



# **Classes préparatoires aux grandes écoles**

## **Filière scientifique**

### **Voie Physique et chimie (PC)**

#### **Annexe 1**

### **Programme de mathématiques**

# Classe préparatoire PC

## Programme de mathématiques

### Table des matières

<b>Préambule</b>	<b>2</b>
Objectifs de formation . . . . .	2
Description et prise en compte des compétences . . . . .	2
Unité de la formation scientifique . . . . .	3
Architecture et contenu du programme . . . . .	4
Organisation du texte . . . . .	5
<b>Programme</b>	<b>6</b>
Algèbre linéaire . . . . .	6
A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices . . . . .	6
B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées . . . . .	7
Endomorphismes des espaces euclidiens . . . . .	8
Espaces vectoriels normés . . . . .	9
Suites et séries de fonctions . . . . .	11
A - Compléments sur les séries numériques . . . . .	11
B - Suites et séries de fonctions . . . . .	11
C - Séries entières . . . . .	12
Intégration sur un intervalle quelconque . . . . .	14
Variables aléatoires discrètes . . . . .	17
A - Ensembles dénombrables, familles sommables . . . . .	17
B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles . . . . .	17
C - Espérance et variance . . . . .	19
Calcul différentiel . . . . .	21
A - Dérivabilité des fonctions vectorielles . . . . .	21
B - Fonctions de plusieurs variables . . . . .	21

## Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

## Objectifs de formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

## Description et prise en compte des compétences

### Chercher

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

### Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

### **Représenter**

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

### **Raisonner, argumenter**

La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

### **Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique**

Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent. Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

### **Communiquer à l'écrit et à l'oral**

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

## **Unité de la formation scientifique**

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, le calcul différentiel et l'optimisation exploitent les endomorphismes autoadjoints ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et les familles sommables, et illustrent certains résultats d'analyse.

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

## Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme d'algèbre comprend deux sections. La première prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année et combine les points de vue géométrique (éléments propres), algébrique (polynômes d'endomorphisme) et matriciel pour aboutir à une solide étude de la réduction : diagonalisation, trigonalisation. La deuxième étudie, dans le cadre euclidien, les isométries vectorielles et les endomorphismes autoadjoints (théorème spectral), et introduit les endomorphismes autoadjoints positifs en vue de l'optimisation.

La topologie est étudiée dans le cadre général des espaces vectoriels normés. Son étude permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, et de mettre en évidence quelques aspects de la dimension finie : équivalence des normes, théorème des bornes atteintes pour les fonctions continues sur les fermés bornés, continuité des applications linéaires et polynomiales.

Après quelques compléments sur les séries numériques, la section sur les suites et séries de fonctions étudie divers modes de convergence et établit des résultats de régularité pour les limites de suites ou les sommes de séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires, en admettant le théorème de Cauchy, et pour les probabilités au travers des fonctions génératrices.

La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable.

Les théorèmes sur l'intégration des suites et séries de fonctions (convergence dominée, intégration terme à terme) et sur les intégrales à paramètre concluent cette section.

La section sur les variables aléatoires discrètes propose une introduction à minima de la dénombrabilité et des familles sommables en appui des notions générales de la théorie des probabilités, afin d'étendre l'étude menée en première année des variables aléatoires finies, ce qui permet d'élargir le champ des situations se prêtant à une modélisation probabiliste.

La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants. L'inégalité qui la sous-tend précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion.

Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

Le programme permet aussi, en liaison avec la réduction, de traiter des exemples d'équations ou de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Après quelques éléments sur la dérivabilité des fonctions vectorielles, la section sur les fonctions de plusieurs variables est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et à la géométrie. Elle s'achève par une étude au second ordre des extremums qui s'appuie sur les matrices symétriques.

## Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

Le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.

En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

# Programme

## Algèbre linéaire

Dans toute cette partie,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- consolider les acquis de la classe de première année;
- introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange;
- passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition  $E = \bigoplus E_i$ .

Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des sous-espaces de dimension finie,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

#### b) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Si  $u$  et  $v$  commutent alors le noyau de  $u$  est stable par  $v$ .

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

#### c) Trace

Trace d'une matrice carrée.

Linéarité, trace d'une transposée.

Relation  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Notation  $\text{tr}(A)$ .

#### d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Polynôme annulateur.

Deux polynômes de l'endomorphisme  $u$  commutent.

Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.

Relation  $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ .

Application au calcul de l'inverse et des puissances.

Le noyau de  $P(u)$  est stable par  $u$ .

#### e) Interpolation de Lagrange

Base de  $\mathbb{K}_n[X]$  constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en  $n + 1$  points distincts de  $\mathbb{K}$ .

Déterminant de Vandermonde.

Expression d'un polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  dans cette base.

La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en  $n + 1$  points est le polynôme constant égal à 1.

Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

## B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année. Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres);
- l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Éléments propres

Droite stable par un endomorphisme.

Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.

Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.

Si un polynôme  $P$  annule  $u$ , toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.

Équation aux éléments propres  $u(x) = \lambda x$ .

Si  $u$  et  $v$  commutent, les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .

Notation  $\text{Sp}(u)$ .

La notion de valeur spectrale est hors programme.

Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .

Équation aux éléments propres  $AX = \lambda X$ .

#### b) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.

Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Par convention le polynôme caractéristique est unitaire.

Notations  $\chi_A, \chi_u$ .

Coefficients de degrés 0 et  $n - 1$ .

Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.

La démonstration n'est pas exigible.

#### c) Diagonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à  $E$ .

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$  et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

Exemple des projecteurs et des symétries.

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

Polynôme caractéristique scindé à racines simples.

Traduction matricielle.

**d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs**

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Un endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement s'il admet  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  pour polynôme annulateur.

La démonstration n'est pas exigible.

Traduction matricielle.

Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.

**e) Trigonalisation en dimension finie**

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

La démonstration n'est pas exigible.

Traduction matricielle.

La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

**Endomorphismes des espaces euclidiens**

Cette section vise les objectifs suivants :

- consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces préhilbertiens réels;
- étudier isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques;
- approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral;
- introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.

Pour les applications courantes en dimension trois, on peut au besoin recourir au produit vectoriel, déjà introduit et connu des étudiants dans l'enseignement des sciences physiques notamment.

La notion d'adjoint est hors programme.

**a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien**

Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.

Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.

Groupe orthogonal.

Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.

Notation  $O(E)$ .

On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

**b) Matrices orthogonales**

Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T A = I_n$ .	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. Groupe orthogonal.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ». Notations $O_n(\mathbb{R})$ , $O(n)$ .
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation. Bases orthonormées directes.	Notations $SO_n(\mathbb{R})$ , $SO(n)$ .

**c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien**

Description des matrices de $O_2(\mathbb{R})$ , de $SO_2(\mathbb{R})$ . Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$ . On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	

**d) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles**

Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.	Notation $\mathcal{S}(E)$ . Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.	La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E)$ , $\mathcal{S}^{++}(E)$ . Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Espaces vectoriels normés**

Cette section vise les objectifs suivants :

- généraliser au cas des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel;
- fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.

Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

**a) Normes**

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace pré-hilbertien réel.	Normes usuelles $\ \cdot\ _1$ , $\ \cdot\ _2$ et $\ \cdot\ _\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ . Norme $\ \cdot\ _\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$ . L'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour $A$ partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	Convexité des boules.

**b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé**

Convergence et divergence d'une suite.  
 Unicité de la limite. Opérations sur les limites.  
 Une suite convergente est bornée.  
 Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.

**c) Comparaison des normes**

Normes équivalentes.

Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.  
 Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.  
 La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.

**d) Topologie d'un espace vectoriel normé**

Point intérieur à une partie.  
 Ouvert d'un espace normé.  
 Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.  
 Fermé d'un espace normé.

Une boule ouverte est un ouvert.

Caractérisation séquentielle.  
 Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.

Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.  
 Point adhérent à une partie, adhérence.

L'adhérence est l'ensemble des points adhérents.  
 Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.

Partie dense.  
 Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

**e) Limite et continuité en un point**

Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.  
 Opérations algébriques sur les limites, composition.  
 Continuité en un point.

Caractérisation séquentielle.

Caractérisation séquentielle.

**f) Continuité sur une partie**

Opérations algébriques, composition.  
 Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Si  $f$  est une application continue de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  alors l'ensemble défini par  $f(x) > 0$  est un ouvert et les ensembles définis par  $f(x) = 0$  ou  $f(x) \geq 0$  sont des fermés.

Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.

**g) Espaces vectoriels normés de dimension finie**

Équivalence des normes en dimension finie.

La démonstration est hors programme.  
 La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.  
 La démonstration est hors programme.

Théorème des bornes atteintes :  
 toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.  
 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.

La notion de norme subordonnée est hors programme.  
 Exemples du déterminant, du produit matriciel.

## Suites et séries de fonctions

### A - Compléments sur les séries numériques

Cette section a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions. L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$ .	La démonstration n'est pas exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

---

### B - Suites et séries de fonctions

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions. Les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

---

Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ .	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Utilisation d'une majoration uniforme de $ f_n(x) $ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$ .
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

---

#### b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

---

Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite $(f_n)$ de fonctions continues sur $I$ converge uniformément vers $f$ sur $I$ , alors $f$ est continue sur $I$ .	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
---	---

Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions :  
si une suite  $(f_n)$  de fonctions continues converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$  alors :

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

---

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite $(f_n)$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $f$ , et si la suite $(f'_n)$ converge uniformément sur $I$ vers une fonction $g$ , alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $f' = g$ .	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
---	---

Extension aux suites de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ , sous l'hypothèse de convergence uniforme de  $(f_n^{(k)})$  et de convergence simple de  $(f_n^{(j)})$  pour  $0 \leq j < k$ .

### c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme d'une série de fonctions :  
si une série  $\sum f_n$  de fonctions continues sur  $I$  converge uniformément sur  $I$ , alors sa somme est continue sur  $I$ .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de la double limite :  
si une série  $\sum f_n$  de fonctions définies sur  $I$  converge uniformément sur  $I$  et si, pour tout  $n$ ,  $f_n$  admet une limite  $\ell_n$  en  $a$  borne de  $I$  (éventuellement infinie), alors la série  $\sum \ell_n$  converge, la somme de la série admet une limite en  $a$  et :

La démonstration est hors programme.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment :  
si une série  $\sum f_n$  de fonctions continues converge uniformément sur  $[a, b]$  alors la série des intégrales est convergente et :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Dérivation de la somme d'une série de fonctions :  
si une série  $\sum f_n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  converge simplement sur un intervalle  $I$  et si la série  $\sum f_n'$  converge uniformément sur  $I$ , alors la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et sa dérivée est  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension à la classe  $\mathcal{C}^k$  sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

## C - Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence;
- étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités.

### a) Rayon de convergence

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.  
Lemme d'Abel :  
si la suite  $(a_n z_0^n)$  est bornée alors, pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| < |z_0|$ , la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.

Rayon de convergence  $R$  défini comme borne supérieure dans  $[0, +\infty)$  de l'ensemble des réels positifs  $r$  tels que la suite  $(a_n r^n)$  est bornée.

La série  $\sum a_n z^n$  converge absolument si  $|z| < R$ , et elle diverge grossièrement si  $|z| > R$ .

Intervalle ouvert de convergence.

Disque ouvert de convergence.

Avec  $R_a$  (resp.  $R_b$ ) le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ , (resp.  $\sum b_n z^n$ ) :

- si  $a_n = O(b_n)$ , alors  $R_a \geq R_b$  ;
- si  $a_n \sim b_n$ , alors  $R_a = R_b$ .

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$ .

Le résultat s'applique en particulier lorsque  $a_n = o(b_n)$ .

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

La limite du rapport  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  peut être directement utilisée.

### b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.

Caractère  $\mathcal{C}^\infty$  de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.

L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

Relation  $R(\sum a_n x^n) = R(\sum n a_n x^n)$ .

### c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$ .

Série de Taylor d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Unicité du développement en série entière.

Développements des fonctions usuelles.

Formule de Taylor avec reste intégral.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ .

Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

### d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.

Développement de  $\frac{1}{1-z}$  sur le disque unité ouvert.

Développement de  $\exp(z)$  sur  $\mathbb{C}$ .

La démonstration est hors programme.

## Intégration sur un intervalle quelconque

Cette section vise les objectifs suivants :

- étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;
- définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;
- compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme ;
- étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.

Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.

### b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour  $f$  continue par morceaux sur  $[a, +\infty[$ , l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  est dite convergente si  $\int_a^x f(t) dt$  a une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Notations  $\int_a^{+\infty} f$ ,  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ .  
Intégrale convergente (resp. divergente) en  $+\infty$ .

Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, +\infty[$  et à valeurs positives, alors  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est majorée.

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, +\infty[$  telles que  $0 \leq f \leq g$ , la convergence de  $\int_a^{+\infty} g$  implique celle de  $\int_a^{+\infty} f$ .

### c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de  $\mathbb{R}$ .

Propriétés des intégrales généralisées :  
linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Notations  $\int_a^b f$ ,  $\int_a^b f(t) dt$ .  
Intégrale convergente (resp. divergente) en  $b$ , en  $a$ .

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt.$$

La démonstration n'est pas exigible.  
L'existence des limites finies du produit  $fg$  aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de  $fg'$  et  $f'g$  sont de même nature.  
Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Changement de variable :

si  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  est une bijection strictement croissante de classe  $\mathcal{C}^1$ , et si  $f$  est continue sur  $]a, b[$ , alors  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$  sont de même nature, et égales en cas de convergence.

La démonstration n'est pas exigible.

Adaptation au cas où  $\varphi$  est strictement décroissante.

On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

**d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables**

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Inégalité triangulaire.

Une fonction est dite intégrable sur un intervalle  $I$  si elle est continue par morceaux sur  $I$  et son intégrale sur  $I$  est absolument convergente.

Espace vectoriel  $L^1(I, \mathbb{K})$  des fonctions intégrables sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Si  $f$  est continue, intégrable et positive sur  $I$ , et si  $\int_I f(t) dt = 0$ , alors  $f$  est identiquement nulle.

Théorème de comparaison :

pour  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, +\infty[$  :

- si  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$ , alors l'intégrabilité de  $g$  en  $+\infty$  implique celle de  $f$ .
- si  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$ , alors l'intégrabilité de  $f$  en  $+\infty$  est équivalente à celle de  $g$ .

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Notations  $\int_I f, \int_I f(t) dt$ .

Pour  $I = [a, b[$ , (respectivement  $]a, b[$ ), fonction intégrable en  $b$  (resp. en  $a$ ).

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$ .

Fonctions de référence :

pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

- intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  en  $+\infty$ , en  $0^+$  ;
- étude de l'intégrabilité de  $t \mapsto e^{-\alpha t}$  en  $+\infty$ .

L'intégrabilité de  $t \mapsto \ln t$  en 0 peut être directement utilisée.

Les résultats relatifs à l'intégrabilité de  $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$  en  $a$  peuvent être directement utilisés.

Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction  $x \mapsto f(x)$  est intégrable en  $a^+$  (resp. en  $b^-$ ) si  $t \mapsto f(a+t)$  (resp.  $t \mapsto f(b-t)$ ) l'est en  $0^+$ .

**e) Suites et séries de fonctions intégrables**

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Théorème de convergence dominée :

si une suite  $(f_n)$  de fonctions continues par morceaux sur  $I$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et s'il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  vérifiant  $|f_n| \leq \varphi$  pour tout  $n$ , alors les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$  et :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

La démonstration est hors programme.

Théorème d'intégration terme à terme :

si une série  $\sum f_n$  de fonctions intégrables sur  $I$  converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur  $I$ , et si la série  $\sum \int_I |f_n(t)| dt$  converge, alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

La démonstration est hors programme.

On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

## f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à  $x$  et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à  $t$ .

Théorème de continuité :

si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ , telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ ;

alors la fonction  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $A$ .

Théorème de convergence dominée à paramètre continu: si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  une borne de  $A$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$  telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  et  $t \mapsto \ell(t)$  sont continues par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ ;

alors  $\ell$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt.$$

Théorème de dérivation :

si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ , telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ ;

alors la fonction  $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$  et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension à la classe  $\mathcal{C}^k$  d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  et d'intégrabilité des  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$  pour  $0 \leq j < k$ .

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de  $A$ , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

La démonstration n'est pas exigible.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de  $A$ , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

## Variabes aléatoires discrètes

On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Ces outils permettent d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place du cadre de cette étude se veut à la fois minimale, pratique et rigoureuse :

- la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition;
- l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme;
- les diverses notions de convergences (presque sûre, en probabilité, en loi, etc.) sont hors programme.

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

### A - Ensembles dénombrables, familles sommables

Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.

Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de)  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme  $\{x_i, i \in I\}$  où  $I = \mathbb{N}$  ( $I \subset \mathbb{N}$ ) avec des  $x_i$  distincts.

Sont dénombrables :  $\mathbb{Z}$ , un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $[0, +\infty]$  sa somme

$$\sum_{i \in I} x_i \in [0, +\infty], \text{ et que pour tout découpage en paquets } I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ de } I, \sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} x_i \right).$$

La famille  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $[0, +\infty]$  est dite sommable si  $\sum_{i \in I} x_i < \infty$ . En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si  $(|x_i|)_{i \in I}$  l'est. Pour  $I = \mathbb{N}$ , la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si  $|x_i| \leq y_i$  pour tout  $i \in I$ , la sommabilité de  $(y_i)_{i \in I}$  implique celle de  $(x_i)_{i \in I}$ .

En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

### B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes

Univers  $\Omega$ , tribu  $\mathcal{A}$ . Espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.

Traduction de la réalisation des événements  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$  et

$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$  à l'aide des quantificateurs  $\exists$  et  $\forall$ .

Événements.

Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

Une variable aléatoire discrète  $X$  est une application définie sur  $\Omega$ , telle que  $X(\Omega)$  est au plus dénombrable et, pour tout  $x \in X(\Omega)$ ,  $X^{-1}(\{x\})$  est un événement.

L'univers  $\Omega$  n'est en général pas explicité.

Notations  $(X = x)$ ,  $\{X = x\}$ ,  $(X \in A)$ .

Notation  $(X \geq x)$  (et analogues) lorsque  $X$  est à valeurs réelles.

#### b) Probabilité

Probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $\sigma$ -additivité.  
Espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Notation  $P(A)$ .

Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire.  
Croissance de la probabilité.  
Continuité croissante, continuité décroissante.

Application : pour une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements (non nécessairement monotone), limites quand  $n$  tend vers l'infini de

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

Sous-additivité :  $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ .

En cas de divergence de la série à termes positifs  $\sum P(A_n)$ , on rappelle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$

Événement presque sûr, événement négligeable.

Système quasi-complet d'événements.

### c) Probabilités conditionnelles

Si  $P(B) > 0$ , la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  est définie par la relation  $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

L'application  $P_B$  définit une probabilité.  
Formule des probabilités composées.  
Formule des probabilités totales.

Si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

On rappelle la convention  $P(B|A_n)P(A_n) = 0$  lorsque  $P(A_n) = 0$ .

Formule de Bayes.

