard de réaction sont considérées comme indépendantes de la température.
Les notions et contenus sont illustrés à travers des applications liées à la vie quotidienne (contenu calorique des aliments, PCI et PCS des carburants, etc.), à la recherche (apports des techniques calorimétriques modernes, etc.) ou au domaine industriel. Un prolongement est proposé dans le cadre de l'étude thermique au sein des réacteurs continus dans la partie portant sur les procédés industriels en seconde année.

Notions et contenus	Capacités exigibles
État standard. Enthalpie standard de réaction. Loi de Hess. État standard de référence d'un élément, enthalpie standard de formation. Enthalpie standard de dissociation de liaison.	Déterminer une enthalpie standard de réaction à l'aide de données thermodynamiques.
Effets thermiques lors d'une transformation monobare : — transfert thermique associé à la transformation chimique monobare monotherme ; — variation de température lors d'une transformation monobare et adiabatique.	Prévoir le sens et calculer la valeur du transfert thermique entre un système, siège d'une transformation physico-chimique monobare et monotherme, et le milieu extérieur. Évaluer la température atteinte par un système siège d'une transformation physico-chimique, monobare et adiabatique. **Déterminer une enthalpie standard de réaction.**

5. Transformations chimiques en solution aqueuse

Les transformations chimiques en solution aqueuse jouent un rôle essentiel en chimie, en biochimie, dans le domaine du vivant et dans les procédés industriels. Un nombre considérable de développements technologiques et d'analyses environnementales (traitement des eaux, méthodes d'analyse, extraction d'ions métalliques des minerais, générateurs électrochimiques, lutte contre la corrosion, etc.) repose sur des transformations modélisées par des réactions acide-base, de solubilisation-précipitation et d'oxydo-réduction en solution aqueuse dont la maîtrise est importante pour prévoir, interpréter et optimiser les phénomènes mis en jeu.
L'objectif de cette partie est donc de présenter différents types de réactions susceptibles d'intervenir en solution aqueuse, d'en déduire des diagrammes de prédominance ou d'existence d'espèces chimiques, notamment des diagrammes potentiel-pH, et de les utiliser comme outil de prévision et d'interprétation des transformations chimiques quel que soit le milieu donné. Les conventions de tracé de ces diagrammes seront toujours précisées.
Les choix pédagogiques relatifs au contenu des séances de travail expérimental permettront de contextualiser ces enseignements. Les dosages par titrage sont étudiés exclusivement en travaux pratiques. L'analyse des conditions choisies ou la réflexion conduisant à une proposition de protocole expérimental pour atteindre un objectif donné constituent des mises en situation des enseignements évoqués précédemment. Ces séances de travail expérimental constituent une nouvelle occasion d'aborder qualité et précision de la mesure.
À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être par la suite valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

— modéliser ou simplifier un problème complexe ;

— utiliser différents outils graphiques, numériques, analytiques ;

— repérer les informations ou paramètres importants pour la résolution d'un problème.

5.1 Réactions acide-base et de précipitation

Ces différentes transformations en solution aqueuse sont abordées en montrant qu'elles constituent des illustrations de l'évolution des systèmes chimiques introduites au premier semestre, les étudiants étant amenés à déterminer l'état final d'un système en transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique. On montrera qu'il est ainsi possible d'analyser et de simplifier une situation complexe pour parvenir à la décrire rigoureusement et quantitativement, en l'occurrence dans le cas des solutions aqueuses, par une seule réaction. Il est cependant important de noter qu'on évite tout calcul inutile de concentration, en privilégiant l'utilisation des diagrammes pour valider le choix de la réaction mise en jeu. Dans ce cadre, aucune formule de calcul de pH n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Réactions acide-base — constante d'acidité K_a ; constante d'acidité des deux couples de l'eau à 298 K. — diagramme de prédominance, de distribution ; — exemples usuels d'acides et bases : nom, formule et caractère – faible ou fort – des acides sulfurique, nitrique, chlorhydrique, phosphorique, acétique, du dioxyde de carbone aqueux, de la soude, la potasse, l'ion hydrogénocarbonate, l'ion carbonate, l'ammoniac ; — solutions tampons. **Réactions de dissolution ou de précipitation** — réaction de dissolution, constante de solubilité K_s ; — solubilité et condition de précipitation ; — domaine d'existence ; — facteurs influençant la solubilité.	Reconnaître une réaction acide-base ou une réaction de dissolution ou de précipitation à partir de son équation. Écrire l'équation de la réaction modélisant une transformation en solution aqueuse en tenant compte des caractéristiques du milieu réactionnel (nature des espèces chimiques en présence, pH) et des observations expérimentales. Utiliser des tables pour extraire les données thermodynamiques pertinentes pour étudier un système en solution aqueuse. Déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques sont connues. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Prévoir l'état de saturation ou de non saturation d'une solution. Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Retrouver les valeurs de constantes thermodynamiques d'équilibre par lecture de courbes de distribution et de diagrammes de prédominance (et réciproquement). Exploiter des courbes d'évolution de la solubilité d'un solide en fonction d'une variable. **Capacité numérique :** tracer, à l'aide d'un langage de programmation, le diagramme de distribution des espèces d'un ou plusieurs couple(s) acide-base, ou d'espèces impliquées dans une réaction de précipitation. **Mettre en œuvre une réaction acide-base et une réaction de précipitation pour réaliser une analyse qualitative ou quantitative en solution aqueuse.** **Illustrer un procédé de retraitement ou de recyclage ou de séparation en solution aqueuse.**