### d) Loi d'une variable aléatoire discrète

Loi  $P_X$  d'une variable aléatoire discrète.

La probabilité  $P_X$  est déterminée par la distribution de probabilités  $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ .

Variable aléatoire  $f(X)$ .  
Si  $X \sim Y$  alors  $f(X) \sim f(Y)$ .

On note  $X \sim Y$  lorsque les variables  $X$  et  $Y$  suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.  
On ne soulève aucune difficulté sur le fait que  $f(X)$  est une variable aléatoire.

Variable géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$  :  
 $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ .

Notation  $X \sim \mathcal{G}(p)$ .

Relation  $P(X > k) = (1 - p)^k$ .

Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ .

Variable de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  :  
 $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

Notation  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .

Interprétation en termes d'événements rares.

Couple de variables aléatoires discrètes.

Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.

Notation  $P(X = x, Y = y)$ .

Extension aux  $n$ -uplets de variables aléatoires.

Loi conjointe, lois marginales.

Loi conditionnelle de  $Y$  sachant un événement  $A$ .

**e) Événements indépendants**

Indépendance de deux événements.

Si  $P(B) > 0$ , l'indépendance de  $A$  et  $B$  équivaut à  $P(A|B) = P(A)$ .

Indépendance d'une famille finie d'événements.

L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants,  $A$  et  $\bar{B}$  le sont aussi.Extension au cas de  $n$  événements.**f) Variables aléatoires indépendantes**Deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  définies sur  $\Omega$  sont indépendantes si, pour tout  $A \subset X(\Omega)$  et  $B \subset Y(\Omega)$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants.Notation  $X \perp\!\!\!\perp Y$ .De façon équivalente, la distribution de probabilités de  $(X, Y)$  est donnée par

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Extension au cas de  $n$  variables aléatoires.

Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.

On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d.

Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

Fonctions de variables indépendantes :

si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , alors  $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ .

Lemme des coalitions :

si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  le sont aussi.

Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

**C - Espérance et variance****a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe**Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , définie par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

On adopte la convention  $xP(X = x) = 0$  lorsque  $x = +\infty$  et  $P(X = +\infty) = 0$ .Variable aléatoire  $X$  à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de  $X$ . $X$  est d'espérance finie si la famille  $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de  $X$ .

Variable centrée.

Pour  $X$  variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , relation :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.

Formule de transfert :

 $f(X)$  est d'espérance finie si et seulement si la famille  $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable. Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

On remarque que la formule s'applique aux couples, aux  $n$ -uplets de variables aléatoires.

Linéarité de l'espérance.

Si  $|X| \leq Y$  et  $E(Y) < +\infty$ , alors  $X$  est d'espérance finie.

Positivité, croissance de l'espérance.

Si  $X$  est positive et d'espérance nulle, alors  $(X = 0)$  est presque sûr.

Pour  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors  $XY$  est d'espérance finie et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Extension au cas de  $n$  variables aléatoires.

### b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si  $X^2$  est d'espérance finie,  $X$  est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

si  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérance finie, alors  $XY$  l'est aussi et :

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

Cas d'égalité.

Variance, écart type.

Notations  $V(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

Variable réduite.

Relation  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

Relation  $V(aX + b) = a^2V(X)$ .

Si  $\sigma(X) > 0$ , la variable  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.

Variance d'une variable géométrique, de Poisson.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ , cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

### c) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

La série entière définissant  $G_X$  est de rayon  $\geq 1$  et converge normalement sur  $[-1, 1]$ . Continuité de  $G_X$ .

Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

La loi d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est caractérisée par sa fonction génératrice  $G_X$ .

La variable aléatoire  $X$  est d'espérance finie si et seulement si  $G_X$  est dérivable en 1 ; dans ce cas  $E(X) = G_X'(1)$ .

Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

La démonstration de la réciproque n'est pas exigible.

Utilisation de  $G_X$  pour calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

### d) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres :

si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $m = E(X_1)$ ,

pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les étudiants doivent savoir retrouver, avec  $\sigma = \sigma(X_1)$  :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

## Calcul différentiel

### A - Dérivabilité des fonctions vectorielles

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  la notion de dérivée d'une fonction numérique. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Dérivabilité en un point.  
Dérivabilité sur un intervalle.

Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un.  
Traduction par les coordonnées dans la base canonique.  
Interprétation cinématique.

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.  
Dérivée de  $L(f)$ , où  $L$  est linéaire et  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .  
Dérivée de  $B(f, g)$ , où  $B$  est bilinéaire, de  $M(f_1, \dots, f_p)$ , où  $M$  est  $p$ -linéaire, et  $f, g, f_1, \dots, f_p$  à valeurs vectorielles.  
Dérivée de  $f \circ \varphi$  où  $\varphi$  est à valeurs réelles et  $f$  à valeurs vectorielles.  
Fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle.

La démonstration n'est pas exigible.  
Application au produit scalaire et au déterminant.

### B - Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de  $p \geq 2$  variables. L'étude d'une fonction de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ . Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas  $p = 2$  ou  $p = 3$ .

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dérivée en un point selon un vecteur.  
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  
Une fonction est dite de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur  $\Omega$ .  
Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
Une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  admet en tout point  $a$  de  $\Omega$  un développement limité d'ordre 1.  
Différentielle de  $f$  en  $a$ .

Notation  $D_v f(a)$ .  
Notation  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ . On peut aussi utiliser  $\partial_i f(a)$ .

La démonstration n'est pas exigible.  
Une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  est continue sur  $\Omega$ .  
Elle est définie comme la forme linéaire sur  $\mathbb{R}^p$  :

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

Notation  $df(a) \cdot h$ .

#### b) Règle de la chaîne

Dérivée de  $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ .  
Application au calcul des dérivées partielles de :  
 $(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$ .

En pratique, on se limite à  $n \leq 3$  et  $p \leq 3$ .  
Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.

Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.

**c) Gradient**

Dans  $\mathbb{R}^p$  muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
 Pour  $h \in \mathbb{R}^p$ , relation  $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ .

Le gradient est défini par ses coordonnées.  
 Notation  $\nabla f(a)$ .  
 Interprétation géométrique du gradient : si  $\nabla f(a) \neq 0$ , il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de  $f$  en  $a$  est maximale, et de même sens.

**d) Fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$** 

Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .

Théorème de Schwarz.

Matrice hessienne en un point  $a$  d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Notations  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .

La démonstration est hors programme.

Notation  $H_f(a)$ .

La démonstration est hors programme.

Expression en termes de produit scalaire.

**e) Extremums d'une fonction de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$** 

Extremum local, global.

Point critique d'une application de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Si une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  admet un extremum local en un point  $a$ , alors  $a$  est un point critique.

Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $a$  un point critique de  $f$  :

- si  $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ , alors  $f$  atteint un minimum local strict en  $a$  ;
- si  $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ , alors  $f$  n'a pas de minimum en  $a$ .

Adaptation à l'étude d'un maximum local.

Explicitation pour  $p = 2$  (trace et déterminant).

Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de  $\mathbb{R}^p$ .



# **Classes préparatoires aux grandes écoles**

## **Filière scientifique**

### **Voie Physique et chimie (PC)**

#### **Annexe 2**

#### **Programme de physique**

# Programme de physique de la voie PC

## Préambule

### Objectifs de formation

Le programme de physique de la classe de PC est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques s'appuyant sur celles déjà travaillées au lycée et en classe de PCSI. Le programme vise à préparer les étudiants à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant. Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ces derniers auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

### Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée « **Formation expérimentale** », sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Physique PC

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques** » est structurée autour de six thèmes : « Optique », « Électronique », « Thermodynamique », « Mécanique », « Électromagnétisme » et « Physique des ondes ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise. Certains items de cette seconde partie, **identifiés en caractères gras** dans la colonne « capacités exigibles », se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées, d'une part, au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes et, d'autre part, aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de la classe de PC.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression, celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

### Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
<b>S'approprier</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée.</li> <li>- Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.).</li> <li>- Énoncer ou dégager une problématique scientifique.</li> <li>- Représenter la situation par un schéma modèle.</li> <li>- Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole.</li> <li>- Relier le problème à une situation modèle connue.</li> <li>- Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.</li> </ul>
<b>Analyser / Reasonner</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Formuler des hypothèses.</li> <li>- Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples.</li> <li>- Proposer une stratégie pour répondre à une problématique.</li> <li>- Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques.</li> <li>- Évaluer des ordres de grandeur.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations.</li> <li>- Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.</li> </ul>
<b>Réaliser</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle.</li> <li>- Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo.</li> <li>- Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure.</li> <li>- Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité.</li> <li>- Effectuer des représentations graphiques à partir de données.</li> <li>- Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques.</li> <li>- Conduire une analyse dimensionnelle.</li> </ul>
<b>Valider</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes.</li> <li>- Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances.</li> <li>- Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information.</li> <li>- Analyser les résultats de manière critique.</li> <li>- Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplète, etc.).</li> <li>- Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.</li> </ul>
<b>Communiquer</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- À l'écrit comme à l'oral : <ul style="list-style-type: none"> <li>o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente.</li> <li>o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation.</li> <li>o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.).</li> </ul> </li> <li>- Écouter, confronter son point de vue.</li> </ul>

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de l'**autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.

La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

### Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Physique PC

doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes facilitent cette mise en activité ;

- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques : la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques (mathématiques, chimie, informatique).

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :

- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

## Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur seconde année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

### 1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.

L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation ( $R^2$ ).

Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	<p>Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.</p> <p>Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).</p> <p>Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).</p> <p>Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.</p>
Incertitudes-types composées.	<p>Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.</p> <p>Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.</p> <p><u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.</p>
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	<p>Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.</p> <p>Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.</p>
Régression linéaire.	<p>Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle.</p> <p>Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.</p> <p><u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.</p>

## 2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales nouvelles que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année de PC durant les séances de travaux pratiques. Elle vient prolonger la partie correspondante de PCSI dont les capacités doivent être complètement acquises à l'issue des deux années de préparation, et restent donc naturellement au programme de seconde année PC.

Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret. À ce titre, elle vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
<b>1. Mesures de temps et de fréquences</b>	
Mesurer indirectement une fréquence par comparaison avec une fréquence connue voisine, en utilisant une détection synchrone.	Réaliser une détection « synchrone » à l'aide d'un multiplieur et d'un passe-bas simple adapté à la mesure.
Réaliser une analyse spectrale.	Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
<b>2. Électricité</b>	
Générateurs basse fréquence à modulation interne ou externe.	Élaborer un signal électrique analogique modulé en fréquence.
Montages utilisant un amplificateur linéaire intégré (ALI).	Mettre en œuvre divers montages utilisant un ALI, les schémas des montages étant fournis.
<b>3. Optique</b>	
Analyser une lumière complètement polarisée.	Identifier de façon absolue l'axe d'un polariseur par une méthode mettant en œuvre la réflexion vitreuse Identifier les lignes neutres d'une lame quart d'onde ou demi-onde, sans distinction entre axe lent et rapide. Modifier la direction d'une polarisation rectiligne. Obtenir une polarisation circulaire à partir d'une polarisation rectiligne, sans prescription sur le sens de rotation. Mesurer un pouvoir rotatoire naturel.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Physique PC

Étudier la cohérence temporelle d'une source.	Régler un interféromètre de Michelson pour une observation en lame d'air avec une source étendue par une démarche autonome non imposée. Obtenir une estimation semi-quantitative de la longueur de cohérence d'une radiation à l'aide d'un interféromètre de Michelson en lame d'air.
Mesurer une faible différence de longueurs d'onde : doublet spectral, modes d'une diode laser.	Réaliser la mesure d'un faible écart spectral avec un interféromètre de Michelson.

### 3. Prévention du risque au laboratoire de physique

L'apprentissage et le respect des règles de sécurité électrique, optique et celles liées à la pression et à la température permettent aux étudiants de prévenir et de minimiser les risques. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>Prévention des risques au laboratoire</b>	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- <b>Risque électrique</b>	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- <b>Risque optique</b>	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
- <b>Risques liés à la pression et à la température</b>	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.

## Contenus thématiques

Les contenus de la formation sont organisés autour de six thèmes.

### 1. Optique

- 1.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses
- 1.2. Superposition d'ondes lumineuses
- 1.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young
- 1.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson

### 2. Électronique

### 3. Thermodynamique

- 3.1. Systèmes ouverts en régime stationnaire
- 3.2. Diffusion de particules
- 3.3. Diffusion thermique
- 3.4. Rayonnement thermique

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Physique PC

#### 4. Mécanique

- 4.1. Changements de référentiel
- 4.2. Dynamique dans un référentiel non galiléen
- 4.3. Mécanique des fluides

#### 5. Électromagnétisme

- 5.1. Sources du champ électromagnétique
- 5.2. Électrostatique
- 5.3. Magnétostatique
- 5.4. Équations de Maxwell

#### 6. Physique des ondes

- 6.1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert
- 6.2. Phénomènes de propagation linéaires unidimensionnels
- 6.3. Interfaces entre deux milieux
- 6.4. Introduction à la physique du laser
- 6.5. Approche ondulatoire de la mécanique quantique

### 1. Optique

Le programme de la classe de PC s'inscrit dans la continuité de la partie « **Formation des images** » du thème « **Ondes et signaux** » du programme de PCSI. Dans une première partie, on introduit les éléments spécifiques à l'émission, la propagation et la détection des ondes lumineuses. Les parties suivantes traitent essentiellement des interférences lumineuses : partant des trous d'Young éclairés par une source ponctuelle strictement monochromatique, on étudie ensuite l'évolution de la visibilité sous l'effet d'un élargissement spatial et spectral de la source. Le brouillage des franges précédentes sous l'effet d'un élargissement spatial de la source conduit à montrer l'un des avantages de l'interféromètre de Michelson éclairé par une source étendue (franges d'égale inclinaison et franges d'égale épaisseur) en constatant expérimentalement l'existence d'un lieu de localisation des franges. L'objectif de cette partie n'est pas le calcul de la répartition de l'intensité lumineuse modélisant les figures observées : on exploite le plus souvent les variations de l'ordre d'interférences (avec la position du point d'observation, la position du point source et la longueur d'onde) pour interpréter les observations sans expliciter l'intensité de la lumière.

La partie « **Modèle scalaire des ondes lumineuses** » introduit les outils nécessaires à l'étude des phénomènes ondulatoires dans le domaine de l'optique. La réponse des récepteurs est supposée proportionnelle à la moyenne du carré du champ électrique de l'onde. Le programme utilise uniquement le mot « intensité » pour décrire la grandeur détectée mais on peut employer indifféremment les termes « intensité » et « éclairement » sans chercher à les distinguer à ce niveau de formation. Le théorème de Malus (orthogonalité des rayons lumineux et des surfaces d'ondes dans l'approximation de l'optique géométrique) est admis. Dans le cadre de l'optique, on qualifie une onde de plane ou sphérique par référence à la forme des surfaces d'ondes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>1.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses</b>	
<b>Modèle de propagation dans l'approximation de l'optique géométrique.</b>  Vibration lumineuse.	Associer la grandeur scalaire de l'optique à une composante d'un champ électrique.

Chemin optique. Déphasage dû à la propagation.	Exprimer le retard de phase en un point en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique.
Surfaces d'ondes. Théorème de Malus. Onde plane, onde sphérique ; effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss.	Utiliser l'égalité des chemins optiques sur les rayons d'un point objet à son image. Associer une description de la formation des images en termes de rayons lumineux et en termes de surfaces d'onde.
<b>Modèle d'émission.</b>  Largeur spectrale. Cohérence temporelle.	Classer différentes sources lumineuses (lampe spectrale basse pression, laser, source de lumière blanche...) en fonction du temps de cohérence de leurs diverses radiations. Citer quelques ordres de grandeur des longueurs de cohérence temporelle associées à différentes sources. Relier, en ordre de grandeur, le temps de cohérence et la largeur spectrale de la radiation considérée.
<b>Réception d'une onde lumineuse.</b>  Récepteurs. Intensité lumineuse.	Comparer le temps de réponse d'un récepteur usuel (œil, photodiode, capteur CCD) aux temps caractéristiques des vibrations lumineuses. Relier l'intensité lumineuse à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire de l'optique.  <b>Mettre en œuvre un capteur optique.</b>

Dans la partie « **Superposition d'ondes lumineuses** », le professeur est invité à s'appuyer sur des situations concrètes, des illustrations expérimentales et des simulations afin de donner du sens aux différentes notions présentées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>1.2. Superposition d'ondes lumineuses</b>	
Superposition de deux ondes quasi-monochromatiques non synchrones ou incohérentes entre elles.	Justifier et utiliser l'additivité des intensités.
Superposition de deux ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles : formule de Fresnel.	Établir la formule de Fresnel. Identifier une situation de cohérence entre deux ondes et utiliser la formule de Fresnel.
Contraste.	Associer un bon contraste à des ondes d'intensités voisines.
Superposition de N ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles, de même amplitude et dont les phases sont	Expliquer qualitativement l'influence de N sur l'intensité et la finesse des franges brillantes observées.

en progression arithmétique dans le cas $N \gg 1$ .	Établir, par le calcul, la condition d'interférences constructives et la demi-largeur $2\pi/N$ des franges brillantes. Établir et utiliser la formule indiquant la direction des maxima d'intensité derrière un réseau de fentes rectilignes parallèles.
---	--

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young** », les trous d'Young permettent de confronter théorie et expérience. En revanche, les fentes d'Young sont abordées de manière exclusivement expérimentale. Aucun autre interféromètre à division du front d'onde n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>1.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young</b>	
<b>Dispositif-modèle des trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif (source ponctuelle à grande distance finie ; observation à grande distance finie).</b>	
Champ d'interférences. Ordre d'interférences.	Définir, déterminer et utiliser l'ordre d'interférences.
-----	-----
-----	-----
-----	-----
-----	-----
<b>Du dispositif-modèle au dispositif réel.</b>	
Fentes d'Young. Montage de Fraunhofer.	Identifier l'effet de la diffraction sur la figure observée. Expliquer l'intérêt pratique du dispositif des fentes d'Young comparativement aux trous d'Young. Exprimer l'ordre d'interférences sur l'écran dans le cas d'un dispositif des fentes d'Young utilisé en configuration de Fraunhofer.
-----	-----
-----	-----
-----	-----
Perte de contraste par élargissement spatial de la source.	Utiliser un critère semi-quantitatif de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférences pour interpréter des observations expérimentales.
-----	-----
-----	-----
Perte de contraste par élargissement spectral de la source.	Utiliser un critère semi-quantitatif de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférences pour interpréter des observations expérimentales. Relier la longueur de cohérence temporelle, la largeur spectrale et la longueur d'onde en ordres de grandeur.
-----	-----
-----	-----
Observations en lumière blanche (blanc d'ordre supérieur, spectre cannelé).	Déterminer les longueurs d'ondes des cannelures.

Dans le prolongement de la partie précédente, la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson** » vise à mettre en lumière l'intérêt des dispositifs interférentiels par division d'amplitude, en s'appuyant sur

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Physique PC

l'exemple de l'interféromètre de Michelson. L'accent est ainsi mis sur l'importance expérimentale de ces dispositifs, notamment dans le domaine de la métrologie. Lors de la modélisation de l'interféromètre de Michelson, la séparatrice est supposée d'épaisseur négligeable.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>1.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson</b>	
<p><b>Interféromètre de Michelson équivalent à une lame d'air éclairée par une source spatialement étendue.</b></p> <p>Localisation des franges. Franges d'égale inclinaison.</p>	<p>Justifier les conditions d'observation des franges d'égale inclinaison, le lieu de localisation des franges étant admis. Établir et utiliser l'expression de l'ordre d'interférences en fonction de l'épaisseur de la lame, l'angle d'incidence et la longueur d'onde.</p> <p><b>Décrire et mettre en œuvre les conditions d'éclairage et d'observation adaptées à l'utilisation d'un interféromètre de Michelson en lame d'air.</b></p> <p><b>Mesurer l'écart en longueur d'onde d'un doublet et la longueur de cohérence d'une radiation.</b></p> <p><b>Interpréter des observations faites en lumière blanche avec l'interféromètre de Michelson en configuration lame d'air.</b></p>
<p><b>Interféromètre de Michelson équivalent à un coin d'air éclairé par une source spatialement étendue.</b></p> <p>Localisation des franges. Franges d'égale épaisseur.</p>	<p>Justifier les conditions d'observation des franges d'égale épaisseur, le lieu de localisation des franges étant admis. Utiliser l'expression donnée de la différence de marche en fonction de l'épaisseur pour exprimer l'ordre d'interférences.</p> <p><b>Décrire et mettre en œuvre les conditions d'éclairage et d'observation adaptées à l'utilisation d'un interféromètre de Michelson en coin d'air.</b></p> <p><b>Caractériser la géométrie d'un objet ou l'indice d'un milieu à l'aide d'un interféromètre de Michelson.</b></p> <p><b>Interpréter des observations faites en lumière blanche avec l'interféromètre</b></p>

## 2. Électronique

La partie « **Production, acquisition et traitement d'un signal électrique** » est abordée exclusivement de manière expérimentale et prolonge sur ce thème le programme de première année de la classe de PCSI. De par leur large champ d'applications, les capacités identifiées dans cette partie peuvent être reliées de façon fructueuse à d'autres capacités expérimentales du programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>Production, acquisition et traitement d'un signal électrique.</b>  Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre passe-bande du deuxième ordre avec un amplificateur.	<b>Mettre en œuvre un oscillateur quasi-sinusoïdal et analyser les spectres des signaux générés.</b>
Échantillonnage.	<b>Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage.</b>
Condition de Nyquist-Shannon.	<b>Utiliser la condition de Nyquist-Shannon. Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'une acquisition numérique.</b>
Détection synchrone.	<b>Mettre en œuvre un protocole de détection synchrone.</b>

## 3. Thermodynamique

Le programme de thermodynamique de la classe de PC s'inscrit dans le prolongement de celui de la classe de PCSI : les principes de la thermodynamique peuvent être désormais écrits sous forme infinitésimale pour un système évoluant entre deux instants infiniment proches, d'une part dans le cadre de l'étude des machines thermiques avec écoulement en régime stationnaire et d'autre part dans le cadre de l'étude de la diffusion thermique. Les expressions des variations infinitésimales des fonctions d'état en fonction des variables d'état doivent être fournies pour les systèmes envisagés.

Ce thème contribue également à asseoir la maîtrise des opérateurs d'analyse vectorielle (gradient, divergence, laplacien) mais le formalisme doit rester au deuxième plan. Les mises en équations locales sont réalisées dans le cas de problèmes ne dépendant que d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle, ce qui permet d'aborder des situations plus variées en fournissant les expressions de la divergence et du laplacien.

Au travers des illustrations et des exemples traités, le professeur est invité à sensibiliser les étudiants à certains enjeux sociétaux liés par exemple aux questions d'économies d'énergie et de réchauffement climatique ; ceci est aussi l'occasion d'insister sur la notion de modèle en physique et plus généralement en sciences.

La partie « **Systèmes ouverts en régime stationnaire** » complète la partie « **Machines thermique** » du programme de première année de la classe de PCSI en proposant notamment un bilan d'entropie. La maîtrise des démonstrations par les étudiants et l'application des résultats à des situations concrètes constituent des objectifs de formation.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>3.1. Systèmes ouverts en régime stationnaire</b>	
Premier et deuxième principes de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire, dans le seul cas d'un écoulement unidimensionnel au niveau de la section d'entrée et de la section de sortie.	Établir les relations $\Delta h + \Delta e = w_u + q$ et $\Delta s = s_e + s_c$ et les utiliser pour étudier des machines thermiques réelles à l'aide de diagrammes thermodynamiques (T,s) et (P,h).

Dans la partie « **Diffusion de particules** », l'accent est mis sur le notion de bilan dans le cas où le phénomène de convection est négligé. Cette partie se termine par un modèle microscopique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>3.2. Diffusion de particules</b>	
Vecteur densité de flux de particules $\mathbf{j}_N$ .	Exprimer le flux de particules traversant une surface orientée en utilisant le vecteur $\mathbf{j}_N$ .
Bilans de particules.	Utiliser la notion de flux pour traduire un bilan global de particules. Établir l'équation locale traduisant un bilan de particules dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, éventuellement en présence de sources internes. Utiliser l'opérateur divergence et son expression fournie pour exprimer le bilan local de particules dans le cas d'une géométrie quelconque.
Loi de Fick.	Utiliser la loi de Fick. Citer l'ordre de grandeur d'un coefficient de diffusion dans un gaz dans les conditions usuelles.
Régimes stationnaires.	Utiliser, en régime stationnaire, la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de sources internes.
Équation de diffusion en l'absence de sources internes.	Établir l'équation de la diffusion en l'absence de sources internes. Utiliser l'opérateur laplacien et son expression fournie pour écrire l'équation de diffusion dans le cas d'une géométrie quelconque. Analyser une équation de diffusion en ordres de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.

<p>Approche microscopique du phénomène de diffusion.</p>	<p>Mettre en place un modèle probabiliste discret à une dimension de la diffusion (marche au hasard) et évaluer le coefficient de diffusion associé en fonction du libre parcours moyen et de la vitesse quadratique moyenne.</p> <p><u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, simuler la marche au hasard d'un grand nombre de particules à partir d'un centre et caractériser l'étalement spatial de cet ensemble de particules au cours du temps.</p>
--	--

Dans la partie « **Diffusion thermique** », la mise en équations de la diffusion thermique est limitée au cas des solides ; on peut étendre les résultats ainsi établis aux milieux fluides en l'absence de convection en affirmant la généralisation des équations obtenues dans les solides. La loi phénoménologique de Newton à l'interface entre un solide et un fluide peut être utilisée dès lors qu'elle est fournie.

<b>Notions et contenus</b>	<b>Capacités exigibles</b>
<b>3.3. Diffusion thermique</b>	
Vecteur densité de flux thermique $\mathbf{j}_q$	Exprimer le flux thermique à travers une surface orientée en utilisant le vecteur $\mathbf{j}_q$ .
Premier principe de la thermodynamique.	Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, éventuellement en présence de sources internes. Utiliser l'opérateur divergence et son expression fournie pour exprimer le bilan local dans le cas d'une géométrie quelconque, éventuellement en présence de sources internes.
Loi de Fourier.	Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, métaux.
Régimes stationnaires. Résistance thermique.	Utiliser la conservation du flux thermique sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Établir l'expression d'une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel. Utiliser les lois d'associations de résistances thermiques.

Équation de la diffusion thermique.	<p>Établir une équation de diffusion thermique. Utiliser l'opérateur laplacien et son expression fournie pour écrire l'équation de diffusion dans le cas d'une géométrie quelconque.</p> <p>Analyser une équation de diffusion en ordres de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Utiliser la loi de Newton fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide.</p> <p><u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.</p> <p><b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.</b></p>
-------------------------------------	--

Dans la partie « **Rayonnement thermique** », une étude qualitative du rayonnement du corps noir est proposée sans qu'aucune formule ne soit exigible. Celle-ci permet également d'aborder de manière quantitative l'effet de serre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>3.4. Rayonnement thermique</b>	
Approche descriptive du rayonnement du corps noir. Loi de Wien, loi de Stefan. Effet de serre. Albédo.	Exploiter les expressions fournies des lois de Wien et de Stefan. Analyser quantitativement l'effet de serre en s'appuyant sur un bilan énergétique dans le cadre d'un modèle à une couche.

## 4. Mécanique

Le programme de mécanique de PC s'inscrit dans le prolongement du thème « **Mouvements et interactions** » et de la partie « **Statique des fluides dans un référentiel galiléen** » du thème « **Énergie : conversion et transfert** » du programme de PCSI. Il est constitué de trois parties relevant successivement de la mécanique du point ou des fluides.

Dans la première partie « **Changements de référentiel** », la cinématique des changements de référentiels n'est pas étudiée pour elle-même mais en vue d'applications en dynamique du point ou des fluides.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>4.1. Changements de référentiel</b>	

Référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre : transformation de Galilée, composition des vitesses.	Relier la transformation de Galilée et la formule de composition des vitesses à la relation de Chasles et au caractère supposé absolu du temps.
Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en translation par rapport à un autre : point coïncident, vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement.	Exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement.
Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe : point coïncident, vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement, accélération de Coriolis.	Exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement. Citer et utiliser l'expression de l'accélération de Coriolis.

Dans la partie « **Dynamique dans un référentiel non galiléen** », l'étude du champ de pesanteur est conduite en supposant le référentiel géocentrique galiléen. De nombreuses applications permettent d'illustrer cette partie : le pendule de Foucault, la déviation vers l'est, les vents géostrophiques, les courants marins ; l'étude statique des marées constitue également une ouverture pertinente.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>4.2. Dynamique dans un référentiel non galiléen</b>	
Cas d'un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen : force d'inertie d'entraînement.	Déterminer la force d'inertie d'entraînement. Appliquer la deuxième loi de Newton, le théorème du moment cinétique et le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen.
Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen : force d'inertie d'entraînement, force d'inertie de Coriolis.	Exprimer la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis. Associer la force d'inertie d'entraînement axifuge à l'expression familière « force centrifuge ». Appliquer la deuxième loi de Newton, le théorème du moment cinétique et le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen.
Champ de pesanteur terrestre : définition, évolution qualitative avec la latitude, ordres de grandeur.	Distinguer le champ de pesanteur et le champ gravitationnel.  <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, illustrer un effet lié au caractère non galiléen du référentiel terrestre
Équilibre d'un fluide dans un référentiel non galiléen en translation ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Établir et utiliser l'expression de la force d'inertie d'entraînement volumique.

La partie intitulée « **Mécanique des fluides** » est conçue comme une initiation de telle sorte que de nombreux concepts sont introduits de manière élémentaire. Toute extension du programme vers les cours spécialisés doit être évitée : par exemple l'approche lagrangienne, la fonction de courant, le potentiel complexe, l'étude locale du champ des vitesses, la relation de Bernoulli pour des écoulements compressibles ou instationnaires, le théorème de Reynolds et le théorème d'Euler sont hors programme.

L'apprentissage de la mécanique des fluides contribue à la maîtrise progressive des opérateurs d'analyse vectorielle qui sont utilisés par ailleurs en thermodynamique et en électromagnétisme. Quel que soit l'ordre dans lequel le professeur choisit de présenter ces parties, il convient d'introduire ces opérateurs en insistant sur le contenu physique sous-jacent. En outre, la recherche de lignes de courants est traitée exclusivement à l'aide d'outils numériques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>4.3. Mécanique des fluides</b>	
<b>4.3.1. Description d'un fluide en mouvement</b>	
Champ eulérien des vitesses. Lignes de champ. Tubes de champ.	Définir et utiliser l'approche eulérienne.
Écoulement stationnaire.	Discuter du caractère stationnaire d'un écoulement en fonction du référentiel d'étude.
Dérivée particulaire de la masse volumique. Écoulement incompressible.	Établir l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique. Utiliser l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique pour caractériser un écoulement incompressible.
Débit massique. Débit volumique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur densité de courant de masse à travers une surface orientée. Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux du champ de vitesse à travers une surface orientée.
Équation locale de conservation de la masse.	Établir l'équation locale de conservation de la masse dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Citer et utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque à l'aide de l'opérateur divergence et son expression fournie.
Caractérisation d'un écoulement incompressible par la divergence du champ des vitesses.	Traduire localement, en fonction du champ de vitesses, le caractère incompressible d'un écoulement.
Dérivée particulaire du champ de vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer la dérivée particulaire de la vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Utiliser l'expression de l'accélération, le terme convectif étant écrit sous la forme <b>(<math>\mathbf{v} \cdot \text{grad}</math>) <math>\mathbf{v}</math></b> . Utiliser l'expression fournie de l'accélération convective en fonction de <b><math>\text{grad}</math> (<math>v^2/2</math>)</b> et <b><math>\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v}</math></b> .

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Physique PC

Écoulement irrotationnel défini par la nullité du rotationnel du champ des vitesses en tout point ; potentiel des vitesses.	Traduire localement, en fonction du champ de vitesses, le caractère irrotationnel d'un écoulement et en déduire l'existence d'un potentiel des vitesses.
<b>4.3.2. Actions de contact dans un fluide en mouvement</b>	
Forces de pression. Équivalent volumique.	Exprimer la force de pression exercée par un fluide sur une surface élémentaire. Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.
Contraintes tangentielles dans un écoulement $\mathbf{v} = v_x(y) \mathbf{u}_x$ au sein d'un fluide newtonien ; viscosité.	Utiliser l'expression fournie $d\mathbf{F} = \eta \partial v_x / \partial y d\mathbf{S} \mathbf{u}_x$ .
Équivalent volumique des forces de viscosité dans un écoulement incompressible.	Établir l'expression de l'équivalent volumique des forces de viscosité dans le cas d'un écoulement de cisaillement à une dimension et utiliser sa généralisation admise pour un écoulement incompressible quelconque.
Traînée d'une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide newtonien : nombre de Reynolds ; coefficient de traînée $C_x$ ; graphe de $C_x$ en fonction du nombre de Reynolds.	Évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique.
<b>4.3.3. Équations dynamiques locales</b>	
Équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Terme convectif. Terme diffusif. Nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.	Utiliser l'équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Évaluer en ordre de grandeur le rapport du terme convectif sur le terme diffusif et le relier au nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.
Notion d'écoulement parfait et de couche limite.	Exploiter l'absence de forces de viscosité et le caractère isentropique de l'évolution des particules de fluide. Utiliser la condition aux limites sur la composante normale du champ des vitesses.
Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.	Établir et utiliser la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.
<b>4.3.4. Bilans macroscopiques</b>	
Bilans de masse.	Établir un bilan de masse en raisonnant sur un système ouvert et fixe ou sur un système fermé et mobile.

Bilans de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique pour un écoulement stationnaire unidimensionnel à une entrée et une sortie.	Associer un système fermé à un système ouvert pour faire un bilan. Utiliser le théorème de la quantité de mouvement et le théorème de l'énergie cinétique pour réaliser un bilan. Exploiter la nullité (admise) de la puissance des forces intérieures dans un écoulement parfait et incompressible.
--	--

## 5. Électromagnétisme

L'électromagnétisme a été abordé en classe de PCSI dans un domaine restreint (magnétostatique, induction électromagnétique et forces de Laplace) et sans le support des équations locales. Le programme de la classe de PC couvre en revanche tout le spectre des fréquences, des régimes stationnaires jusqu'aux phénomènes de propagation en passant par les régimes quasi-stationnaires et prend appui sur les équations locales (équation de conservation de la charge et équations de Maxwell). Le programme est découpé en parties indépendantes dont l'ordre de présentation relève de la liberté pédagogique du professeur. De nombreuses approches sont possibles, y compris en fractionnant les parties. Les phénomènes de propagation sont étudiés essentiellement dans le cadre du thème « **Physique des ondes** » du programme : l'articulation entre les parties « **Électromagnétisme** » et « **Physique des ondes** » relève elle aussi de la liberté pédagogique.

Toute étude de distributions de courants superficiels est exclue. La modélisation superficielle d'une distribution de charges est strictement limitée à la modélisation du condensateur plan par deux plans infinis uniformément chargés : on fait remarquer la discontinuité du champ à la traversée d'une nappe de charges superficielles mais les relations de passage ne figurent pas au programme.

S'agissant des potentiels, on se limite à introduire le potentiel scalaire en électrostatique et à faire remarquer que le champ électrique ne dérive pas d'un potentiel scalaire en régime variable.

L'apprentissage de l'électromagnétisme contribue à la maîtrise progressive des opérateurs d'analyse vectorielle qui sont utilisés par ailleurs en thermodynamique et en mécanique des fluides. Quel que soit l'ordre dans lequel le professeur choisit de présenter ces parties, il convient d'introduire ces opérateurs en insistant sur le contenu physique sous-jacent.

L'étude de l'électromagnétisme n'est pas centrée sur les calculs de champs : ceux-ci se limitent donc à des calculs motivés par des applications pratiques d'intérêt évident. La recherche des lignes de champ d'un champ donné est traitée exclusivement à l'aide d'outils numériques.

La partie « **Sources du champ électromagnétique** » étudie les sources du champ électromagnétique dans l'approximation des milieux continus. Par ailleurs, il convient de souligner et d'exploiter les analogies formelles avec les autres théories de champs : diffusion de particules, diffusion thermique, gravitation, mécanique des fluides.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>5.1. Sources du champ électromagnétique</b>	
<b>5.1.1. Description microscopique et mésoscopique des sources</b>	

Densité volumique de charges. Charge traversant un élément de surface fixe et vecteur densité de courant. Intensité du courant.	Exprimer la densité volumique de charge et le vecteur densité de courant en fonction de la vitesse moyenne des porteurs de charge, de leur charge et de leur densité volumique. Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant.
<b>5.1.2 Conservation de la charge</b>	
Équation locale de conservation de la charge.	Établir l'équation traduisant la conservation de la charge dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Citer et utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence, son expression étant fournie. Exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant en régime stationnaire ; relier cette propriété à la loi des nœuds de l'électrocinétique.
<b>5.1.3 Conduction électrique dans un conducteur ohmique</b>	
Loi d'Ohm locale. Conductivité électrique.	Établir l'expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique, l'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau étant décrite par une force de frottement fluide linéaire. Discuter de l'influence de la fréquence sur la conductivité électrique. Établir l'expression de la résistance d'une portion de conducteur filiforme.
Effet Hall.	Interpréter qualitativement l'effet Hall dans une géométrie parallélépipédique.
Effet thermique du courant électrique : loi de Joule locale.	Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique.