5.2 Réactions d'oxydo-réduction

L'analyse de transformations mettant en jeu des oxydants et réducteurs usuels et des piles permet d'aborder les différents concepts associés aux phénomènes d'oxydo-réduction en solution aqueuse. La relation de Nernst (admise en première année) ainsi que la relation entre la constante thermodynamique d'équilibre d'une réaction d'oxydo-réduction et les potentiels standard permettent de prévoir l'évolution des systèmes et le caractère favorisé des transformations.
Afin de pouvoir étudier l'influence du milieu sur les espèces oxydantes ou réductrices présentes, les acquis sur les réactions acido-basiques et de précipitation en solution aqueuse sont réinvestis.
Enfin, les diagrammes potentiel-pH sont présentés puis superposés pour prévoir ou interpréter thermodynamiquement des transformations chimiques, la confrontation avec la réalité amenant à aborder éventuellement des blocages cinétiques en lien avec l'évolution temporelle des systèmes étudiée au premier semestre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction Nombre d'oxydation. Exemples d'oxydants et de réducteurs minéraux usuels : nom et formule des ions thiosulfate, permanganate, hypochlorite, du dichlore, du peroxyde d'hydrogène, du dioxygène, du dihydrogène, des métaux.	Lier la position d'un élément dans le tableau périodique et le caractère oxydant ou réducteur du corps simple correspondant. Prévoir les nombres d'oxydation extrêmes d'un élément à partir de sa position dans le tableau périodique. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple.

Pile, tension à vide, potentiel d'électrode, potentiel standard, formule de Nernst, électrodes de référence.	Décrire le fonctionnement d'une pile à partir d'une mesure de tension à vide ou à partir des potentiels d'électrode. Déterminer la capacité électrique d'une pile. **Réaliser une pile et étudier son fonctionnement.**
Diagrammes de prédominance ou d'existence. Aspect thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction. Dismutation et médiamutation.	Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Prévoir qualitativement ou quantitativement le caractère thermodynamiquement favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples. **Mettre en œuvre une réaction d'oxydo-réduction pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.**
Diagramme potentiel-pH Principe de construction, lecture et utilisation d'un diagramme potentiel-pH. Diagramme potentiel-pH de l'eau.	Associer les différents domaines d'un diagramme potentiel-pH fourni à des espèces chimiques données. Déterminer, par le calcul, la valeur de la pente d'une frontière d'un diagramme potentiel-pH. Justifier la position d'une frontière verticale dans un diagramme potentiel-pH. Prévoir le caractère thermodynamiquement favorisé ou non d'une transformation par superposition de diagrammes potentiel-pH. Discuter de la stabilité des espèces dans l'eau. Prévoir une éventuelle dismutation ou médiamutation en fonction du pH du milieu. Confronter les prévisions à des données expérimentales et interpréter d'éventuels écarts en termes cinétiques. **Mettre en œuvre des réactions d'oxydo-réduction en s'appuyant sur l'utilisation d'un diagramme potentiel-pH.**

6. Réactivité, transformations en chimie organique et stratégie de synthèse

Les objectifs de cette deuxième partie de programme en chimie organique sont doubles :

— d'une part, réinvestir ou compléter les connaissances et compétences autour des interconversions entre groupes caractéristiques, notamment par des réactions d'oxydo-réduction et de modifications de chaines;

— d'autre part, enrichir les apports concernant la synthèse d'espèces chimiques organiques en introduisant les notions de protection de groupes caractéristiques et d'activation in situ (protonation) ou par synthèse préalable d'une espèce plus réactive.

L'ensemble permet d'amener les étudiants à pouvoir conduire une véritable réflexion sur la stratégie de synthèse à travers l'analyse de la réactivité comparée des espèces chimiques et à interpréter la nature et l'ordre des étapes mises en œuvre dans le cas d'une synthèse multi-étapes. Pour ce qui concerne l'élaboration d'une synthèse multi-étapes par les étudiants eux-mêmes, elle peut se faire en autonomie à l'aide d'une banque de réactions (réactiothèque) fournie ou à l'aide des réactions qui figurent explicitement au programme. Les équations des réactions indiquées dans la colonne de gauche (substitutions nucléophiles, β-éliminations, additions nucléophiles) doivent être connues et seuls les mécanismes explicitement inscrits sont exigibles et doivent pouvoir être écrits sans information supplémentaire.

Si la construction du programme privilégie ici une approche liée à stratégie de synthèse, elle n'entrave évidemment pas la liberté pédagogique des enseignants dans le choix de leur présentation et de leur progression.

À travers les contenus et les capacités exigibles sont développées des compétences qui pourront être par la suite valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

— analyser des problèmes de complexité croissante;

— identifier dans une situation complexe la partie utile au raisonnement;

— proposer une stratégie d'adaptation ou de contournement pour résoudre un problème.

6.1 Techniques spectroscopiques de caractérisation

La spectroscopie d'absorption UV-visible a déjà été mise en œuvre au cours du premier semestre pour suivre l'évolution d'un système chimique. Elle est enrichie par la spectroscopie IR utilisée pour identifier des liaisons ou groupes caractéristiques présents dans une entité chimique analysée. Les absorptions de ces différents rayonnements électromagnétiques sont associées à la nature des transitions entre niveaux d'énergie dans l'entité chimique et aux caractéristiques des liaisons.
À propos de la spectroscopie de RMN du proton, aucun développement sur son principe n'est attendu, seule l'analyse des spectres de RMN ^{1}H est à effectuer pour confirmer la structure d'entités chimiques données ou pour identifier des produits de réactions.
La spectrométrie de masse, dont l'aspect théorique est strictement limité au principe de fonctionnement général (ionisation, séparation dans un analyseur, détection), permet de varier les sources d'informations sur la structure des entités organiques. Le couplage du spectromètre de masse et d'un dispositif de chromatographie en phase gazeuse permet d'obtenir des analyses exploitables de manière qualitative.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Spectroscopies d'absorption UV-visible et infrarouge Nature des transitions associées aux spectroscopies UV-visible et infrarouge, domaine du spectre des ondes électromagnétiques correspondant. Transmittance, absorbance.	Relier la longueur d'onde du rayonnement absorbé à l'énergie de la transition associée. Relier la fréquence du rayonnement IR absorbé aux caractéristiques de la liaison dans le cadre du modèle classique de l'oscillateur harmonique. Identifier, à partir du spectre infrarouge et de tables de nombres d'onde de vibration, une liaison ou un groupe caractéristique dans une entité organique.
Spectroscopie de résonance magnétique nucléaire du proton Notions de déplacement chimique, de constante de couplage, d'intégration. Couplages du premier ordre A_mX_p et $A_mM_pX_q$.	Interpréter ou prévoir l'allure d'un massif à partir de l'étude des couplages. Confirmer la structure d'une entité à partir de données spectroscopiques infrarouge et/ou de résonance magnétique nucléaire du proton, les tables de nombres d'onde caractéristiques ou de déplacements chimiques étant fournies. Déterminer la structure d'une entité à partir de données spectroscopiques et du contexte de formation de l'espèce chimique dans une synthèse organique. Valider la sélectivité d'une transformation à partir de données spectroscopiques. Déterminer à partir des intégrations les proportions de deux constituants d'un mélange.
Spectrométrie de masse Principe de la spectrométrie de masse : ionisation, séparation dans un analyseur, détection. Spectres de masse : pic de base, pic moléculaire, massif isotopique.	Utiliser un spectre de masse afin de déterminer la masse molaire d'une espèce chimique. Recueillir des informations sur des motifs structuraux d'une espèce chimique analysée, dans des cas simples, à l'aide d'un spectre de masse fourni et de documents sur l'ionisation effectuée ou sur les fragmentations observées. Identifier la présence d'isotopes.

6.2 Réactions d'oxydo-réduction en chimie organique

En synthèse organique, aucun oxydant ou réducteur n'est à connaître mis à part le tétrahydroborate de sodium. Pour autant, il est attendu que les exemples étudiés portent sur des transformations réelles pour lesquelles seront fournies les conditions expérimentales associées, ce afin de développer une bonne culture chimique chez les étudiants.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Niveau d'oxydation des espèces organiques Les groupes caractéristiques et leur niveau d'oxydation.	Identifier, le cas échéant, une conversion d'espèce organique comme un processus d'oxydation ou de réduction et associer les demi-équations électroniques correspondantes.
Un exemple d'interconversion entre groupes caractéristiques : du groupe hydroxyalkyle au groupe carbonyle et inversement Oxydation des alcools selon leur classe ; principe de l'oxydation contrôlée des alcools primaires.	Déterminer le ou les produits d'oxydation d'un alcool selon sa classe. Identifier le produit d'oxydation d'un alcool primaire à l'aide de données expérimentales ou spectroscopiques.
Réduction du groupe carbonyle des aldéhydes et cétones en alcools par action du tétrahydroborate de sodium : mécanisme réactionnel en modélisant l'ion tétrahydroborate comme un ion hydrure.	Analyser à l'aide de données expérimentales la chimiosélectivité de réducteurs dans le cadre d'une stratégie de synthèse.

6.3 Activation de groupes caractéristiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
Activation nucléophile des alcools et phénols Formation d'alcoolates par réaction acide-base ou d'oxydo-réduction.	Comparer la nucléophilie d'alcools de différentes classes à l'aide d'arguments stériques. Comparer la nucléophilie d'un alcool et de sa base conjuguée. Choisir une base pour déprotoner un alcool ou un phénol à partir d'une échelle de pK_a.
Synthèse d'éther-oxyde par la méthode de Williamson ; mécanisme réactionnel.	Proposer une voie de synthèse d'un éther-oxyde dissymétrique. Interpréter la formation de produits indésirables par la compétition entre les réactions de substitution et d'élimination.
Activation électrophile des alcools Activation des alcools *in situ* par protonation : — déshydratation acido-catalysée d'un alcool tertiaire ; régiosélectivité et stéréosélectivité éventuelles, mécanisme limite E1 ; compétition substitution-élimination dans le cas des alcools secondaires et tertiaires ; — conversion d'un alcool en halogénoalcane par action d'une solution concentrée d'halogénure d'hydrogène, mécanismes limites. Formation et réactivité d'esters sulfoniques : — conversion d'un alcool en ester sulfonique ; — formation d'alcène par élimination sur un ester sulfonique, mécanisme ; — formation d'espèces chimiques par substitution nucléophile sur un ester sulfonique ; mécanisme.	Comparer les réactivités des liaisons carbone-hétéroatome dans le cas des halogénoalcanes, des alcools, des esters sulfoniques et des ions alkyloxonium. Prévoir les produits pouvant se former lors de la déshydratation d'un alcool, indiquer le ou les produits majoritaires. Commenter dans une synthèse multi-étapes le choix d'une activation *in situ* par protonation ou par passage par un tosylate ou un mésylate d'alkyle.