La partie « **Électrostatique** » étudie les lois de l'électrostatique et quelques applications. Les calculs de champs doivent être motivés par l'utilisation de ces champs pour étudier des situations d'intérêt pratique évident. Ces calculs ne s'appuient sur la loi de Coulomb que pour des distributions de charges discrètes. Dans le cas des distributions continues, on se limite aux situations de haute symétrie permettant de calculer le champ par le théorème de Gauss et aux superpositions de champs ainsi obtenus. Cette rubrique permet aussi d'introduire et d'exploiter des analogies avec le champ gravitationnel qui a été étudié en PCSI dans le seul cas d'astres ponctuels.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>5.2. Électrostatique</b>	
<b>5.2.1. Champ électrostatique</b>	

Loi de Coulomb. Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique et le potentiel créés par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
<b>Propriétés du champ électrostatique</b>  Symétries.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique. Équations locales.	Relier l'existence d'un potentiel électrostatique à la nullité du rotationnel du vecteur champ électrostatique. Justifier l'orthogonalité des lignes de champ avec les surfaces équipotentielles et leur orientation dans le sens des potentiels décroissants.
Théorème de Gauss et équation locale de Maxwell-Gauss.	Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss.
Lignes de champ électrostatique. Équipotentielles.	Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ électrostatique. Repérer, sur une carte de champ électrostatique, d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme du champ électrostatique à l'évasement des tubes de champ loin des sources. Relier équipotentielles et lignes de champ électrostatique. Évaluer la norme du champ électrostatique à partir d'un réseau de lignes équipotentielles.
<b>5.2.2. Exemples de champs électrostatiques</b>	
Dipôle électrostatique. Moment dipolaire.	Citer les conditions de l'approximation dipolaire.
Potentiel et champ créés par un dipôle.	Établir l'expression du potentiel électrostatique. Comparer la décroissance du champ et du potentiel avec la distance dans le cas d'une charge ponctuelle et dans le cas d'un dipôle. Tracer l'allure des lignes de champ électrostatique engendrées par un dipôle.
Actions subies par un dipôle placé dans un champ électrostatique d'origine extérieure : résultante et moment.	Utiliser les expressions fournies de la résultante et du moment des actions subies par un dipôle placé dans un champ électrostatique d'origine extérieure.

Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure.	Utiliser l'expression fournie de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure.
Interactions ion-molécule et molécule-molécule.	Expliquer qualitativement la solvation des ions dans un solvant polaire.
Dipôle induit. Polarisabilité.	Associer la polarisabilité et le volume de l'atome en ordre de grandeur.
Plan infini uniformément chargé en surface.	Établir l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
Condensateur plan. Capacité. Densité volumique d'énergie électrostatique.	Établir l'expression du champ créé par un condensateur plan. Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan. Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air. Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur.
Énergie de constitution d'un noyau atomique modélisé par une boule uniformément chargée.	Exprimer l'énergie de constitution d'un noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.
<b>5.2.3. Analogies avec le champ gravitationnel</b>	
Analogies entre champ électrostatique et champ gravitationnel.	Utiliser les analogies entre les forces électrostatique et gravitationnelle pour déterminer l'expression de champs gravitationnels.

La partie « **Magnétostatique** » aborde l'étude du champ magnétique en régime stationnaire en prenant appui sur les équations locales : la loi de Biot et Savart ne figure pas au programme. L'objectif réside davantage dans l'étude des propriétés des champs magnétiques que dans leur calcul : les calculs de champ magnétique doivent donc se limiter à des situations d'intérêt pratique évident. Enfin, la notion de potentiel-vecteur est hors programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>5.3. Magnétostatique</b>	
<b>5.3.1. Champ magnétostatique</b>	
Équations locales de la magnétostatique et formes intégrales : flux conservatif et théorème d'Ampère.	Choisir un contour fermé et une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère.
Linéarité des équations.	Utiliser une méthode de superposition.
Propriétés de symétrie.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (rotation, symétrie plane) pour prévoir des propriétés du champ créé.

Propriétés topographiques.	Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ magnétostatique. Repérer, sur une carte de champ magnétostatique, d'éventuelles sources du champ et leur sens. Associer l'évolution de la norme d'un champ magnétique à l'évasement des tubes de champ.
<b>5.3.2. Exemples de champs magnétostatiques</b>	
Modèle du câble rectiligne infini.	Déterminer le champ créé par un câble rectiligne infini.
Solénoïde long sans effets de bords.	Établir et citer l'expression du champ à l'intérieur d'un solénoïde long, la nullité du champ extérieur étant admise.
Inductance propre. Densité volumique d'énergie magnétique.	Établir les expressions de l'inductance propre et de l'énergie d'une bobine modélisée par un solénoïde long. Associer l'énergie d'une bobine à une densité volumique d'énergie magnétique.
<b>5.3.3. Dipôles magnétostatiques</b>	
Moment magnétique d'une boucle de courant plane.	Relier le moment magnétique d'un atome d'hydrogène à son moment cinétique.
Rapport gyromagnétique de l'électron. Magnéton de Bohr.	Construire en ordre de grandeur le magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle. Évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent.
Actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure : résultante et moment.	Utiliser les expressions fournies de la résultante et du moment des actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. Décrire l'expérience de Stern et Gerlach et expliquer ses enjeux.
Énergie potentielle d'un dipôle magnétique rigide placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure.	Utiliser l'expression fournie de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique d'origine extérieure.

La partie « **Équations de Maxwell** » présente les équations de Maxwell en régime dépendant du temps. La notion de potentiel-vecteur est hors-programme mais on insiste sur le fait que le champ électrique ne dérive pas en général d'un potentiel scalaire. L'étude détaillée des ondes électromagnétiques qui prolonge cette partie est placée dans la partie « **Physique des ondes** ». On ne mentionne ici les phénomènes de propagation que pour les négliger dans le cadre des régimes lentement variables. Le cadre adopté est celui de

l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) magnétique, pour lequel les effets des distributions de courants dominant ceux des distributions de charges.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>5.4. Équations de Maxwell</b>	
<b>5.4.1. Postulats de l'électromagnétisme</b>	
Force de Lorentz. Équations locales de Maxwell. Formes intégrales.	Utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale. Relier l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Établir l'équation locale de la conservation de la charge à partir des équations de Maxwell. Utiliser une méthode de superposition.  <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant des capteurs inductifs.</b>
<b>5.4.2. Aspects énergétiques</b>	
Vecteur de Poynting. Densité volumique d'énergie électromagnétique. Équation locale de Poynting.	Utiliser les grandeurs énergétiques pour conduire des bilans d'énergie électromagnétique. Associer le vecteur de Poynting et l'intensité lumineuse utilisée dans le domaine de l'optique.
<b>5.4.3. Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique</b>	
Équations de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide.	Établir les équations de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide. Expliquer le caractère non instantané des interactions électromagnétiques.
ARQS magnétique.	Discuter l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Simplifier et utiliser les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'approximation du régime quasi-stationnaire. Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.

## 6. Physique des ondes

Le programme de physique des ondes de la classe de PC s'inscrit dans le prolongement de la partie « **Propagation d'un signal** » du thème « **Ondes et signaux** » du programme de PCSI où des propriétés unificatrices (interférences, battements, etc.) ont été abordées en s'appuyant sur une approche expérimentale et sans référence à une équation d'onde. Il s'agit désormais de mettre en place l'équation d'onde de d'Alembert en mécanique, en acoustique et en électromagnétisme. On aborde ensuite l'étude de la dispersion, de l'atténuation et de l'absorption associées à des phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. La propagation d'ondes dans des milieux différents conduit naturellement à étudier la réflexion et la transmission d'ondes à une

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Physique PC

interface. L'étude de la physique des ondes s'achève par une introduction à la physique du laser et par une introduction à l'approche ondulatoire de la mécanique quantique.

La partie « **Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert** » est consacrée à l'étude de phénomènes ondulatoires non dispersifs régis par l'équation d'onde de d'Alembert. Le choix a été fait ici de privilégier les solutions harmoniques dans la résolution pour leur universalité comme solutions adaptées aux équations d'ondes linéaires. S'agissant de la modélisation microscopique des solides, l'objectif est uniquement de proposer une interprétation du module d'Young d'un solide ; par la suite, la mise en équations des ondes longitudinales dans les solides est conduite directement dans l'approximation du solide continu. Dans le cadre de la physique des ondes, on qualifiera de plane ou sphérique une onde par référence à sa dépendance spatiale  $f(x,t)$  ou  $f(r,t)$ .

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>6.1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert</b>	
<b>6.1.1. Ondes mécaniques unidimensionnelles dans les solides déformables</b>	
Ondes transversales sur une corde vibrante.	Établir l'équation d'onde décrivant les ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.
Domaine d'élasticité d'un solide : module d'Young, loi de Hooke.	Exploiter le modèle de la chaîne d'atomes élastiquement liés pour relier le module d'Young d'un solide élastique à ses caractéristiques microscopiques.
Ondes mécaniques longitudinales dans une tige solide dans l'approximation des milieux continus.	Établir l'équation d'onde décrivant les ondes mécaniques longitudinales dans une tige solide.
Équation de d'Alembert ; célérité.	Identifier l'équation de d'Alembert. Relier qualitativement la célérité d'ondes mécaniques, la raideur et l'inertie du milieu support.
Ondes progressives, ondes progressives harmoniques ; ondes stationnaires.	Différencier une onde stationnaire d'une onde progressive. Utiliser qualitativement l'analyse de Fourier pour décrire une onde non harmonique.
Modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Résonances d'une corde de Melde.	Décrire les modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Interpréter quantitativement les résonances observées avec la corde de Melde en négligeant l'amortissement.
<b>6.1.2. Ondes acoustiques dans les fluides</b>	
Approximation acoustique. Équation de d'Alembert pour la surpression acoustique.	Classer les ondes acoustiques par domaines fréquentiels. Valider l'approximation acoustique. Établir, par une approche eulérienne, l'équation de propagation de la surpression acoustique dans une situation unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes. Utiliser l'opérateur laplacien pour généraliser l'équation d'onde.

Célérité des ondes acoustiques.	Exprimer la célérité des ondes acoustiques en fonction de la température pour un gaz parfait.
Ondes planes progressives harmoniques : caractère longitudinal, impédance acoustique.	Exploiter la notion d'impédance acoustique pour faire le lien entre les champs de surpression et de vitesse d'une onde plane progressive harmonique. Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques.
Densité volumique d'énergie acoustique, vecteur densité de courant énergétique. Intensité sonore. Niveau d'intensité sonore.	Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde. Citer quelques ordres de grandeur de niveaux d'intensité sonore.
Ondes acoustiques sphériques harmoniques.	Utiliser une expression fournie de la surpression pour interpréter par un argument énergétique la décroissance en $1/r$ de l'amplitude.
<b>6.1.3. Ondes électromagnétiques dans le vide</b>	
Équations de propagation d'un champ électromagnétique dans une région sans charge ni courant.	Établir et citer les équations de propagation d'un champ électromagnétique dans le vide.
Structure d'une onde plane progressive harmonique.	Établir et exploiter la structure d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique. Utiliser la superposition d'ondes planes progressives harmoniques pour justifier les propriétés d'ondes électromagnétiques planes progressives non harmoniques.
Aspects énergétiques.	Relier la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde électromagnétique. Interpréter le flux du vecteur de Poynting en termes particuliers. Citer quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens et les relier aux ordres de grandeur des champs électriques associés.
Polarisation des ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques : polarisation elliptique, circulaire et rectiligne. Loi de Malus.	Relier l'expression du champ électrique à l'état de polarisation de l'onde.  <b>Utiliser la loi de Malus.</b> <b>Reconnaître une lumière polarisée rectilignement.</b> <b>Distinguer une lumière non polarisée d'une lumière totalement polarisée.</b> <b>Utiliser une lame quart d'onde ou demi-onde pour modifier ou analyser un état de polarisation, avec de la lumière totalement polarisée.</b>

La partie « **Phénomènes de propagation linéaires unidimensionnels** » est consacrée aux phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. L'étude s'appuie sur des exemples variés empruntés aux domaines de la mécanique ou de l'électromagnétisme. Elle est menée sur des ondes harmoniques planes en représentation complexe puis sur des paquets d'ondes harmoniques planes. S'agissant des paquets d'ondes, on se limite au cas où l'étalement est négligeable.

L'étude de la propagation des ondes dans un plasma dilué est exclusivement limitée aux ondes transverses électriques ; le professeur est invité à signaler, sans soucis d'exhaustivité, quelques limites du modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>6.2. Phénomènes de propagation linéaires unidimensionnels</b>	
<b>6.2.1. Dispersion et absorption</b>	
Propagation unidimensionnelle d'une onde harmonique dans un milieu linéaire.	Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles. Établir la relation de dispersion caractéristique d'un phénomène de propagation en utilisant des ondes de la forme $\exp\pm j(\underline{k}x - \omega t)$ . Distinguer différents types de comportements selon la valeur de la pulsation.
Dispersion, absorption.	Associer les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}$ aux phénomènes de dispersion et d'absorption.
Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe.	Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre. Déterminer la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.  <b>Étudier la propagation d'une onde électrique dans un câble coaxial.</b>  <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement.
<b>6.2.2. Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels</b>	
Propagation d'une onde électromagnétique plane harmonique unidirectionnelle dans un conducteur ohmique de conductivité réelle. Effet de peau dans un conducteur ohmique.	Identifier une analogie avec un phénomène de diffusion. Établir la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans un conducteur ohmique à basses fréquences. Associer l'atténuation de l'onde dans le milieu conducteur à une dissipation d'énergie.

	Estimer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à différentes fréquences.
Propagation d'une onde électromagnétique plane harmonique transverse et unidirectionnelle dans un plasma dilué. Conductivité électrique complexe.	Justifier la neutralité électrique locale du plasma en présence d'une onde transverse. Établir l'expression de la conductivité électrique complexe du plasma. Interpréter énergétiquement le caractère imaginaire pur de la conductivité électrique complexe du plasma.
Relation de dispersion. Pulsation plasma. Domaine de transparence. Domaine réactif, onde évanescence.	Établir la relation de dispersion des ondes planes progressives harmoniques transverses. Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes dans le domaine de transparence du plasma. Interpréter la pulsation plasma comme une pulsation de coupure. Citer les caractéristiques d'une onde stationnaire évanescence. Justifier que, dans le domaine réactif, une onde électromagnétique harmonique ne transporte aucune puissance en moyenne.

La partie « **Interfaces entre deux milieux** » est consacrée à la réflexion et la transmission d'ondes à une interface plane sous incidence normale en acoustique et en électromagnétisme. Dans ce dernier cas, on admet que les milieux diélectriques, linéaires, homogènes et isotropes (DLHI) relèvent d'un traitement faisant apparaître l'indice complexe, mais aucune modélisation du comportement des DLHI ne figure au programme. On se limite dans tous les cas à des milieux non magnétiques. La notion de densité de courants superficiels et les relations de passage du champ électromagnétique ne figurent pas au programme de même que la notion de conducteur parfait. Les conditions aux limites sur la composante normale du champ électrique et la composante tangentielle du champ magnétique doivent être fournies si nécessaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>6.3. Interfaces entre deux milieux</b>	
Réflexion et transmission d'une onde acoustique plane progressive sous incidence normale sur une interface plane infinie entre deux fluides : coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des vitesses, des surpressions et des puissances acoustiques surfaciques moyennes.	Expliciter des conditions aux limites à une interface. Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion. Associer l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.
Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique polarisée rectilignement à l'interface entre deux milieux d'indices complexes $\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$ dans le cas d'une incidence normale : coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique.	Exploiter la continuité admise du champ électromagnétique dans cette configuration pour obtenir l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en fonction des indices complexes. Utiliser les expressions des coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique dans des situations variées. Établir et interpréter les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en puissance dans le cas d'une interface

	entre deux milieux diélectriques linéaires, homogènes, isotropes et transparents.  <b>Étudier la réflexion en amplitude de tension d'une onde électrique à l'extrémité d'un câble coaxial pour une impédance terminale nulle, infinie ou résistive.</b>
--	---

La partie « **Introduction à la physique du laser** » est consacrée à une introduction modeste à la physique du laser. Une approche descriptive des milieux amplificateurs de lumière est d'abord proposée ainsi qu'une introduction descriptive simplifiée à l'optique des faisceaux spatialement limités, dont l'un des objectifs est de pouvoir déterminer la puissance surfacique disponible, à partir de la prévision des dimensions de la tache de section minimale dans des configurations optiques élémentaires. On se limite au mode fondamental gaussien.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>6.4. Introduction à la physique du laser</b>	
<b>6.4.1. Milieu amplificateur de lumière</b>	
Absorption, émission stimulée, émission spontanée.	Distinguer les propriétés d'un photon émis par émission spontanée ou stimulée.
Coefficients d'Einstein.	Associer l'émission spontanée à la durée de vie d'un niveau excité. Utiliser les coefficients d'Einstein dans le cas d'un système à plusieurs niveaux non dégénérés.
Amplification d'ondes lumineuses par émission stimulée.	Justifier qualitativement la nécessité d'une inversion de population pour parvenir à amplifier une onde électromagnétique dans un laser.
<b>6.4.2. Propriétés optiques d'un faisceau spatialement limité</b>	
Description simplifiée d'un faisceau de profil gaussien : waist, longueur de Rayleigh, ouverture angulaire.	Justifier qualitativement l'inadéquation du modèle de l'onde plane pour décrire un faisceau laser. Utiliser l'expression fournie du profil radial d'intensité. Construire l'allure d'un faisceau de profil gaussien à partir de l'enveloppe d'un faisceau cylindrique et d'un faisceau conique. Exploiter qualitativement le phénomène de diffraction pour relier le waist et l'ouverture angulaire du faisceau à grande distance.
Transformation à l'aide d'une lentille d'un faisceau cylindrique en faisceau conique et réciproquement. Élargisseur de faisceau.	Déterminer la dimension et la position de la section minimale du faisceau émergent d'une lentille éclairée par un faisceau cylindrique.

Les parties précédentes ont permis d'introduire les outils et concepts de base associés à la physique des ondes, particulièrement tant qu'elle est régie par des équations aux dérivées partielles linéaires. S'il est un domaine où cette notion de linéarité joue un rôle central, c'est bien celui de la mécanique quantique.

La partie « **Approche ondulatoire de la mécanique quantique** » présente quelques-unes des notions associées à une description ondulatoire de ce domaine. La démarche adoptée, volontairement modeste, est centrée sur un approfondissement des notions introduites en première année que sont la dualité onde-corpuscule et l'inégalité de Heisenberg spatiale, les objectifs étant désormais quantitatifs. Il s'agit, sur des systèmes unidimensionnels et des situations physiques simplifiées d'envisager quelques conséquences qui découlent de cette description ondulatoire : l'effet tunnel et ses applications sont ainsi discutés comme aboutissement naturel des notions abordées dans cette partie. Elle est ancrée dans le réel : on insiste sur le fait que les situations envisagées décrivent des systèmes physiques réels effectivement unidimensionnels

Toute discussion autour de la mesure et de ses effets sur un système est exclue, de même que toute introduction au spin. L'accent est mis avant tout sur la mise en équations des situations physiques proposées à l'aide des outils de la physique des ondes, et sur la discussion graphique des résultats qui en découlent. Tout développement des calculs intermédiaires est donc naturellement proscrit et les expressions sur lesquelles s'appuient les discussions qualitatives doivent être fournies.

Le courant de probabilité est introduit dans un contexte restreint avec pour seul objectif d'exprimer le coefficient de transmission d'une barrière de potentiel.