Activation électrophile du groupe carbonyle Acétalisation des aldéhydes et des cétones : conditions expérimentales (APTS, appareil de Dean-Stark), mécanisme limite de l'acétalisation en milieu acide.	Expliquer qualitativement l'augmentation de l'électrophilie du groupe carbonyle par protonation.
Hémiacétalisation acido-catalysée du glucose, mécanisme limite.	Discuter la régiosélectivité de la réaction d'hémiacétalisation du glucose. Interpréter l'isomérisation du glucopyranose par le caractère renversable de l'hémiacétalisation.

6.4 Protection de groupes caractéristiques et stratégie de synthèse

Notions et contenus	Capacités exigibles
Protection-déprotection Protection-déprotection du groupe carbonyle des aldéhydes et cétones par un diol; conditions expérimentales, mécanisme de l'hydrolyse acide. Protection-déprotection du groupe hydroxyle : utilisation d'une banque de réactions fournie.	Justifier la nécessité de protéger un groupe caractéristique dans une synthèse multi-étapes. Identifier les étapes de protection et de déprotection d'un groupe carbonyle, d'un groupe hydroxyle ou d'un diol dans une synthèse multi-étapes. Proposer ou justifier, à partir d'une banque de réactions fournie, une méthode adaptée de protection du groupe hydroxyle. Analyser une synthèse multi-étapes en termes de stratégie de synthèse : ordre des étapes, protection de groupes caractéristiques, étapes d'activation. Analyser les impacts environnementaux d'une stratégie de synthèse.

Annexe 1 : matériel

Cette liste regroupe le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec, le cas échéant, l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

— Verrerie usuelle de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, …

— Verrerie usuelle de chimie organique, rodée ou non rodée : ballons, ampoule de coulée (isobare ou non), réfrigérant, dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, chauffe-ballon, agitateur magnétique chauffant, etc.), dispositifs d'agitation, ampoule à décanter, matériel de filtration sous pression atmosphérique et sous pression réduite, appareil de Dean-Stark.

— Évaporateur rotatif

— Matériel de chromatographie sur couche mince

— Lampe UV

— Banc de Kofler

— Réfractomètre

— Spectrophotomètre UV-visible

— pH-mètre et électrodes de mesure

— Voltmètre et électrodes

— Ampèremètre

— Conductimètre et cellule de mesure

— Polarimètre

— Thermomètre

— Balance de précision

— Étuve

Annexe 2 : outils mathématiques

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en chimie. La capacité à mettre en œuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la chimie fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année de TPC1. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année; il sera complété dans le programme de seconde année. Les outils figurant dans le tableau n'ont pas tous vocation à être mis en œuvre en chimie.
Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique ou formel).

Outils mathématiques	Capacités exigibles
Équations algébriques	
Système linéaire de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas où $n = p = 2$. Utiliser des outils numériques ou de calcul formel dans les autres cas.
Équation non linéaire.	Représenter graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$. Interpréter graphiquement la ou les solutions. Dans le cas général, résoudre à l'aide d'un outil numérique ou de calcul formel.
Équations différentielles	
Équations différentielles linéaires à coefficients constants	Identifier l'ordre. Mettre une équation différentielle du premier ou du second ordre sous forme canonique.

Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$.	Trouver la solution générale de l'équation sans second membre : « équation homogène ».
Autres équations différentielles du premier ordre.	Intégrer numériquement avec un outil fourni. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et la représentation graphique de la solution correspondante.
Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ($x \to x^\alpha$).
Dérivée. Notation $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.
Développements limités.	Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1+x)^\alpha$, $\exp(x)$, $\ln(1+x)$ au voisinage de $x = 0$ et à l'ordre 2 des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ au voisinage de $x = 0$.
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser un grapheur pour tracer une courbe d'équation $y = f(x)$ donnée. Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
Géométrie	
Vecteurs et systèmes de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée de dimension inférieure ou égale à 3. Utiliser le système des coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques.
Projection d'un vecteur et produit scalaire.	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations de l'espace.
Courbes planes.	Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle, d'une branche d'hyperbole, d'une parabole.
Longueurs, aires et volumes usuels.	Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre, du volume d'un parallélépipède.
Barycentre d'un système de points.	Énoncer la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.
Trigonométrie	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(x \pm \pi)$ et $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right)$, parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Connaître les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python incluant l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques dans la formation des étudiants vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée et à mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique-chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que les capacités exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de seconde année.

Outils numériques	Capacités exigibles
Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque `matplotlib` pour représenter un nuage de points et rendre le graphe exploitable (présence d'une légende, choix des échelles…).
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque `matplotlib` pour tracer la courbe représentative d'une fonction et rendre le graphe exploitable (présence d'une légende, choix des échelles…).
Équations algébriques	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par une méthode dichotomique. Écrire un programme mettant en œuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction `bisect` de la bibliothèque `scipy.optimize` (sa spécification étant fournie).
Systèmes linéaires de n équations indépendantes à n inconnues.	Définir les matrices A et B à la représentation matricielle $AX = B$ du système à résoudre. Utiliser la fonction `solve` de la bibliothèque `numpy.linalg` (sa spécification étant fournie).
Intégration – dérivation	
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.
Équations différentielles	
Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1 ou un système d'équations différentielles.
Probabilité - statistiques	
Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques `random` et/ou `numpy` (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction `hist` de la bibliothèque `matplotlib` (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.
Régression linéaire.	Utiliser la fonction `polyfit` de la bibliothèque `numpy` (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction `random.normal` de la bibliothèque `numpy` (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Technologie, physique et chimie (TPC)

Annexe 4

Programmes d'informatique

1ère et 2nde années

Table des matières

Introduction au programme

Les objectifs du programme Le programme d'informatique de TSI et TPC s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il a pour objectif la formation de futurs ingénieures et ingénieurs, enseignantes et enseignants, chercheuses et chercheurs et avant tout des personnes informées, capables de gouverner leur vie professionnelle et citoyenne en pleine connaissance et maîtrise des techniques et des enjeux de l'informatique et en la nourrissant par les habitudes de la démarche scientifique. Le présent programme a pour ambition de poser les bases d'un enseignement cohérent et mesuré d'une science informatique encore jeune et dont les manifestations technologiques connaissent des cycles d'obsolescence rapide. On garde donc à l'esprit :

— de privilégier la présentation de concepts fondamentaux pérennes sans s'attacher outre mesure à la description de technologies, protocoles ou normes actuels;

— de donner aux futurs diplômées et diplômés les moyens de réussir dans un domaine en mutation rapide et dont les technologies qui en sont issues peuvent sauter brutalement d'un paradigme à un autre très différent;

— de préparer les étudiantes et étudiants à tout un panel de professions et de situations de la vie professionnelle qui les amène à remplir tour à tour une mission d'expertise, de création ou d'invention, de prescription de méthodes ou de techniques, de contrôle critique des choix opérés ou encore de décision en interaction avec des spécialistes;

— que les concepts à enseigner sont les mêmes dans toutes les filières mais que le professeur d'informatique de chaque classe peut adapter la façon de les transmettre et les exemples concrets sur lesquels il s'appuie au profil de ses élèves et aux autres enseignements qu'ils suivent.

Compétences visées Ce programme vise à développer les six grandes compétences suivantes :

analyser et modéliser un problème ou une situation, notamment en utilisant les objets conceptuels de l'informatique pertinents (table relationnelle, graphe, dictionnaire, etc.);

imaginer et concevoir une solution, décomposer en blocs, se ramener à des sous-problèmes simples et indépendants, adopter

une stratégie appropriée, décrire une démarche, un algorithme ou une structure de données permettant de résoudre le problème;

décrire et spécifier les caractéristiques d'un processus, les données d'un problème, ou celles manipulées par un algorithme ou une fonction;

mettre en œuvre une solution, par la traduction d'un algorithme ou d'une structure de données dans un langage de programmation ou un langage de requête;

justifier et critiquer une solution, que ce soit en démontrant un algorithme par une preuve mathématique ou en développant des processus d'évaluation, de contrôle, de validation d'un code que l'on a produit;

communiquer à l'écrit ou à l'oral, présenter des travaux informatiques, une problématique et sa solution; défendre ses choix; documenter sa production et son implémentation.

La pratique régulière de la résolution de problèmes par une approche algorithmique et des activités de programmation qui en résultent constitue un aspect essentiel de l'apprentissage de l'informatique. Les exemples ou les exercices d'application peuvent être choisis au sein de l'informatique elle-même ou en lien avec d'autres champs disciplinaires.

Sur les partis pris par le programme Ce programme impose aussi souvent que possible des choix de vocabulaire ou de notation de certaines notions. Les choix opérés ne présument pas la supériorité de l'option retenue. Ils ont été précisés dans l'unique but d'aligner les pratiques d'une classe à une autre et d'éviter l'introduction de longues définitions récapitulatives préliminaires à un exercice ou un problème. De même, ce programme nomme aussi souvent que possible l'un des algorithmes possibles parmi les classiques qui répondent à un problème donné. Là encore, le programme ne défend pas la prééminence d'un algorithme ou d'une méthode par rapport à un autre mais il invite à faire bien plutôt que beaucoup.

Sur les langages et la programmation L'enseignement du présent programme repose sur un langage de manipulation de données (SQL) ainsi que le langage de programmation Python, pour lequel une annexe liste de façon limitative les éléments qui sont exigibles des étudiants ainsi que ceux auxquels les étudiants sont familiarisés et qui peuvent être attendus à condition qu'ils soient accompagnés d'une documentation. La poursuite de l'apprentissage du langage Python est vue en particulier par les étudiants pour adopter immédiatement une bonne discipline de programmation tout en se concentrant sur le noyau du langage plutôt que sur une API pléthorique.

Mode d'emploi Ce programme a été rédigé par semestre pour assurer une certaine homogénéité de la formation. Le premier semestre permet d'asseoir les bases de programmation vues au lycée et les concepts associés. **L'organisation de la progression au sein des deux premiers semestres relève de la responsabilité pédagogique de la professeure ou du professeur** et le tissage de liens entre les thèmes contribue à la valeur de son enseignement. Les notions étudiées lors d'un semestre précédent sont régulièrement revisitées tout au long des deux années d'enseignement.

1 Programme du premier semestre

Le programme du premier semestre poursuit les objectifs suivants :

— consolider l'apprentissage de la programmation en langage Python qui a été entrepris dans les classes du lycée ;
— mettre en place un environnement de travail ;
— mettre en place une discipline de programmation : spécification précise des fonctions et programmes, annotations et commentaires, jeux de tests ;
— introduire les premiers éléments de complexité des algorithmes : on ne présente que l'estimation asymptotique du coût dans le cas le pire ;
— introduire des outils de validation : variants et invariants.