<b>6.5. Approche ondulatoire de la mécanique quantique</b>	
<b>6.5.1. Amplitude de probabilité</b>	
Fonction d'onde $\psi(x,t)$ associée à une particule dans un problème unidimensionnel. Densité linéique de probabilité de présence.	Normaliser une fonction d'onde. Relier qualitativement la fonction d'onde à la notion d'orbitale en chimie.
Principe de superposition. Interférences.	Relier la superposition de fonctions d'ondes à la description d'une expérience d'interférences entre particules.
<b>6.5.2. Équation de Schrödinger pour une particule libre</b>	
Équation de Schrödinger.	Utiliser l'équation de Schrödinger fournie.
États stationnaires.	Associer les états stationnaires aux états d'énergie déterminée. Établir et utiliser la forme $\psi(x,t) = \phi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ pour la fonction d'onde d'un état stationnaire et l'associer à la relation de Planck-Einstein. Distinguer l'onde associée à un état stationnaire en mécanique quantique d'une onde stationnaire au sens usuel de la physique des ondes.
Paquet d'ondes associé à une particule libre. Relation $\Delta k_x \Delta x \geq 1/2$ .	Utiliser l'équation de Schrödinger pour déterminer la partie spatiale $\phi(x)$ des fonctions d'onde stationnaires décrivant une particule libre. Identifier la vitesse d'une particule libre et la vitesse du paquet d'ondes la décrivant. Exploiter l'inégalité de Heisenberg pour relier l'étendue spatiale et l'étendue spectrale du paquet d'ondes décrivant une particule libre.

Courant de probabilité associé à une particule libre.	Utiliser l'expression admise du courant de probabilité associé à une particule libre et l'interpréter comme un produit densité*vitesse.
<b>6.5.3. Équation de Schrödinger dans un potentiel <math>V(x)</math> uniforme par morceaux</b>	
Quantification de l'énergie dans un puits de potentiel rectangulaire de profondeur infinie.	Établir les expressions des énergies des états stationnaires. Retrouver qualitativement l'énergie minimale à partir de l'inégalité de Heisenberg spatiale.
Énergie de confinement quantique.	Associer le confinement d'une particule quantique à une augmentation de l'énergie cinétique.
Évolution temporelle d'une particule confinée dans une superposition d'états.	Mettre en évidence les oscillations d'une particule dont la fonction d'onde s'écrit comme la superposition de deux états stationnaires et relier la fréquence d'oscillation à la différence des énergies.
Quantification de l'énergie des états liés dans un puits de profondeur finie. Élargissement effectif du puits par les ondes évanescentes.	Décrire la forme des fonctions d'onde dans les différents domaines. Utiliser les conditions aux limites admises : continuité de $\phi$ et $d\phi/dx$ . Associer la quantification de l'énergie au caractère lié de la particule. Mener une discussion graphique. Interpréter qualitativement, à partir de l'inégalité de Heisenberg spatiale, l'abaissement des niveaux d'énergie par rapport au puits de profondeur infinie.
<b>6.5.4. Effet tunnel</b>	
Effet tunnel. Coefficient de transmission associé à une particule libre incidente sur une barrière de potentiel.	Citer quelques applications de l'effet tunnel. Définir le coefficient de transmission comme un rapport de courants de probabilités. Utiliser une expression fournie du coefficient de transmission à travers une barrière de potentiel.

## Annexe 1 : matériel

Cette liste complète celle donnée en annexe 1 du programme de physique de PCSI. À elles deux, ces listes regroupent le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de ces listes lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une aide.

### 1. Domaine optique

- Lames quart d'onde, lames demi-onde
- Interféromètre de Michelson

### 2. Domaine électrique

- Générateurs de signaux basse fréquence à modulation de fréquence
- Câbles coaxiaux, bouchons adaptés

### 3. Domaine thermodynamique

- Caméra thermique

## Annexe 2 : outils mathématiques

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de PC sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 2 du programme de la classe de PCSI et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » prolonge l'étude de l'outil gradient abordée en classe de PCSI en introduisant de nouveaux opérateurs : seules leurs expressions en coordonnées cartésiennes sont exigibles. Toutes les autres formules utiles (expressions en coordonnées cylindriques ou sphériques, actions sur des produits, combinaisons d'opérateurs, etc.) doivent être fournies.

Le thème « analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « séries de Fourier » abordée en classe de PCSI en admettant la décomposition d'une fonction non périodique du temps en une somme continue de fonctions sinusoïdales. De même qu'en classe de PCSI où le calcul des coefficients d'un développement en série de Fourier est exclu, on ne cherche pas à expliciter le poids relatif et les déphasages relatifs des différentes composantes de Fourier, de telle sorte que la transformée de Fourier n'est pas exigible. On insiste en revanche sur la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale « utile » ( $\Delta\omega$  ou  $\Delta k_x$ ) et l'étendue caractéristique d'un signal non périodique ( $\Delta t$  ou  $\Delta x$ ).

Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>1. Calcul différentiel</b>	
Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles. Dérivées partielles. Différentielle. Théorème de Schwarz.	Relier la différentielle et les dérivées partielles premières. Utiliser le théorème de Schwarz (admis).
Intégration de l'expression d'une dérivée partielle.	Intégrer une expression de la forme $\partial f/\partial x = g(x,y)$ à $y$ fixé en introduisant une fonction $\varphi(y)$ inconnue comme « constante d'intégration ».
<b>2. Analyse vectorielle</b>	
Gradient.	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à une date fixée. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.

Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Opérateur <b>b.grad</b> .	Exprimer la différentielle d'un champ de vecteurs à une date fixée. Exprimer les composantes de <b>(b.grad)a</b> en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes.
Cas des champs proportionnels à $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ ou $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)$ .	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur $i\mathbf{k}$ .
<b>3. Analyse de Fourier</b>	
Synthèse spectrale d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.
Synthèse spectrale d'une fonction non périodique.	Utiliser un raisonnement par superposition. Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale « utile » ( $\Delta\omega$ ou $\Delta k_x$ ) et l'étendue caractéristique d'un signal non périodique ( $\Delta t$ ou $\Delta x$ ).
<b>4. Équations aux dérivées partielles</b>	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert, équation de Schrödinger.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution familière dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites

### Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclut l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous complète les outils numériques identifiés dans le programme de physique de première année de la classe de PCSI.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Physique PC

Domaines numériques	Capacités exigibles
<b>1. Tableaux</b>	
Tableaux à une ou deux dimensions.	Choisir une structure de données appropriée à la modélisation d'un problème physique. Réaliser des opérations algébriques simples sur des tableaux. Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque <b>numpy</b> (leurs spécifications étant fournies) pour manipuler des tableaux.
<b>2. Équations différentielles et équations aux dérivées partielles</b>	
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.



# **Classes préparatoires aux grandes écoles**

## **Filière scientifique**

### **Voie Physique et chimie (PC)**

#### **Annexe 3**

#### **Programme de chimie**

# Programme de chimie de la voie PC

## Préambule

### Objectifs de formation

Le programme de chimie de la classe de PC est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques s'appuyant sur celles déjà travaillées au lycée et en classe de PCSI. Le programme vise à préparer les étudiant·e·s à un cursus d'ingénieur·e, de chercheur·se, d'enseignant·e ou de scientifique. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant·e les compétences déjà travaillées au lycée inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats. L'acquisition de ce socle par les étudiant·es constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant·e.

Parce que la chimie est avant tout une science expérimentale qui développe la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ils auront à le faire dans l'exercice de leur métier d'ingénieur·e, de chercheur·se ou de scientifique.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques, notamment dans le domaine de la simulation. Ces sciences offrent aujourd'hui aux étudiant·es la possibilité de modélisations numériques complexes, permettant de décrire plus finement le monde réel.

Afin justement de pouvoir élaborer des modèles en prise avec la réalité, les étudiant·es doivent apprendre à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits et celui des concepts et des théories. La démarche de modélisation occupe donc une place centrale dans le programme et l'enseignant·e doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative.

La construction d'un modèle passe par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie de l'étudiant·e et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à apprendre à mobiliser connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

### Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée « **Formation expérimentale** », sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiant·es doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Chimie PC

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques** » est structurée autour de chapitres portant sur les transformations de la matière d'une part et la constitution et les propriétés physiques et chimiques de la matière d'autre part, des modélisations macroscopiques et microscopiques venant rendre compte des phénomènes de plus en plus précisément. La présentation en deux colonnes « notions et contenus » et « capacités exigibles » met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiant·es est requise. Pour faciliter la progressivité des acquisitions, des reprises sont effectuées en enrichissant les descriptions ; par exemple, le modèle de Lewis a été utilisé en première année pour décrire la constitution des entités et le modèle quantique est abordé en seconde année, la cinétique a été limitée en première année aux transformations en réacteur fermé et en deuxième année se poursuit dans le cadre de différents modèles de réacteurs ouverts. Le dialogue entre les deux niveaux de description macroscopique-microscopique se prolonge et, comme le dialogue entre le monde des objets et des phénomènes et celui des modèles, reste une priorité du programme de chimie de deuxième année.

Certains items de cette seconde partie, **identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant·e doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiant·es ; l'annexe dédiée à cette composante en précise les objectifs.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiant·es doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de chimie et de physique en fin de l'année de PC.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tou·tes les étudiant·es. Il n'impose en aucun cas une progression, celle-ci relevant de la liberté pédagogique de l'enseignant·e.

### Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiant·es et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de l'**autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiant·es sur les notions et capacités exigibles du programme.

La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiant·es des questions liées à la poursuite d'études scientifiques, à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme par exemple la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'éducation à l'**environnement** et au **développement durable**, le **réchauffement climatique**.

Compétence	Exemples de capacités associées
<b>S'approprier</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée.</li> <li>- Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, représentation graphique, tableau, etc.).</li> <li>- Énoncer ou dégager une problématique scientifique.</li> <li>- Représenter la situation par un schéma modèle.</li> <li>- Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole.</li> <li>- Relier le problème à une situation modèle connue.</li> <li>- Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.</li> </ul>
<b>Analyser / Raisonner</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Formuler des hypothèses.</li> <li>- Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples.</li> <li>- Proposer une stratégie pour répondre à une problématique.</li> <li>- Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques.</li> <li>- Évaluer des ordres de grandeur.</li> <li>- Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations.</li> <li>- Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de plusieurs documents.</li> </ul>
<b>Réaliser</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle.</li> <li>- Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo.</li> <li>- Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure.</li> <li>- Utiliser le matériel et les espèces chimiques de manière adaptée en respectant des règles de sécurité.</li> <li>- Effectuer des représentations graphiques à partir de données.</li> <li>- Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques.</li> <li>- Conduire une analyse dimensionnelle.</li> </ul>
<b>Valider</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes.</li> <li>- Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances.</li> <li>- Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information.</li> <li>- Analyser les résultats de manière critique.</li> <li>- Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.).</li> <li>- Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.</li> </ul>
<b>Communiquer</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- À l'écrit comme à l'oral : <ul style="list-style-type: none"> <li>○ présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente ;</li> <li>○ rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation ;</li> <li>○ utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, représentations graphiques, cartes mentales, etc.).</li> </ul> </li> <li>- Écouter, confronter son point de vue.</li> </ul>

L'enseignant·e veille aussi à développer chez les étudiant·es des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :

- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- caractériser et valoriser ses compétences scientifiques, techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

### Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant·e organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiant·es en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences sera d'autant plus efficace que les étudiant·es seront acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiant·es. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant·e à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant·e peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques, physique, mathématiques, informatique.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiant·es, l'enseignant·e veillera soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

## Formation expérimentale

Cette partie, spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiant·es lors des séances de travaux pratiques, vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.

D'une part, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la **mesure** et de l'évaluation des **incertitudes**. D'autre part, elle présente de façon détaillée l'ensemble des **capacités expérimentales** qui doivent être acquises et pratiquées en autonomie par les étudiant·es à l'issue de la seconde année, un grand nombre d'entre elles ayant déjà été mise en œuvre en première année.

Une liste de matériel, que les étudiant·es doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure en **Annexe 1** du présent programme.

### 1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année. L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Chimie PC

est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiant·es en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation ( $R^2$ ).

Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.  <b>Capacité numérique :</b> simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de type Monte-Carlo permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.  <b>Capacité numérique :</b> à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, simuler un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude-type sur les paramètres du modèle.

## 2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales que les étudiant·es doivent avoir acquises, durant les séances de travaux pratiques, à l'issue de la seconde année. Une séance de travaux pratiques s'articule autour d'une problématique, que les thèmes – repérés en gras dans le corps du programme – peuvent servir à définir.

Les capacités rassemblées ici ne constituent donc en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'organiseraient autour d'une découverte du matériel : par exemple, toutes les capacités mises en œuvre autour d'un appareil de mesure ne sauraient être l'objectif unique d'une séance, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion de l'étude d'un problème concret.

Les différentes capacités à acquérir sont, pour plus de clarté, regroupées en quatre domaines en chimie, les deux premiers étant davantage transversaux :

- 2.1. Prévention du risque au laboratoire de chimie
- 2.2. Mesures de grandeurs physiques
- 2.3. Synthèses chimiques
- 2.4. Analyses qualitatives et quantitatives

Cette structuration ne constitue pas une incitation à limiter une activité expérimentale à un seul domaine. En effet, lors de la mise en œuvre d'une synthèse au laboratoire, il peut être utile de procéder à une analyse du produit formé ou à une mesure de grandeur physique caractéristique et, bien entendu, il est indispensable de prendre en compte les consignes de sécurité.

Par ailleurs, il convient de développer les compétences de la démarche scientifique et de favoriser l'autonomie et la prise d'initiative des étudiant·es lors des activités expérimentales.

Le matériel nécessaire à l'acquisition de l'ensemble des capacités ci-dessous figure en **Annexe 1** du programme.

### 2.1. Prévention du risque au laboratoire de chimie

Les étudiant·es doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation, au rejet et au stockage des espèces chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futur·es ingénieur·es, chercheur·es, enseignant·es, il·elle·s doivent être sensibilisé·es au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>Prévention du risque chimique</b> Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H), conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
<b>Prévention de l'impact environnemental</b> Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

## 2.2. Mesures de grandeurs physiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
Mesures de : - Volume  - Masse  - pH  - Conductance et conductivité  - Tension et intensité du courant  - Température  - Pouvoir rotatoire  - Indice de réfraction  - Absorbance et transmittance	Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise. Distinguer les instruments de verrerie <i>In</i> et <i>Ex</i> .  Préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée à partir d'un solide, d'un liquide, d'une solution de composition connue avec le matériel approprié.  Utiliser les méthodes et le matériel adéquats pour transférer l'intégralité du solide ou du liquide pesé.  Utiliser les appareils de mesure (balance, pH-mètre, conductimètre, voltmètre, ampèremètre, thermomètre, réfractomètre, spectrophotomètre, polarimètre) en s'appuyant sur une notice.  Mettre en œuvre des mesures calorimétriques à pression constante.  Choisir les électrodes adaptées à une mesure électrochimique.  Construire un dispositif électrochimique à partir de sa représentation symbolique.  Étalonner une chaîne de mesure si nécessaire.

## 2.3. Synthèses chimiques

Au cours de la seconde année, l'étudiant·e poursuit l'acquisition des différentes techniques mises en œuvre dans les synthèses et de leurs fondements théoriques, en lien avec les propriétés physico-chimiques concernées. Progressivement, il·elle est invité·e à proposer des stratégies de transformation des réactifs, de séparation et de purification des produits synthétisés.

Les différentes techniques utilisées permettent de réaliser les opérations de :

- chauffage et refroidissement ;
- séparation et purification : extraction liquide-liquide ou liquide-solide, filtration, distillation, séchage d'un liquide ou d'un solide, séparation avec usage de l'évaporateur rotatif, recristallisation.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>Transformation chimique</b>  Transformations à chaud, à froid, à température ambiante.  Contrôle et régulation de la température du milieu réactionnel.	Choisir la verrerie adaptée à la transformation réalisée et aux conditions opératoires mises en œuvre. Réaliser le ou les montages appropriés et en expliquer le principe et l'intérêt.

	<p>Choisir ou justifier l'ordre d'introduction des réactifs.</p> <p>Réaliser et réguler une addition au goutte à goutte.</p> <p>Utiliser le moyen de chauffage ou de refroidissement adéquat.</p> <p>Suivre et contrôler l'évolution de la température dans le réacteur.</p> <p>Choisir un moyen approprié pour réguler une éventuelle ébullition.</p> <p>Utiliser un réfrigérant, contrôler et réguler le reflux.</p>
Suivi de l'évolution de la transformation.	Mettre en œuvre des méthodes permettant de suivre qualitativement ou quantitativement l'avancement de la transformation.
<b>Séparation et purification</b>	Choisir ou justifier un protocole de séparation ou de purification d'un produit, sur la base de données fournies ou issues d'observations et/ou de mesures.
Séparation de deux liquides non miscibles.	Réaliser une extraction liquide-liquide. Identifier la nature des phases dans une ampoule à décanter. Distinguer extraction et lavage d'une phase.
Séparations par distillation.	Réaliser une hydrodistillation. Réaliser une distillation fractionnée.
Séparation de deux espèces dissoutes dans une phase liquide.	Élaborer et mettre en œuvre un protocole de séparation de deux espèces dissoutes dans une phase liquide.
Séparation d'un soluté du solvant. Séparation d'un liquide et d'un solide.	Expliquer l'intérêt de l'évaporateur rotatif. Réaliser et mettre en œuvre une filtration simple, une filtration sous pression réduite. Choisir et justifier la méthode de filtration adaptée au système étudié.
Lavage d'un solide.	Réaliser et justifier les différentes étapes du lavage d'un solide : ajout du solvant de lavage, trituration, essorage.
Recristallisation d'un solide.	Expliquer et mettre en œuvre la technique de recristallisation. Justifier à l'aide de données pertinentes et/ou par l'observation le choix d'un solvant de recristallisation et la quantité mise en œuvre.
Séchage d'un liquide.	Utiliser un desséchant solide et estimer correctement, par l'observation, la quantité à utiliser.

## 2.4. Analyses qualitatives et quantitatives

Au cours de la première année, l'étudiant·e acquiert la maîtrise de différentes techniques expérimentales mises en œuvre lors des analyses qualitatives et quantitatives pour identifier et caractériser une espèce chimique, en contrôler la pureté ou la doser. L'étudiant·e sait distinguer les méthodes d'analyse destructives et non destructives et développe progressivement la capacité à proposer une stratégie de mesures de concentrations ou de quantités de matière, une méthode de

caractérisation d'une espèce chimique, tenant compte des propriétés physico-chimiques du système étudié.