Le tableau ci-dessous présente les thèmes qui sont abordés lors de ces séances, et, en colonne de droite, une liste, sans aucun caractère impératif, d'exemples d'activités qui peuvent être proposées aux étudiants. L'ordre de ces thèmes n'est pas impératif.

Aucune connaissance relative aux modules éventuellement rencontrés lors de ces séances n'est exigible des étudiants.

Thèmes	**Exemples d'activité. *Commentaires.***
Recherche séquentielle dans un tableau unidimensionnel. Dictionnaire.	Recherche d'un élément. Recherche du maximum, du second maximum. Comptage des éléments d'un tableau à l'aide d'un dictionnaire. *Manipulations élémentaires d'un tableau unidimensionnel. Utilisation de dictionnaires en boîte noire. Notions de coût constant, de coût linéaire.*
Algorithmes opérant sur une structure séquentielle par boucles simples ou imbriquées.	Recherche d'un facteur (ou d'un mot) dans un texte. Calcul d'une intégrale par la formule de la moyenne ou par la méthode des trapèzes. Tri à bulles. *Notion de complexité quadratique. On propose des outils pour valider la correction de l'algorithme.*
Utilisation de modules, de bibliothèques.	Lecture d'un fichier de données simples. Calculs statistiques sur ces données. Représentation graphique (histogrammes, etc.).
Algorithmes dichotomiques.	Recherche dichotomique dans un tableau trié. Calcul d'une solution de l'équation $f(x)=0$ sur $[a,b]$ quand $f(a).f(b)<0$. *On met en évidence une accélération entre complexité linéaire d'un algorithme naïf et complexité logarithmique d'un algorithme dichotomique. On met en œuvre des jeux de tests, des outils de validation.*
Fonctions récursives.	Version récursive d'algorithmes dichotomiques. Fonctions produisant à l'aide de `print` successifs des figures alphanumériques. Dessins de fractales. *On évite de se cantonner à des fonctions mathématiques (factorielle, suites récurrentes). On peut montrer le phénomène de dépassement de la taille de la pile.*
Tableau de pixels et images.	Algorithmes de rotation de 90 degrés, de réduction ou d'agrandissement. Modification d'une image : flou, détection de contour, etc. *Les images servent de support à la présentation de manipulations de tableaux à deux dimensions.*
Tris.	Algorithmes quadratiques : tri par insertion, par sélection. Tri par partition-fusion. Tri par comptage. *On fait observer différentes caractéristiques (par exemple, stable ou non, en place ou non, comparatif ou non, etc).*

2 Programme du second semestre

2.1 Méthodes de programmation et analyse des algorithmes

Même si on ne prouve pas systématiquement tous les algorithmes, on dégage l'idée qu'un algorithme doit se prouver et que sa programmation doit se tester.

Notions	Commentaires
Instruction et expression. Effet de bord.	On peut signaler par exemple que le fait que l'affectation soit une instruction est un choix des concepteurs du langage Python et en expliquer les conséquences.
Spécification des données attendues en entrée, et fournies en sortie/retour.	On entraîne les étudiants à accompagner leurs programmes et leurs fonctions d'une spécification. Les signatures des fonctions sont toujours précisées.
Annotation d'un bloc d'instructions par une précondition, une postcondition, une propriété invariante.	Ces annotations se font à l'aide de commentaires.
Assertion.	L'utilisation d'assertions est encouragée par exemple pour valider des entrées. La levée d'une assertion entraîne l'arrêt du programme. Ni la définition ni le rattrapage des exceptions ne sont au programme.
Explicitation et justification des choix de conception ou programmation.	Les parties complexes de codes ou d'algorithmes font l'objet de commentaires qui l'éclairent en évitant la paraphrase. Le choix des collections employées (par exemple, liste ou dictionnaire) est un choix éclairé.
Terminaison. Variant. Invariant.	On montre sur plusieurs exemples que la terminaison peut se démontrer à l'aide d'un variant de boucle. Sur plusieurs exemples, on explicite, sans insister sur aucun formalisme, des invariants de boucles en vue de montrer la correction des algorithmes.
Jeu de tests associé à un programme.	Il n'est pas attendu de connaissances sur la génération automatique de jeux de tests ; un étudiant doit savoir écrire un jeu de tests à la main, donnant à la fois des entrées et les sorties correspondantes attendues. On sensibilise, par des exemples, à la notion de partitionnement des domaines d'entrée et au test des limites.
Complexité.	On aborde la notion de complexité temporelle dans le pire cas en ordre de grandeur. On peut, sur des exemples, aborder la notion de complexité en espace.

2.2 Représentation des nombres

On présente sans formalisation théorique les enjeux de la représentation en mémoire des nombres. Ces notions permettent d'expliquer certaines difficultés rencontrées et précautions à prendre lors de la programmation ou de l'utilisation d'algorithmes de calcul numérique dans les disciplines qui y recourent.

Notions	Commentaires
Représentation des entiers positifs sur des mots de taille fixe.	La conversion d'une base à une autre n'est pas un objectif de formation.
Représentation des entiers signés sur des mots de taille fixe.	Complément à deux.
Entiers multi-précision de Python.	On les distingue des entiers de taille fixe sans détailler leur implémentation. On signale la difficulté à évaluer la complexité des opérations arithmétiques sur ces entiers.
Distinction entre nombres réels, décimaux et flottants.	On montre sur des exemples l'impossibilité de représenter certains nombres réels ou décimaux dans un mot machine

Représentation des flottants sur des mots de taille fixe. Notion de mantisse, d'exposant.	On signale la représentation de 0 mais on n'évoque pas les nombres dénormalisés, les infinis ni les NaN. Aucune connaissance liée à la norme IEEE-754 n'est au programme.
Précision des calculs en flottants.	On insiste sur les limites de précision dans le calcul avec des flottants, en particulier pour les comparaisons. On n'entre pas dans un comparatif des différents modes d'arrondi.