Les techniques utilisées lors des analyses qualitatives et quantitatives sont les suivantes : pH-métrie, conductimétrie, potentiométrie à intensité nulle, spectrophotométrie UV-visible, polarimétrie, réfractométrie, chromatographie sur couche mince.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>Caractérisation d'une espèce chimique et contrôle de sa pureté</b>	Proposer ou mettre en œuvre, à partir d'informations fournies, des tests qualitatifs préalables à l'élaboration d'un protocole.
Chromatographie sur couche mince.	Mettre en œuvre une chromatographie sur couche mince pour l'identification d'un produit et le suivi d'une transformation. Justifier le choix de la méthode de révélation utilisée. Interpréter l'ordre d'éluion des différentes espèces en relation avec leurs propriétés physico-chimiques et les caractéristiques de la phase stationnaire et de l'éluant.
Détermination expérimentale de grandeurs physiques ou spectroscopiques caractéristiques de l'espèce chimique (les principes théoriques de la RMN sont hors programme).	Extraire d'une banque de données des informations sur les propriétés physiques des produits. Mesurer une température de fusion. Mesurer un indice de réfraction. Mesurer un pouvoir rotatoire. Mesurer une absorbance. Déterminer un coefficient d'absorption molaire en spectroscopie UV-visible. Comparer les données tabulées aux valeurs mesurées et interpréter d'éventuels écarts. Comparer les caractéristiques d'un produit synthétisé avec celles du produit commercial. À partir d'une mesure appropriée, déterminer le rendement d'une synthèse, d'une méthode de séparation.
<b>Dosages par étalonnage</b>	Déterminer une concentration en exploitant la mesure de grandeurs physiques caractéristiques de l'espèce ou en construisant et en utilisant une courbe d'étalonnage. Déterminer une concentration ou une quantité de matière par spectrophotométrie UV-visible.
<b>Dosages par titrage</b> Titrages directs, indirects. Équivalence. Titrages simples, successifs, simultanés. Méthodes expérimentales de suivi d'un titrage : pH-métrie, conductimétrie, potentiométrie à intensité nulle, indicateurs de fin de titrage.	Identifier et exploiter la réaction support du titrage (recenser les espèces présentes dans le milieu au cours du titrage, repérer l'équivalence, justifier qualitativement l'allure de la courbe ou le changement de couleur ou d'aspect observé). Proposer ou justifier le protocole d'un titrage à l'aide de données fournies ou à rechercher. Mettre en œuvre un protocole expérimental correspondant à un titrage direct ou indirect. Choisir et utiliser un indicateur de fin de titrage.

Méthodes d'exploitation des courbes expérimentales.	Exploiter une courbe de titrage pour déterminer la quantité de matière, masse ou concentration de l'espèce titrée. Exploiter une courbe de titrage pour déterminer une valeur expérimentale d'une constante thermodynamique d'équilibre. Utiliser un logiciel de simulation pour tracer des courbes de distribution et confronter la courbe de titrage simulée à la courbe expérimentale. Justifier la nécessité d'effectuer un titrage indirect. Distinguer équivalence et repérage de fin de titrage.
<b>Suivi cinétique de transformations chimiques</b> Suivi de l'évolution temporelle d'une grandeur physique. Limitation de l'évolution temporelle (trempe) d'un système par dilution, transformation chimique ou refroidissement. Régulation de la température.	Choisir une méthode de suivi prenant en compte la facilité de mise en œuvre, les propriétés des espèces étudiées, la durée de la transformation estimée ou fournie. Exploiter les résultats d'un suivi temporel de concentration pour déterminer les caractéristiques cinétiques d'une réaction. Proposer et mettre en œuvre des conditions expérimentales permettant la simplification de la loi de vitesse. Déterminer une énergie d'activation.

## Contenus thématiques

Les contenus thématiques de la classe de PC complètent ceux introduits en PCSI en chimie sur la constitution et les transformations de la matière et en physique sur la thermodynamique et la mécanique quantique. Ils enrichissent des modèles déjà abordés et en introduisent de nouveaux tant à l'échelle microscopique que macroscopique : modèle quantique des atomes et des molécules, modèles de réacteurs ouverts, etc.

Tout au long des deux années, la formation en chimie privilégie la capacité de l'étudiant·e à raisonner, à prévoir et à transposer ses connaissances dans des situations nouvelles ou sur des espèces proches de celles étudiées, plutôt que sa capacité à restituer, à reproduire. Ainsi les programmes sont structurés autour des outils du raisonnement que sont les théories et les modèles de comportement macroscopique ou microscopique et non pas autour d'une présentation encyclopédique, systématique, des espèces chimiques et des réactions associées.

Il s'agit de montrer que la chimie est une science au sein de laquelle la dialectique entre savoirs et méthodes permet d'aborder des situations nouvelles et de construire de nouvelles connaissances en chimie mais aussi aux interfaces avec la biologie, la physique, les géosciences. Ainsi formés en chimie, les futur·es ingénieur·es ou chercheur·es scientifiques pourront être acteurs de l'innovation, que ce soit dans le cadre de la recherche, du développement et de la production industrielle pour relever les défis sociétaux et environnementaux à venir.

L'ordre de présentation des contenus proposé n'est pas nécessairement celui qui doit être adopté par l'enseignant·e qui dispose de toute liberté pour effectuer des choix et établir sa propre progression annuelle dont le seul objectif reste de permettre l'acquisition par tous les étudiant·es de l'ensemble des capacités exigibles. Un travail en collaboration avec l'enseignant·e de physique est vivement recommandé afin de favoriser les apprentissages sur les domaines communs abordés dans les deux disciplines. Par ailleurs, les contenus thématiques précisent les concepts et les

modèles à étudier : l'enseignant-e les aborde à partir de problématiques authentiques et les illustre par des applications concrètes et motivantes.

## **1. Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamique et cinétique**

- 1.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques
- 1.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques
- 1.3. Procédés industriels continus : aspects cinétiques et thermodynamiques
- 1.4. Changements de phase de corps purs et de mélanges binaires
- 1.5. Thermodynamique et cinétique des transformations modélisées par des réactions d'oxydo-réduction

## **2. Constitution de la matière : modélisation quantique et réactivité**

- 2.1. Orbitales atomiques
- 2.2. Orbitales moléculaires et réactivité
- 2.3. Constitution et réactivité des complexes

## **3. Transformations de la matière en chimie organique**

- 3.1. Conversion de groupes caractéristiques
- 3.2. Création de liaisons carbone-carbone

## **1. Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamique et cinétique**

Au laboratoire et dans l'industrie, l'innovation comme l'optimisation des techniques et des procédés de synthèse ou de séparation s'appuient sur des fondements thermodynamiques et cinétiques. La thermodynamique notamment permet de prévoir si la transformation envisagée est possible ou non et de trouver d'éventuelles pistes d'augmentation du rendement en faisant évoluer l'état d'équilibre final du système. Elle permet aussi d'appréhender les propriétés physico-chimiques des mélanges et d'envisager une voie d'accès aux corps purs.

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- appliquer les deux principes de la thermodynamique à la transformation physico-chimique ;
- aborder les changements d'échelle opérés dans les procédés industriels avec les transformations et effets thermiques mis en jeu dans des réacteurs continus ;
- utiliser les diagrammes isobares de mélanges binaires pour interpréter les techniques de séparation ;
- appliquer les notions de thermodynamique et de cinétique aux réactions d'oxydo-réduction mises en jeu dans les piles et les électrolyseurs.

À travers les contenus et les capacités exigibles, sont développées des compétences qui pourront être, par la suite, valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

- faire preuve de rigueur dans la définition et la description d'un système physico-chimique ;
- modéliser un système réel ;
- distinguer modélisation d'une transformation (réaction et écriture de l'équation de réaction) et description quantitative de l'évolution d'un système prenant en compte les conditions expérimentales choisies pour réaliser la transformation ;
- établir un bilan thermique ;
- confronter des grandeurs calculées ou tabulées à des mesures expérimentales ;
- pratiquer un raisonnement qualitatif ou quantitatif à partir de représentations graphiques.

## 1.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques

L'étude des transferts thermiques, abordée en première année dans le cadre du cours de physique relatif à la transformation du corps pur, est ici généralisée aux transformations physico-chimiques isobares. Les enthalpies standard de réaction sont considérées comme indépendantes de la température.

Les notions et contenus sont illustrés à travers des applications liées à la vie quotidienne (contenu calorique des aliments, PCI et PCS des carburants, etc.), à la recherche (apports des techniques calorimétriques modernes, etc.) ou au domaine industriel. Un prolongement est proposé dans le cadre de l'étude thermique au sein des réacteurs continus dans la partie portant sur les procédés industriels.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<p>État standard.</p> <p>Enthalpie standard de réaction.</p> <p>Loi de Hess.</p> <p>État standard de référence d'un élément, enthalpie standard de formation.</p> <p>Enthalpie standard de dissociation de liaison.</p>	<p>Déterminer une enthalpie standard de réaction à l'aide de données thermodynamiques.</p>
<p>Effets thermiques lors d'une transformation monobare :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- transfert thermique associé à la transformation chimique monobare monotherme ;</li> <li>- variation de température lors d'une transformation monobare et adiabatique.</li> </ul>	<p>Prévoir le sens et calculer la valeur du transfert thermique entre un système, siège d'une transformation physico-chimique monobare et monotherme, et le milieu extérieur.</p> <p>Évaluer la température atteinte par un système siège d'une transformation physico-chimique, monobare et adiabatique.</p> <p><b>Capacité numérique :</b> tracer, à l'aide d'un langage de programmation, l'évolution temporelle de la température pour un système siège d'une transformation adiabatique modélisée par une seule réaction chimique dont les caractéristiques cinétiques et l'enthalpie standard de réaction sont données.</p> <p><b>Déterminer une enthalpie standard de réaction.</b></p>

## 1.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques

Le critère d'évolution spontanée d'un système, utilisé dès la première année en chimie, est démontré par application du second principe de la thermodynamique introduit en physique en première année.

On adopte pour les potentiels chimiques une expression générale :  $\mu_i = \mu_i^{\text{réf}} + RT \times \ln(a_i)$  qui fait référence aux activités  $a_i$  introduites en première année. L'influence de la pression sur le potentiel chimique d'une espèce en phase condensée est illustrée à travers le phénomène d'osmose.

Les transformations physico-chimiques envisagées sont des transformations isobares. Pour le calcul des grandeurs standard de réaction, les enthalpies et entropies standard de réaction sont supposées indépendantes de la température. Les capacités numériques abordées en PCSI pour déterminer l'état final d'un système dont la transformation est modélisée par une ou deux réactions peuvent être réactivées.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Chimie PC

En première année, la relation d'Arrhenius a permis de modéliser, au niveau macroscopique, l'évolution de la constante de vitesse d'une réaction chimique avec la température et a introduit la notion d'énergie d'activation qui suggère qu'un système doit surmonter une barrière énergétique pour réagir ; cette modélisation empirique n'a nécessité aucune connaissance microscopique sur l'évolution du système et sur le mécanisme réactionnel. La théorie du complexe activé (état de transition) repose sur un modèle microscopique (dont les hypothèses ne sont pas abordées) et permet de relier les propriétés d'un système réactif à la constante de vitesse de réaction à travers la relation d'Eyring (non démontrée) dont l'expression est analogue à celle de la relation d'Arrhenius. La constante de vitesse est ainsi reliée aux enthalpie et entropie standard d'activation, définies en considérant les différences de ces grandeurs entre état de transition et état réactif.

Problématiques, illustrations et applications sont choisies dans le domaine industriel (optimisation d'une synthèse, traitement d'une eau par procédés osmotiques, etc.), en biologie (ATP et réactions couplées, respiration, etc.), et en géosciences (sédimentation, concrétions calcaires, etc.), mais aussi au niveau du laboratoire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<p>Identités thermodynamiques ; potentiel chimique.</p> <p>Entropie, entropie molaire standard absolue.</p> <p>Enthalpie libre.</p>	<p>Écrire les identités thermodynamiques pour les fonctions <math>U</math>, <math>H</math> et <math>G</math>.</p> <p>Distinguer et justifier le caractère intensif ou extensif des grandeurs physiques utilisées.</p> <p>Interpréter qualitativement une variation d'entropie en termes de nombre de micro-états accessibles.</p>
<p>Potentiel chimique dans le cas modèle des gaz parfaits : <math>\mu_i = \mu_i^\circ(T) + RT \times \ln(p_i/p^\circ)</math></p> <p>Potentiel chimique <math>\mu_i = \mu_i^{\text{réf}} + RT \times \ln a_i</math> dans les cas modèles de :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- espèces chimiques en phase condensée en mélange idéal ;</li> <li>- solutés infiniment dilués.</li> </ul> <p>Influence de la pression sur <math>\mu_i^{\text{réf}}</math> pour des espèces en phase condensée.</p>	<p>Établir l'expression du potentiel chimique dans le cas modèle des gaz parfaits purs.</p> <p>Utiliser le potentiel chimique pour prévoir l'évolution d'un système contenant une espèce chimique dans plusieurs phases.</p> <p>Exprimer l'enthalpie libre d'un système chimique en fonction des potentiels chimiques.</p> <p>Déterminer une variation d'enthalpie libre, d'enthalpie et d'entropie entre deux états du système chimique.</p>
<p>Osmose, pression osmotique d'une solution.</p>	<p>Utiliser le potentiel chimique pour interpréter le transfert d'un solvant au travers d'une membrane.</p> <p>Relier la pression osmotique à la différence de potentiel chimique du solvant dans les deux phases.</p>
<p>Enthalpie de réaction, entropie de réaction, enthalpie libre de réaction ; grandeurs standard associées.</p> <p>Relation entre enthalpie libre de réaction et quotient de réaction.</p> <p>Équilibre physico-chimique.</p> <p>Constante thermodynamique d'équilibre ; relation de van't Hoff.</p>	<p>Justifier qualitativement ou prévoir le signe de l'entropie standard de réaction.</p> <p>Relier enthalpie libre de réaction et création d'entropie lors d'une transformation d'un système physico-chimique.</p> <p>Prévoir le sens d'évolution d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de l'enthalpie libre de réaction.</p>

<p>Relation entre enthalpie libre de réaction, constante thermodynamique d'équilibre et quotient de réaction.</p>	<p>Déterminer une grandeur standard de réaction à l'aide de données thermodynamiques et de la loi de Hess.</p> <p>Déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre à une température quelconque.</p> <p>Déterminer la composition chimique d'un système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une ou plusieurs réactions chimiques.</p> <p><b>Capacité numérique :</b> tracer, à l'aide d'un langage de programmation, le taux d'avancement à l'équilibre en fonction de la température pour un système siège d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction.</p>
<p>Nombre de degrés de liberté d'un système physico-chimique à l'équilibre ; variance.</p>	<p>Reconnaître si une grandeur intensive est ou non un facteur d'équilibre.</p> <p>Dénombrer les degrés de liberté d'un système à l'équilibre et interpréter le résultat.</p>
<p>Enthalpie libre standard d'activation, enthalpie standard d'activation, entropie standard d'activation.</p>	<p>Déterminer une enthalpie standard ou une entropie standard d'activation à partir de données cinétiques, la relation d'Eyring étant fournie.</p> <p>Relier l'entropie standard d'activation aux contraintes dans l'état de transition.</p> <p>Interpréter l'action d'un catalyseur à l'aide de données sur les enthalpies et entropies standard d'activation.</p>

### 1.3. Procédés industriels continus : aspects cinétiques et thermodynamiques

Les transformations chimiques de la matière réalisées au laboratoire mettent en jeu de faibles quantités de matière et sont conduites en réacteur fermé. À l'échelle industrielle, les transformations mettent en jeu des quantités de matière beaucoup plus élevées et sont souvent conduites en réacteur ouvert pour assurer un fonctionnement continu.

Les chimistes peuvent être amenés à transposer à l'échelle industrielle un protocole élaboré au laboratoire.

L'objectif de cette partie est un réinvestissement de connaissances acquises en cinétique et en thermodynamique dans le cadre d'une initiation aux bilans de matière et aux bilans thermiques effectués sur des réacteurs ouverts continus.

L'étude des opérations unitaires s'inscrit dans le prolongement de la mécanique des fluides en physique, et, en chimie, de la cinétique en réacteur fermé et de la thermodynamique, domaines qui sont à la base du génie des procédés et de la technologie chimique.

Les modèles de réacteurs continus idéaux étudiés sont transposables aux réacteurs microfluidiques, mais également en biologie et en géosciences.

Sensibiliser les étudiant·es aux enjeux spécifiques du secteur industriel est un élément majeur de leur formation. Des procédés chimiques innovants s'imposent pour développer des techniques et des appareils adaptés permettant d'obtenir des rendements supérieurs à ceux des procédés conventionnels, tout en limitant leurs impacts environnementaux, en mettant au point des procédés

plus sûrs, moins consommateurs d'énergie, de matières premières et de solvants et également moins polluants.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>D'un protocole de laboratoire à un procédé industriel</b>	
<p>Opérations unitaires d'un procédé.</p> <p>Procédés discontinus.</p> <p>Procédés continus en régime stationnaire : débit de matière en masse et en quantité de matière, bilan de matière.</p>	<p>Exploiter un schéma de procédé légendé.</p> <p>Identifier un procédé continu ou discontinu.</p> <p>Effectuer un bilan de matière global ou sur une seule espèce pour une opération unitaire d'un procédé continu de caractéristiques données.</p>
<b>Cinétique de transformations en réacteur chimique ouvert</b>	
<p>Modèle du réacteur parfaitement agité continu en régime stationnaire dans le cas d'un écoulement de débits en volume égaux à l'entrée et à la sortie ; dimensionnement du réacteur.</p> <p>Taux de conversion d'un réactif.</p> <p>Temps de passage.</p>	<p>Effectuer un bilan de matière pour un réacteur parfaitement agité continu.</p> <p>Relier le taux de conversion du réactif au temps de passage pour une transformation modélisée par une réaction de loi de vitesse donnée.</p> <p>Estimer le dimensionnement d'un réacteur parfaitement agité continu pour un taux de conversion et un débit de matière donnés.</p>
<p>Modèle du réacteur chimique en écoulement piston isotherme en régime stationnaire dans le cas de débits en volume égaux à l'entrée et à la sortie du réacteur ; dimensionnement du réacteur.</p>	<p>Établir un bilan de matière pour un réacteur en écoulement piston.</p> <p>Relier le taux de conversion en sortie d'un réacteur en écoulement piston et le temps de passage pour une transformation modélisée par une loi de vitesse d'ordre 1.</p> <p>Estimer le dimensionnement d'un réacteur en écoulement piston pour un taux de conversion et un débit de matière donné.</p>
<b>Étude thermique d'un réacteur chimique ouvert</b>	
<p>Bilan énergétique sur un réacteur parfaitement agité continu en régime stationnaire dans le cas de débits en volume égaux à l'entrée et à la sortie.</p> <p>Sécurité des réacteurs : flux thermique et régulation de température.</p>	<p>Effectuer un bilan énergétique sur un réacteur parfaitement agité continu en régime stationnaire.</p> <p>Déterminer la température de fonctionnement d'un réacteur parfaitement agité continu de caractéristiques données dans l'hypothèse d'une transformation adiabatique.</p> <p>Déterminer le flux thermique échangé par un réacteur parfaitement agité dans des conditions de fonctionnement données.</p> <p><b>Capacité numérique :</b> à l'aide d'un langage de programmation, déterminer le(s) point(s) de fonctionnement (température et taux de conversion) d'un réacteur parfaitement agité continu siège d'une transformation modélisée par une réaction unique et en discuter la stabilité.</p>

#### 1.4. Changements de phase de corps purs et de mélanges binaires

L'étude des changements de phase de corps purs et de mélanges binaires s'effectue à l'aide de diagrammes isobares construits à partir des courbes d'analyse thermique ou fournis. Les tracés théoriques ne sont pas attendus. Ces diagrammes sont utilisés pour interpréter les techniques de distillations.

L'enseignant·e choisit des exemples concrets relatifs à des problématiques rencontrées au laboratoire et à des procédés industriels.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<p>Corps pur, mélange, système binaire, fractions molaire et massique.</p> <p>Miscibilité totale, partielle ou nulle.</p>	<p>Convertir des fractions molaires en fractions massiques dans le cas de systèmes binaires et inversement.</p> <p>Interpréter la miscibilité à l'échelle microscopique par les interactions entre entités.</p> <p>Citer la température comme facteur d'influence de la miscibilité.</p>
<p>Diagrammes isobares d'équilibre liquide-vapeur :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- avec miscibilité totale à l'état liquide,</li> <li>- avec miscibilité nulle à l'état liquide,</li> <li>- avec miscibilité partielle à l'état liquide.</li> </ul> <p>Théorème des moments chimiques.</p>	<p>Construire un diagramme isobare d'équilibre entre phases d'un mélange binaire à partir d'informations relatives aux courbes d'analyse thermique.</p> <p>Décrire les caractéristiques des mélanges homoazéotropes, hétéroazéotropes.</p> <p>Exploiter les diagrammes isobares d'équilibre entre phases, pour une composition en fraction molaire ou massique donnée :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- tracer l'allure de la courbe d'analyse thermique en indiquant le nombre de degrés de liberté du système sur chaque partie de la courbe ;</li> <li>- déterminer les températures de début et de fin de changement d'état ;</li> <li>- déterminer la composition des phases en présence à une température fixée ainsi que les quantités de matière ou les masses dans chaque phase.</li> </ul> <p>Déterminer la solubilité d'une des espèces chimiques du système binaire dans l'autre à partir du diagramme binaire.</p>
<p>Distillations.</p>	<p>Interpréter une distillation simple, une hydrodistillation, une distillation fractionnée, à l'aide des diagrammes isobares d'équilibre liquide-vapeur.</p> <p><b>Mettre en œuvre une distillation fractionnée ou une hydrodistillation à la pression atmosphérique.</b></p>

## 1.5. Thermodynamique et cinétique des transformations modélisées par des réactions d'oxydo-réduction

L'importance des systèmes électrochimiques se manifeste dans la diversité de leurs applications : accumulateurs et procédés d'électrosynthèse mettent en jeu la conversion d'énergie électrique en énergie chimique, des capteurs électrochimiques sont utilisés dans l'analyse de l'eau, de l'air ou d'effluents, la protection contre la corrosion est un enjeu sociétal important, etc.

L'étude thermodynamique et cinétique des réactions d'oxydo-réduction développée dans cette partie se fonde sur les acquis de cinétique chimique et sur l'étude des réactions d'oxydo-réduction et des piles débutée en première année, ainsi que sur la partie de thermodynamique chimique de seconde année.

L'approche de l'électrochimie proposée ici privilégie les raisonnements qualitatifs et les aspects expérimentaux, plutôt que les développements théoriques et mathématisés. Les courbes courant-potential, dont le tracé est proposé en capacité expérimentale, sont un outil essentiel dans la compréhension et la modélisation des systèmes électrochimiques. L'étude d'une électrolyse complète les capacités expérimentales sur les piles développées en première année.

L'écart entre le potentiel d'une électrode et son potentiel d'équilibre est appelé surpotential plutôt que surtension pour des raisons pédagogiques, en cohérence avec le vocabulaire anglo-saxon correspondant.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction</b>	
Relation entre enthalpie libre de réaction et potentiels de Nernst des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.	Citer et exploiter la relation entre l'enthalpie libre de réaction et les potentiels de Nernst des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.
Relation entre enthalpie libre standard de réaction et potentiels standard des couples impliqués.	Déterminer l'enthalpie libre standard d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples mis en jeu.  Déterminer la valeur du potentiel standard d'un couple d'oxydo-réduction à partir de données thermodynamiques (constantes d'équilibre, potentiels standard).
Approche thermodynamique du fonctionnement d'une pile électrochimique.	Relier tension à vide d'une pile et enthalpie libre de réaction.  Décrire et expliquer le fonctionnement d'une pile électrochimique à partir de données sur sa constitution et de tables de potentiels standard.
<b>Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction</b>	
<b>Courbes courant-potential sur une électrode en régime stationnaire :</b>  <ul style="list-style-type: none"> <li>- surpotential,</li> <li>- systèmes rapides et systèmes lents,</li> <li>- nature de l'électrode,</li> <li>- courant limite de diffusion,</li> <li>- vagues successives,</li> <li>- domaine d'inertie électrochimique du solvant.</li> </ul>	Relier vitesse de réaction électrochimique et intensité du courant.  Identifier les espèces électroactives pouvant donner lieu à une limitation en courant par diffusion.  Relier, qualitativement ou quantitativement, l'intensité du courant limite de diffusion à la concentration du réactif, au nombre d'électrons échangés et à la surface immergée de l'électrode.

Notions et contenus	Capacités exigibles
	<p>Tracer l'allure de courbes courant-potentiel à partir de données fournies.</p> <p>Identifier les paramètres d'influence du domaine d'inertie électrochimique du solvant.</p>
<p><b>Utilisation des courbes courant-potentiel</b></p> <p>Transformations spontanées :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- notion de potentiel mixte,</li> <li>- fonctionnement d'une pile électrochimique.</li> </ul>	<p><b>Tracer et utiliser des courbes courant-potentiel.</b></p> <p>Reconnaitre une transformation spontanée et étudier qualitativement sa vitesse à partir de courbes courant-potentiel données.</p> <p>Utiliser les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'une pile électrochimique et prévoir la valeur de la tension à vide.</p> <p>Citer les paramètres influençant la résistance interne d'une pile.</p>
<p>Transformations forcées : électrolyse, recharge d'un accumulateur.</p>	<p><b>Mettre en œuvre une électrolyse.</b></p> <p>Utiliser les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'un dispositif siège d'une électrolyse et prévoir la valeur de la tension minimale à imposer.</p> <p>Utiliser les courbes courant-potentiel pour justifier la nécessité :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- de purifier une solution électrolytique avant l'électrolyse,</li> <li>- de choisir les électrodes permettant de réaliser l'électrolyse voulue.</li> </ul> <p>Déterminer un rendement faradique à partir d'informations fournies concernant le dispositif étudié.</p> <p>Déterminer la masse de produit formé pour une durée et des conditions données d'électrolyse.</p> <p>Citer les paramètres influençant la résistance interne du dispositif siège d'une électrolyse.</p>
<p>Stockage et conversion d'énergie chimique.</p>	<p>Identifier piles, électrolyseurs et accumulateurs comme des dispositifs mettant en jeu des conversions entre énergie chimique et énergie électrique.</p>

## 2. Constitution de la matière : modélisation quantique et réactivité

La catalyse par les complexes des métaux de transition trouve de très nombreuses applications comme par exemple la réaction de Heck en chimie fine, la carbonylation du méthanol en chimie industrielle, les processus de respiration et de photosynthèse en chimie du vivant. Elle s'inscrit dans la démarche vertueuse de la chimie éco-responsable et permet notamment des synthèses dans des conditions douces. La compréhension de ces systèmes catalytiques nécessite l'analyse de la structure électronique des complexes par l'utilisation des orbitales atomiques et moléculaires.

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Chimie PC

Ces nouveaux modèles de description de la matière à l'échelle microscopique complètent la description des entités moléculaires abordée en première année, en s'appuyant sur la notion de fonction d'onde introduite dans le programme de physique de PCSI. L'objectif de cette description microscopique est l'interprétation et la prévision de la réactivité dans le cadre de l'approximation des orbitales frontalières.

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- construire des diagrammes d'orbitales moléculaires ou les interpréter en vue de la prévision de la réactivité d'une entité chimique ;
- interpréter des propriétés des complexes de métaux de transition et l'utilisation de ces complexes comme catalyseurs ou éléments structurants.

### 2.1. Orbitales atomiques

La modélisation quantique de l'atome a été abordée en première année dans le cadre du cours de physique au travers des concepts de fonction d'onde et de quantification de l'énergie, ainsi que du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène. Ces premiers éléments sont ici réinvestis pour construire le modèle quantique de l'atome d'hydrogène et des atomes polyélectroniques. Aucune détermination d'expression analytique d'une fonction d'onde n'est attendue.

Cette partie est par ailleurs l'occasion de relier la construction du tableau périodique des éléments, utilisé depuis le lycée, à la modélisation quantique de l'atome et de compléter la description de l'organisation de cet outil essentiel pour les chimistes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<p>Fonctions d'onde électroniques <math>\psi</math> de l'atome d'hydrogène.</p> <p>Nombres quantiques <math>n, l, m_l, m_s</math>.</p> <p>Énergie et rayon associés à une fonction d'onde.</p>	<p>Interpréter <math> \psi ^2</math> comme la densité de probabilité de présence d'un électron en un point et la relier à la densité de charge.</p> <p>Prévoir qualitativement, pour l'atome d'hydrogène et les ions hydrogénoïdes, l'évolution du rayon et de l'énergie associés à une fonction d'onde en fonction du nombre quantique principal.</p>
<p>Orbitales des atomes polyélectroniques, représentation schématique.</p> <p>Configuration électronique d'un atome et d'un ion monoatomique.</p> <p>Électrons de cœur et de valence.</p>	<p>Dessiner l'allure des orbitales atomiques s et p.</p> <p>Établir la configuration électronique d'un atome ou d'un ion à l'état fondamental.</p> <p>Déterminer le nombre d'électrons non appariés d'un atome dans son état fondamental.</p>
<p>Notion qualitative de charge effective.</p> <p>Électronégativité.</p> <p>Rayon d'une orbitale atomique, polarisabilité.</p>	<p>Relier qualitativement le rayon associé à une orbitale atomique à la charge effective.</p> <p>Relier qualitativement l'énergie associée à une orbitale atomique à l'électronégativité de l'atome.</p> <p>Relier qualitativement le rayon associé aux orbitales de valence d'un atome à sa polarisabilité.</p>
<p>Architecture du tableau périodique des éléments.</p> <p>Organisation par blocs.</p>	<p>Relier la position d'un élément dans le tableau périodique à la configuration électronique de l'atome associé dans son état fondamental.</p>

Situer dans le tableau les familles suivantes : métaux alcalins et alcalino-terreux, halogènes et gaz nobles.

## 2.2. Orbitales moléculaires et réactivité

La construction des diagrammes d'orbitales moléculaires est limitée aux cas des molécules diatomiques  $A_2$  ou AB, sans mélange d'orbitales s et p. En revanche, les diagrammes d'interaction impliquant trois orbitales ou plus ne sont pas à construire mais sont fournis à l'étudiant-e qui doit pouvoir les interpréter : remplissage des niveaux, identification des orbitales frontalières HO et BV, analyse du caractère liant, antiliant ou non liant d'une orbitale moléculaire.

De même, la construction des diagrammes d'orbitales moléculaires de systèmes plus complexes est hors programme ; l'étudiant-e interprète ces diagrammes à partir des propriétés de deux fragments en interaction dont les orbitales sont fournies.

Dans le but de disposer de modèles simples applicables en chimie organique, l'approximation des orbitales frontalières permet de prévoir la réactivité électrophile ou nucléophile des entités mises en jeu ; ce modèle complète l'étude de l'addition nucléophile et de la substitution nucléophile abordées en première année. Ces orbitales peuvent être obtenues grâce à des logiciels ou à partir de bases de données.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<p><b>Construction des orbitales moléculaires</b></p> <p>Méthode de Combinaison Linéaire des Orbitales Atomiques.</p> <p>Interaction de deux orbitales atomiques sur deux centres :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- recouvrement ;</li> <li>- orbitales liante, antiliante, non liante ;</li> <li>- énergie d'une orbitale moléculaire ;</li> <li>- orbitale <math>\sigma</math>, orbitale <math>\pi</math> ;</li> <li>- représentation conventionnelle d'une orbitale moléculaire par schématisation graphique de la combinaison linéaire des orbitales atomiques.</li> </ul> <p>Interaction d'orbitales de fragments.</p> <p>Diagramme d'orbitales moléculaires : occupation des niveaux, orbitales frontalières haute occupée et basse vacante, cas des entités radicalaires.</p> <p>Ordre de liaison dans les molécules diatomiques.</p>	<p>Identifier les conditions d'interaction de deux orbitales atomiques : recouvrement et critère énergétique.</p> <p>Construire des orbitales moléculaires de molécules diatomiques par interaction d'orbitales atomiques du même type (s-s, p-p).</p> <p>Reconnaître le caractère liant, antiliant, non liant d'une orbitale moléculaire à partir de sa représentation conventionnelle ou d'une surface d'iso-densité.</p> <p>Identifier la symétrie <math>\sigma</math> ou <math>\pi</math> d'une orbitale moléculaire à partir de sa représentation conventionnelle ou d'une surface d'iso-densité.</p> <p>Proposer une représentation conventionnelle d'une orbitale moléculaire tenant compte d'une éventuelle dissymétrie du système.</p> <p>Justifier la dissymétrie d'une orbitale moléculaire obtenue par interaction d'orbitales atomiques centrées sur des atomes d'éléments différents.</p> <p>Prévoir ou interpréter l'ordre énergétique des orbitales moléculaires et établir qualitativement un diagramme énergétique d'orbitales d'une molécule diatomique.</p> <p>Justifier l'existence d'interactions entre orbitales de fragment en termes de recouvrement ou d'écart d'énergie.</p>

	<p>Décrire l'occupation des niveaux d'un diagramme d'orbitales moléculaires.</p> <p>Identifier les orbitales frontalières à partir d'un diagramme d'orbitales moléculaires de valence fourni.</p> <p>Interpréter un diagramme d'orbitales moléculaires obtenu par interaction des orbitales de deux fragments, fournies.</p> <p>Relier, dans une molécule diatomique, l'évolution des caractéristiques de la liaison à l'évolution de l'ordre de liaison.</p>
<p><b>Prévision de la réactivité</b></p> <p>Approximation des orbitales frontalières.</p>	<p>Utiliser les orbitales frontalières pour prévoir la réactivité nucléophile ou électrophile d'une entité (molécule ou ion).</p> <p>Interpréter l'addition nucléophile sur le groupe carbonyle et la substitution nucléophile en termes d'interactions frontalières.</p> <p>Comparer la réactivité de deux entités à l'aide des orbitales frontalières.</p>

### 2.3. Constitution et réactivité des complexes

L'étude de la structure des complexes est limitée à l'interprétation de la liaison entre l'atome central et le ligand par l'interaction entre une orbitale d d'une entité du bloc d et une orbitale d'un ligand  $\sigma$ -donneur ou d'un ligand ayant des effets  $\pi$ , par une démarche identique à celle développée dans la partie « Orbitales moléculaires et réactivité ». Les représentations des orbitales d ne sont pas exigibles et doivent être fournies. La construction complète du diagramme d'orbitales moléculaires d'un complexe et la levée partielle de dégénérescence des orbitales d sont hors-programme.

Les complexes constituent des systèmes très importants à la fois dans le domaine industriel où ils interviennent dans les procédés de séparation, de dépollution et en catalyse, ainsi que dans celui du vivant au travers des métalloenzymes intervenant dans des processus biologiques. L'étude de la stabilité des complexes prolonge la partie du programme de première année sur les transformations chimiques en solution aqueuse et permet un réinvestissement des capacités correspondantes : utilisation de données thermodynamiques, prévision de l'état final d'un système modélisé par une seule réaction, interprétation d'observations. Elle permet aussi la mise en œuvre de concepts de thermodynamique, d'oxydo-réduction et de chimie orbitale.

Pour l'étude de la stabilité des complexes en solution aqueuse, les équations des réactions correspondant aux formations et dissociations ne sont pas exigibles et sont fournies. Les transformations abordées sont modélisées par une seule réaction : les problématiques liées à des phénomènes de complexations successives sont donc hors-programme.

Les complexes peuvent être utilisés comme catalyseurs, par exemple pour des hydrogénations et des polymérisations. Aucun cycle catalytique n'est exigible, mais les étapes d'un cycle fourni doivent être reconnues par l'étudiant·e. Le formalisme de Green est hors-programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>Structure des complexes</b>	Reconnaitre le(s) site(s) de coordination d'un

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Chimie PC

<p>Modélisation de la liaison dans un complexe entre une entité du bloc <math>d</math> et un ligand <math>\sigma</math>-donneur intervenant par une seule orbitale.</p>	<p>ligand à partir d'un schéma de Lewis.</p> <p>Établir qualitativement le diagramme d'interaction entre une orbitale d'une entité du bloc <math>d</math> et une orbitale d'un ligand <math>\sigma</math>-donneur.</p> <p>Prévoir qualitativement l'influence de l'énergie de l'orbitale de l'entité du bloc <math>d</math> sur la stabilisation des électrons du ligand par la complexation.</p>
<p><b>Stabilité des complexes métalliques en solution aqueuse</b></p> <p>Constantes de formation et de dissociation.</p> <p>Diagramme de prédominance en fonction de <math>pL</math>.</p> <p>Effet chélate.</p>	<p>Extraire, de ressources disponibles, les données thermodynamiques pertinentes pour prévoir qualitativement l'état final d'un système siège d'une unique réaction de complexation ou pour interpréter des observations expérimentales.</p> <p>Utiliser les diagrammes de prédominance pour prévoir des espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires.</p> <p>Retrouver les valeurs de constantes thermodynamiques d'équilibre par lecture de courbes de distribution et de diagrammes de prédominance (et réciproquement).</p> <p>Interpréter, à l'aide du modèle orbitalaire, des différences de valeurs de constante de formation de différents complexes.</p> <p>Interpréter l'évolution du caractère oxydant ou réducteur d'une entité par complexation.</p> <p>Interpréter l'effet d'un ligand polydenté sur la constante de formation d'un complexe.</p> <p><b>Préparer, analyser, caractériser ou déterminer la constante de formation d'un complexe d'une entité du bloc <math>d</math>.</b></p> <p><b>Mettre en œuvre une réaction de complexation pour réaliser une analyse qualitative ou quantitative en solution aqueuse.</b></p>
<p><b>Activité catalytique des complexes ; cycles catalytiques</b></p> <p>Ligands <math>\pi</math>-donneurs et <math>\pi</math>-accepteurs.</p> <p>Coordination des systèmes <math>\pi</math> non délocalisés.</p>	<p>Reconnaître un ligand ayant des effets <math>\pi</math> à partir de la donnée de ses orbitales de valence.</p> <p>Identifier les interactions orbitalaires principales entre une entité du bloc <math>d</math> et un alcène, le monoxyde de carbone et le dihydrogène.</p> <p>Interpréter la modification de réactivité d'un alcène, du monoxyde de carbone et du dihydrogène par les phénomènes électroniques mis en jeu lors de leur coordination.</p>
<p>Cycles catalytiques :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- étapes d'association et de dissociation, d'addition oxydante et</li> </ul>	<p>Établir l'équation de la réaction catalysée à partir de la donnée d'un cycle catalytique.</p>

<p>d'élimination réductrice, d'insertion et d'élimination ;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- catalyseurs et précurseurs de catalyseur.</li> </ul> <p>Hydrogénation en catalyse homogène.</p> <p>Polymérisation des alcènes par coordination.</p>	<p>Reconnaître la nature d'une étape dans un cycle catalytique.</p> <p>Proposer un ou des produits plausibles d'une étape d'un cycle dont les réactifs sont donnés.</p> <p>Identifier la nature des étapes intervenant lors de l'hydrogénation en catalyse homogène et de la polymérisation des alcènes par coordination, les cycles catalytiques étant fournis.</p> <p>Proposer une structure pour la macromolécule vinylique linéaire obtenue par polymérisation d'un alcène donné.</p> <p>Déterminer la structure de l'alcène permettant de synthétiser une macromolécule vinylique linéaire donnée.</p>
--	---

### 3. Transformations de la matière en chimie organique

Médicaments, produits phytosanitaires, matériaux polymères de synthèse aussi différents que les latex de peinture ou les boucliers thermiques des véhicules spatiaux : ces synthèses en chimie fine ou en productions de fort tonnage découlent d'une démarche d'ingénierie moléculaire s'appuyant entre autres sur les apports de la chimie organique. L'élaboration, l'identification et la caractérisation des structures et la prévision de la réactivité des entités relèvent de méthodes fondamentales dont les principes sont abordés dans les programmes de chimie des deux années.