2.3 Bases des graphes

Il s'agit de définir le modèle des graphes, leurs représentations et leurs manipulations.
On s'efforce de mettre en avant des applications importantes et si possibles modernes : réseau de transport, graphe du web, réseaux sociaux, bio-informatique. On précise autant que possible la taille typique de tels graphes.

Notions	**Commentaires**
Vocabulaire des graphes.	Graphe orienté, graphe non orienté. Sommet (ou nœud); arc, arête. Boucle. Degré (entrant et sortant). Chemin d'un sommet à un autre. Cycle. Connexité dans les graphes non orientés. On présente l'implémentation des graphes à l'aide de listes d'adjacence (rassemblées par exemple dans une liste ou dans un dictionnaire) et de matrice d'adjacence ainsi que les différences en terme d'occupation mémoire. On n'évoque ni multi-arcs ni multi-arêtes.
Notations.	Graphe $G = (S,A)$, degrés $d(s)$ (pour un graphe non orienté), $d_+(s)$ et $d_-(s)$ (pour un graphe orienté).
Pondération d'un graphe. Étiquettes des arcs ou des arêtes d'un graphe.	On motive l'ajout d'information à un graphe par des exemples concrets.
Fonctions de manipulation.	Obtention du nombre de sommets, ajout/suppression/test d'existence d'un arc ou d'une arête, construction de la liste des voisins d'un sommet, etc. On présente l'importance de construire des fonctions de manipulation élémentaires en vue d'une programmation modulaire ainsi que l'impact du choix d'une représentation en terme de complexité temporelle.
Parcours d'un graphe.	On introduit à cette occasion les piles et les files; on souligne les problèmes d'efficacité posés par l'implémentation des files par les listes de Python et l'avantage d'utiliser un module dédié tel que `collections.deque`. Détection de la présence de cycles ou de la connexité d'un graphe non orienté.

3 Programme du troisième semestre

3.1 Bases de données

On se limite volontairement à une description applicative des bases de données en langage SQL. Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On ne présente pas l'algèbre relationnelle ni le calcul relationnel.

Notions	**Commentaires**
Vocabulaire des bases de données : tables ou relations, attributs ou colonnes, domaine, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.	On présente ces concepts à travers de nombreux exemples. On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier, flottant, chaîne ; aucune considération quant aux types des moteurs SQL n'est au programme. Aucune notion relative à la représentation des dates n'est au programme ; en tant que de besoin on s'appuie sur des types numériques ou chaîne pour lesquels la relation d'ordre coïncide avec l'écoulement du temps. Toute notion relative aux collations est hors programme ; en tant que de besoin on se place dans l'hypothèse que la relation d'ordre correspond à l'ordre lexicographique usuel. `NULL` est hors programme.
Clef primaire.	Une clef primaire n'est pas forcément associée à un unique attribut même si c'est le cas le plus fréquent. La notion d'index est hors programme. On présente la notion de clef étrangère.
Requêtes `SELECT` avec simple clause `WHERE` (sélection), projection, renommage `AS`. Utilisation des mots-clefs `DISTINCT`, `LIMIT`, `OFFSET`, `ORDER BY`.	Les opérateurs au programme sont `+`, `-`, `*`, `/` (on passe outre les subtilités liées à la division entière ou flottante), `=`, `<>`, `<`, `<=`, `>`, `>=`, `AND`, `OR`, `NOT`.
Opérateurs ensemblistes `UNION`, `INTERSECT` et `EXCEPT`, produit cartésien.	
Jointures internes T_1 `JOIN` T_2 … `JOIN` T_n `ON` ϕ. Autojointure.	On présente les jointures en lien avec la notion de relations entre tables. On se limite aux équi-jointures : ϕ est une conjonction d'égalités. On fera le lien avec la notion de clef étrangère
Agrégation avec les fonctions `MIN`, `MAX`, `SUM`, `AVG` et `COUNT`, y compris avec `GROUP BY`.	Pour la mise en œuvre des agrégats, on s'en tient à la norme SQL99. On présente quelques exemples de requêtes imbriquées. On marque la différence entre `WHERE` et `HAVING` sur des exemples.

Mise en œuvre
La création de tables et la suppression de tables au travers du langage SQL sont hors programme. La mise en œuvre effective se fait au travers d'un logiciel permettant d'interroger une base de données à l'aide de requêtes SQL. Récupérer le résultat d'une requête à partir d'un programme n'est pas un objectif. Même si aucun formalisme graphique précis n'est au programme, on peut décrire les entités et les associations qui les lient au travers de diagrammes sagittaux informels. Sont hors programme : la notion de modèle logique *vs* physique, les bases de données non relationnelles, les méthodes de modélisation de base, les fragments DDL, TCL et ACL du langage SQL, les transactions, l'optimisation de requêtes par l'algèbre relationnelle.

3.2 Dictionnaires et algorithmes pour l'intelligence artificielle

Les dictionnaires sont utilisés en boîte noire dès la première année ; les principes de leur fonctionnement sont présentés en deuxième année.
Cette partie permet aussi de revisiter les notions de programmation et de représentation de données par un graphe, qui sont vues en première année, en les appliquant à des enjeux contemporains.

Notions	**Commentaires**
Dictionnaires, clefs et valeurs.	On présente les principes du hachage, et les limitations qui en découlent sur le domaine des clefs utilisables.
Usage des dictionnaires en programmation Python.	Syntaxe pour l'écriture des dictionnaires. Parcours d'un dictionnaire.
Algorithme des k plus proches voisins avec distance euclidienne.	Matrice de confusion. Lien avec l'apprentissage supervisé.
Algorithme des k-moyennes.	Lien avec l'apprentissage non-supervisé. La démonstration de la convergence n'est pas au programme. On observe des convergences vers des minima locaux.
Jeux d'accessibilité à deux joueurs sur un graphe. Stratégie. Stratégie gagnante. Position gagnante.	On considère des jeux à deux joueurs (J_1 et J_2) modélisés par des graphes bipartis (l'ensemble des états contrôlés par J_1 et l'ensemble des états contrôlés par J_2). Il y a trois types d'états finals : les états gagnants pour J_1, les états gagnants pour J_2 et les états de match nul. On ne considère que les stratégies sans mémoire.
Notion d'heuristique.	On présente la notion d'heuristique à partir d'exemples simples comme le problème du sac à dos.

Mise en œuvre
La connaissance dans le détail des algorithmes de cette section n'est pas un attendu du programme. Les étudiants acquièrent une familiarité avec les idées sous-jacentes qu'ils peuvent réinvestir dans des situations où les modélisations et les recommandations d'implémentation sont guidées, notamment dans leurs aspects arborescents.

3.3 Algorithmique numérique

Dans cette partie du programme, on présente des algorithmes numériques pour une approche pluri-disciplinaire. On se concentre sur la bonne compréhension de leur fonctionnement et la mise en avant de leur limites.
Ces algorithmes seront appliqués à des problématiques concrètes étudiées dans d'autres disciplines. On veillera à faire programmer par les étudiants les algorithmes étudiés.

Notions	**Commentaires**
Méthode d'Euler	Résolution approchée d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1 et 2. Illustration de l'impact du pas sur la qualité de la solution obtenue.
Méthode de Gauss avec recherche partielle du pivot.	Résolution des systèmes linéaires inversibles. Erreurs d'arrondis et problème de la comparaison à zéro. On aura recours à une conception modulaire pour présenter cet algorithme.
Interpolation polynomiale de Lagrange.	Interpolation par morceaux.

Mise en œuvre
La connaissance dans le détail des algorithmes de cette section n'est toujours pas un attendu du programme.

A Langage Python

Cette annexe liste limitativement les éléments du langage Python (version 3 ou supérieure) dont la connaissance est exigible des étudiants. Aucun concept sous-jacent n'est exigible au titre de la présente annexe.
Aucune connaissance sur un module particulier n'est exigible des étudiants.
Toute utilisation d'autres éléments du langage que ceux que liste cette annexe, ou d'une fonction d'un module, doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.

Traits généraux

- Typage dynamique : l'interpréteur détermine le type à la volée lors de l'exécution du code.
- Principe d'indentation.
- Portée lexicale : lorsqu'une expression fait référence à une variable à l'intérieur d'une fonction, Python cherche la valeur définie à l'intérieur de la fonction et à défaut la valeur dans l'espace global du module.
- Appel de fonction par valeur : l'exécution de $f(x)$ évalue d'abord x puis exécute f avec la valeur calculée.

Types de base

- Opérations sur les entiers (`int`) : `+`, `-`, `*`, `//`, `**`, `%` avec des opérandes positifs.
- Opérations sur les flottants (`float`) : `+`, `-`, `*`, `/`, `**`.
- Opérations sur les booléens (`bool`) : **`not`**, **`or`**, **`and`** (et leur caractère paresseux).
- Comparaisons `==`, `!=`, `<`, `>`, `<=`, `>=`.

Types structurés

- Structures indicées immuables (chaînes, tuples) : `len`, accès par indice positif valide, concaténation `+`, répétition `*`, tranche.
- Listes : création par compréhension `[`*e* **`for`** *x* **`in`** *s*`]`, par `[`*e*`] *` *n*, par `append` successifs ; `len`, accès par indice positif valide ; concaténation `+`, extraction de tranche, copie (y compris son caractère superficiel) ; `pop` en dernière position.
- Dictionnaires : création, accès, insertion, `len`, `copy`.

Structures de contrôle

- Instruction d'affectation avec `=`. Dépaquetage de tuples.
- Instruction conditionnelle : **`if`**, **`elif`**, **`else`**.
- Boucle **`while`** (sans **`else`**). **`break`**, **`return`** dans un corps de boucle.
- Boucle **`for`** (sans **`else`**) et itération sur `range(`*a*`, `*b*`)`, une chaîne, un tuple, une liste, un dictionnaire au travers des méthodes `keys` et `items`.
- Définition d'une fonction **`def`** $f(p_1, \ldots, p_n)$, **`return`**.

Divers

- Introduction d'un commentaire avec `#`.
- Utilisation simple de `print`, sans paramètre facultatif.
- Importation de modules avec **`import`** *module*, **`import`** *module* **`as`** *alias*, **`from`** *module* **`import`** $f, g, \ldots$
- Manipulation de fichiers texte (la documentation utile de ces fonctions doit être rappelée ; tout problème relatif aux encodages est éludé) : `open`, `read`, `readline`, `readlines`, `split`, `write`, `close`.
- Assertion : `assert` (sans message d'erreur).