Le programme de seconde année s'inscrit dans la continuité de celui de première année et poursuit les objectifs suivants :

- s'approprier la logique de la synthèse organique grâce aux compléments de formation relatifs aux conversions de groupes caractéristiques et à la création de liaison carbone-carbone ;
- consolider et compléter les connaissances des mécanismes fondamentaux et les capacités relatives à leur écriture à l'aide du formalisme des flèches courbes et des orbitales moléculaires.

L'enseignement de la chimie organique s'appuie sur les connaissances et capacités nouvellement acquises en thermodynamique et cinétique chimiques et exploite les modèles orbitaux de description des structures et de la réactivité, introduits dans la partie « Constitution de la matière : modélisation quantique et réactivité ». L'utilisation des orbitales frontalières permet la prévision des géométries d'approche des réactifs et, dans le cas où l'évolution du système est sous contrôle frontalière, la prévision de la structure du produit majoritaire dans la transformation. Les orbitales moléculaires sont systématiquement fournies aux étudiant·es. Le tableau à la fin de ce préambule et précédant le paragraphe 3.1, comporte des notions et capacités exigibles transversales et communes à toutes les transformations abordées dans les parties 3.1 et 3.2.

L'approche retenue privilégie l'aspect mécanistique et la stratégie de synthèse et non une présentation monographique, ceci afin de favoriser le raisonnement et la transférabilité dans des situations analogues, mais l'enseignant·e dispose de sa liberté pédagogique pour construire la progression de son choix.

Le programme de seconde année poursuit la volonté du programme de première année d'amener les étudiant·es à conduire une véritable réflexion sur la stratégie de synthèse : identification des groupes caractéristiques mis en jeu, analyse de la réactivité comparée des entités, interprétation de la nature et de l'ordre des étapes mises en œuvre dans le cas d'une synthèse multi-étapes, analyse des choix expérimentaux.

L'élaboration d'une synthèse multi-étapes par les étudiant·es eux-mêmes peut se faire en autonomie à l'aide d'une banque de réactions fournie ou à l'aide des réactions qui figurent explicitement au

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Chimie PC

programme. Les réactions indiquées dans la colonne de gauche doivent être connues et seuls les mécanismes explicitement inscrits sont exigibles et doivent pouvoir être écrits sans information supplémentaire. Pour ce qui concerne les propriétés acido-basiques, une table de  $pK_a$  sera systématiquement fournie.

Le cours et les activités s'appuient sur des exemples issus aussi bien des domaines de la chimie fine, de la chimie du vivant et de la chimie industrielle et permettent une sensibilisation aux principes de la chimie éco-responsable. À travers les capacités et contenus exigibles, sont développées des compétences générales qui pourront par la suite être réinvesties, consolidées et valorisées, parmi lesquelles :

- choisir le ou les modèle(s) pertinent(s) de description géométrique, électronique ou orbitale d'une entité pour rendre compte de sa réactivité ;
- utiliser des modèles de prédiction de l'évolution du système dans le cadre des transformations proposées ;
- pratiquer un raisonnement par analogie (analyse de réactivités et écriture de mécanismes) ;
- proposer une stratégie de synthèse à l'aide d'une banque de réactions ou des réactions au programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<p>Familles fonctionnelles en chimie organique.</p> <p>Aspects thermodynamiques et cinétiques des transformations de la matière en chimie organique.</p> <p>Sites électrophiles et nucléophiles des réactifs.</p> <p>Modélisation de la géométrie des approches des réactifs.</p>	<p>Identifier dans une entité donnée les familles fonctionnelles suivantes : alcène, alcyne, halogénoalcane, alcool, ester sulfonique, 1,2-diol, éther-oxyde, époxyde, hémiacétal, acétal, amine, aldéhyde, cétone, acide carboxylique, ester, amide, chlorure d'acyle, anhydride d'acide.</p> <p>Discuter des aspects thermodynamiques et cinétiques des transformations effectuées à l'aide de données tabulées et de résultats expérimentaux.</p> <p>Identifier les sites électrophiles et nucléophiles des réactifs à l'aide de leurs structures de Lewis ou de leurs orbitales frontalières.</p> <p>Prévoir ou justifier la géométrie privilégiée d'approche de réactifs à partir de leurs orbitales frontalières fournies.</p>
<p>Synthèses organiques au laboratoire.</p>	<p><b>Conduire des synthèses, des purifications, des caractérisations et des analyses de la pureté de produits à l'aide de protocoles donnés.</b></p> <p><b>Proposer ou adapter un protocole expérimental permettant de réaliser une synthèse organique à partir de données fournies.</b></p> <p><b>Analyser et justifier les choix expérimentaux dans une synthèse organique.</b></p>

### 3.1. Conversion de groupes caractéristiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
<p><b>Additions électrophiles sur les doubles liaisons carbone-carbone</b></p> <p>Hydratation en milieu acide : conditions expérimentales, régiosélectivité, réactivité comparée des alcènes, mécanisme limite.</p> <p>Hydroboration d'une double liaison carbone-carbone terminale par le borane : régiosélectivité, mécanisme limite de l'addition du borane sur l'alcène ; hydrolyse oxydante.</p>	<p>Prévoir ou justifier la régiosélectivité de l'hydratation à l'aide de la stabilité des carbocations intermédiaires.</p> <p>Prévoir ou justifier la régiosélectivité de l'hydroboration à l'aide des effets stériques.</p>
<p><b>Additions nucléophiles suivies du départ d'un nucléofuge</b></p> <p>De l'acide carboxylique aux amides et aux esters.</p> <p>Activation <i>ex situ</i> du groupe carboxyle sous forme d'un chlorure d'acyle ou d'un anhydride d'acide.</p> <p>Activation <i>in situ</i> du groupe carboxyle par protonation.</p> <p>Autres activations du groupe carboxyle : utilisation d'une banque de réactions.</p> <p>Synthèse des esters à partir des acides carboxyliques, des chlorures d'acyle et des anhydrides d'acide : aspects cinétiques et thermodynamiques, mécanismes limites.</p> <p>Synthèse des amides à partir des acides carboxyliques, des chlorures d'acyle et des anhydrides d'acide : aspects cinétiques et thermodynamiques, mécanismes limites.</p>	<p>Comparer les réactivités électrophiles des acides carboxyliques, chlorures d'acyle, anhydrides d'acide, esters, amides, les aptitudes nucléofuges des groupes partants dans les molécules correspondantes et en déduire l'importance de l'activation du groupe carboxyle.</p> <p>Proposer et/ou analyser, le cas échéant à partir d'une banque de réactions fournie, différents moyens d'activation d'un groupe carboxyle.</p> <p>Expliquer comment obtenir un bon rendement de synthèse d'un ester à partir d'un alcool primaire ou secondaire et d'un acide carboxylique, selon la méthode d'activation choisie et les conditions expérimentales.</p> <p>Justifier le choix des conditions expérimentales retenues pour la synthèse des amides.</p>
<p>Des amides ou esters à l'acide carboxylique.</p> <p>Hydrolyses en milieu acide et en milieu basique des esters et des amides : conditions expérimentales, mécanismes.</p>	<p>Justifier le choix des conditions opératoires d'hydrolyse.</p>
<p>Utilisation de la synthèse d'amides ou d'esters pour la protection des groupes carboxyle, amino ou hydroxyle.</p>	<p>Reconnaître ou justifier la nécessité de protéger un groupe carboxyle, amino ou hydroxyle dans le cadre d'une stratégie de synthèse.</p> <p>Proposer ou justifier des conditions de protection ou de déprotection d'un groupe carboxyle, amino ou hydroxyle à partir d'une banque de réactions fournie.</p>

Notions et contenus	Capacités exigibles
Synthèse de polyesters et de polyamides à partir de diacides carboxyliques.	<p>Proposer des réactifs permettant de synthétiser un polyester ou un polyamide donné.</p> <p>Représenter le polyester ou le polyamide obtenu par polymérisation de monomères donnés.</p> <p>Justifier les choix expérimentaux effectués dans un protocole donné de synthèse de polyester ou de polyamide.</p>
Structure primaire des peptides et protéines : acides $\alpha$ -aminés, liaison peptidique.	<p>Identifier un peptide ou une protéine comme un enchaînement d'unités issues d'acides <math>\alpha</math>-aminés (aucune structure ou nomenclature d'acides <math>\alpha</math>-aminés n'est exigible).</p> <p>Identifier les chaînes latérales dans des acides <math>\alpha</math>-aminés, des peptides ou des protéines fournis.</p>
<b>Conversion de groupes caractéristiques par des réactions d'oxydo-réduction</b>	
Hydrogénation des doubles et triples liaisons carbone-carbone en catalyse hétérogène, aspects stéréochimiques.	Identifier les différents types d'interactions entre le catalyseur hétérogène et les réactifs.
Époxydation directe par un peroxyacide ; réactivité comparée des alcènes.  Ouverture des époxydes en milieu basique : mécanisme, élaboration de diols par addition anti.	<p>Discuter de la régiosélectivité de l'époxydation sur un polyène.</p> <p>Justifier la régiosélectivité et la stéréosélectivité de l'ouverture d'un époxyde par un nucléophile, en l'absence d'activation par un acide de Lewis ou de Bronsted.</p>
De l'ester à l'aldéhyde ou à l'alcool primaire ; mécanisme schématique de la réduction des esters.	<p>Interpréter la réduction d'un ester en alcool primaire en assimilant le réactif à un ion hydrure nucléophile.</p> <p>Identifier le produit de réduction d'un ester par un hydrure complexe, à l'aide de données fournies (chimiques et/ou spectroscopiques).</p> <p>Reconnaître ou proposer dans une stratégie de synthèse la conversion entre un ester et un aldéhyde ou un alcool primaire.</p>

### 3.2. Création de liaisons carbone-carbone

Notions et contenus	Capacités exigibles
<p><b>Réaction de Diels-Alder</b></p> <p>Diastéréosélectivité, stéréospécificité, régiosélectivité, influence de la structure des réactifs sur la vitesse de la transformation (règle d'Alder).</p> <p>Réaction de rétro-Diels-Alder.</p>	<p>Identifier les interactions orbitales mises en jeu entre les réactifs.</p> <p>Interpréter les résultats cinétiques, stéréochimiques et la régiosélectivité d'une réaction de Diels-Alder sous contrôle cinétique.</p>
<p><b>Réactivité nucléophile des énolates</b></p> <p>Équilibre de tautomérie céto-énolique.</p> <p>Acidité d'un aldéhyde ou d'une cétone.</p> <p>Généralisation à d'autres espèces énolisables.</p>	<p>Représenter le(s) énol(s) isomère(s) d'une espèce énolisable.</p> <p>Identifier un énol et représenter l'aldéhyde ou la cétone dont il est l'isomère.</p> <p>Représenter la base conjuguée d'une espèce énolisable et justifier sa stabilité à l'aide du formalisme de la mésomérie.</p> <p>Proposer ou justifier le choix d'une base permettant de déprotoner une espèce énolisable, les valeurs des <math>pK_a</math> étant fournies.</p>
<p>C-alkylation en position <math>\alpha</math> d'un groupe carbonyle de cétone : mécanisme limite, régiosélectivité de l'alkylation des énolates.</p>	<p>Justifier la réactivité nucléophile ambivalente de l'énolate dans le formalisme de la mésomérie ou par l'analyse de ses orbitales frontalières.</p> <p>Décrire les interactions entre orbitales frontalières des réactifs et interpréter la régiosélectivité de l'alkylation de l'énolate.</p>
<p>Aldolisation non dirigée : mécanisme en milieu basique aqueux ou alcoolique.</p> <p>Aldolisation croisée dirigée avec déprotonation totale préalable : mécanisme, intérêt synthétique.</p>	<p>Identifier dans une analyse rétrosynthétique les réactifs permettant d'obtenir un aldol, un cétoal, un <math>\alpha</math>-énal, une <math>\alpha</math>-énone.</p> <p>Choisir dans le cadre d'une stratégie de synthèse les meilleures conditions expérimentales de préparation d'un aldol (d'un cétoal) issu d'une aldolisation croisée.</p> <p>Justifier par la compétition avec l'aldolisation l'impossibilité d'alkyler un aldéhyde.</p>
<p>Crotonisation : déshydratation de l'aldol (cétoal) en présence d'une base, mécanisme E1<sub>cb</sub>, régiosélectivité.</p>	<p>Justifier la régiosélectivité de la crotonisation en présence d'une base.</p>
<p>Réaction de Michael sur une <math>\alpha</math>-énone ; mécanisme.</p>	<p>Décrire les interactions entre orbitales frontalières des réactifs et interpréter la régiosélectivité de la réaction de Michael.</p> <p>Identifier dans une analyse rétrosynthétique les réactifs permettant de réaliser une addition de Michael sur une <math>\alpha</math>-énone.</p>
<p><b>Utilisation des organomagnésiens en synthèse</b></p>	

© Ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, 2021

<http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr>

Chimie PC

Notions et contenus	Capacités exigibles
Synthèse des alcools par action des organomagnésiens sur les époxydes et les esters, mécanismes.	Identifier dans une analyse rétrosynthétique les réactifs de la synthèse magnésienne d'un alcool.

## Annexe 1 : liste de matériel

Cette liste regroupe le matériel que les étudiant·es doivent savoir utiliser avec, le cas échéant, l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

- Verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc.
- Matériel classique de chimie organique, rodée ou non rodée : ballons, ampoule de coulée (isobare ou non), réfrigérant, dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, chauffe-ballon, agitateur magnétique chauffant, etc.), dispositifs d'agitation, colonne à distiller, ampoule à décanter, matériel de filtration sous pression atmosphérique et sous pression réduite, appareil de Dean-Stark.
- Évaporateur rotatif
- Matériel de chromatographie sur couche mince
- Lampe UV
- Banc de Kofler
- Réfractomètre
- Spectrophotomètre UV-visible
- pH-mètre et électrodes de mesure
- Voltmètre et électrodes
- Ampèremètre
- Conductimètre et cellule de mesure
- Polarimètre
- Thermomètre
- Balance de précision

## Annexe 2 : outils mathématiques

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en chimie. La capacité à mettre en œuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la chimie fait partie des compétences exigibles. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu, mais tous ces outils n'ont pas vocation à être mis en œuvre en chimie. Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique ou formel).

Outils mathématiques	Capacités exigibles
<b>1. Équations algébriques</b>	
Système linéaire de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas $n = p = 2$ . Utiliser des outils numériques ou de calcul formel dans les autres cas.
Équation non linéaire.	Représenter graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$ .

	Interpréter graphiquement la ou les solutions. Dans le cas général, résoudre à l'aide d'un outil numérique ou de calcul formel.
<b>2. Équations différentielles</b>	
Équations différentielles linéaires à coefficients constants. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$ .	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre : « équation homogène ».
Autres équations différentielles d'ordre 1.	Résoudre numériquement l'équation différentielle avec un outil fourni. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et la représentation graphique de la solution correspondante.
<b>3. Fonctions</b>	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithmes népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle.
Dérivée. Notation $dx/dt$ .  Développements limités.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.  Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1+x)^\alpha$ , $e^x$ , $\ln(1+x)$ et $\sin(x)$ , et à l'ordre 2 de la fonction $\cos(x)$ .
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser un grapheur pour tracer une courbe d'équation $y = f(x)$ donnée. Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
<b>4. Géométrie</b>	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée d'un espace de dimension inférieure ou égale à 3. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Projection d'un vecteur et produit scalaire.	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, à un point, les translations et les rotations de l'espace.
Courbes planes.	Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle, d'une branche d'hyperbole, d'une parabole.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Connaître les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une

	sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre, du volume d'un parallélépipède.
Barycentre d'un système de points.	Connaître la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.
<b>5. Trigonométrie</b>	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$ , parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Connaître les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.

### Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python incluant l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques dans la formation des étudiant-es vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée et à mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique-chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Outils numériques	Capacités exigibles
<b>1. Outils graphiques</b>	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque <b>matplotlib</b> pour représenter un nuage de points et rendre le graphe exploitable (présence d'une légende, choix des échelles...).
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque <b>matplotlib</b> pour tracer la courbe représentative d'une fonction et rendre le graphe exploitable (présence d'une légende, choix des échelles...).
<b>2. Équations algébriques</b>	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par la méthode dichotomique. Écrire un programme mettant en œuvre la méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser les fonctions <b>bisect</b> ou <b>newton</b> de la bibliothèque <b>scipy.optimize</b> (leurs spécifications étant fournies).

<p>Systèmes linéaires de n équations indépendantes à n inconnues.</p>	<p>Définir les matrices A et B adaptées à la représentation matricielle <math>AX = B</math> du système à résoudre. Utiliser la fonction <b>solve</b> de la bibliothèque <b>numpy.linalg</b> (sa spécification étant fournie).</p>
<p><b>3. Intégration – Dérivation</b></p>	
<p>Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.</p>	<p>Utiliser un schéma numérique centré ou décentré pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.</p>
<p><b>4. Équations différentielles</b></p>	
<p>Équations différentielles d'ordre 1.</p>	<p>Écrire un programme mettant en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1 ou un système d'équations différentielles.</p>
<p><b>5. Statistiques</b></p>	
<p>Variable aléatoire.</p>	<p>Utiliser les fonctions de base des bibliothèques <b>random</b> et/ou <b>numpy</b> (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction <b>hist</b> de la bibliothèque <b>matplotlib.pyplot</b> (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.</p>
<p>Régression linéaire.</p>	<p>Utiliser la fonction <b>polyfit</b> de la bibliothèque <b>numpy</b> (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction <b>random.normal</b> de la bibliothèque <b>numpy</b> (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.</p>