Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

ministère
éducation
nationale

Secrétariat Général
Direction générale des ressources humaines
Sous-direction du recrutement

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Concours du second degré — Rapport de jury

Session 2009

TROISIÈME CONCOURS

CAPES EXTERNE DE MATHÉMATIQUES

Rapport de jury présenté par
Mohamed KRIR, Président de jury

Les rapports des jurys sont établis sous la responsabilité des présidents de jury

CONSEILS PRATIQUES AUX FUTURS CANDIDATS

Il est recommandé aux futurs candidats de s'informer à l'avance sur les modalités des concours de recrutement en général et sur celles particulières au Troisième concours du CAPES de mathématiques.

Les renseignements généraux (les conditions d'accès ; la préparation ; le déroulement du concours ; la carrière dans l'enseignement secondaire) se trouvent sur le site du Ministère

http://education.gouv.fr

rubrique SIAC2.

Les informations spécifiques (programmes ; nature des épreuves) sont publiées dans le bulletin officiel de l'éducation nationale, publication qui informe les enseignants : carrière, programmes, nominations, vacances de postes, concours, etc. Ces renseignements se trouvent également, pour l'essentiel, dans le rapport du concours.

Le jury, pour faciliter la recherche d'information émanant des candidats et des formateurs, a en outre créé un site à l'adresse :

http://capes-math.org

sur lequel il a réuni l'essentiel des informations utiles à la préparation au concours.

ATTENTION : Les informations figurant sur ce site n'ont pas de caractère officiel ; seules les informations délivrées directement par la DGRH et par le Ministère ont valeur officielle.

« LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY »

Table des matières

1 Présentation du concours 2009

1.1 Composition du jury.

Par arrêté en date du 9 février 2009, la composition du jury est la suivante :

M.	KRIR	Mohamed	Maître de Conférences, Président	Versailles
M.	AGUER	Bernard	IA-IPR, Vice-président	Amiens
M.	SORBE	Xavier	IGEN, Vice-président	Paris
M.	ANDRIEUX	Jean-Claude	Professeur agrégé	Dijon
Mme	AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	Versailles
M.	CHAREYRE	Bernard	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	DEAT	Joelle	IA-IPR	Versailles
Mme	ERNOULT	Monique	IA-IPR	Créteil
Mme	FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences	Reims
Mme	LAPOLE	Isabelle	Professeure Agrégée	Amiens
M.	LAPOLE	René	Professeur Agrégé	Amiens
M.	MERCKHOFFER	René	IA-IPR	Versailles
M.	MICHALAK	Pierre	IA-IPR	Versailles
M.	MORENO-SOCIAS	Guillaume	Maître de Conférences	Versailles
M.	PUYOU	Jacques	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	ROUDNEFF	Évelyne	IA-IPR	Versailles

1.2 Statistiques

Le nombre de postes mis au concours est de 25 (22 pour le public et 3 pour le privé). Les candidats présents aux épreuves du concours du CAPES troisième voie pour la session 2009 ont été au nombre de 112 (79 dans le public et 33 dans le privé). Après l'écrit, 32 candidats ont été déclarés admissibles (24 pour le public et 8 pour le privé). Après l'oral, 12 candidats ont été déclarés admis (9 pour le public, et 3 pour le privé). La barre d'admissibilité est de 7/20. La moyenne des candidats admissibles est de 9,16/20 pour le public et de 10,6/20 pour le privé. La barre d'admission est de 9/20. La moyenne générale (écrit plus oral) des candidats admis est de 10,39/20 pour le public et de 12,92/20 pour le privé.

L'épreuve écrite pour le troisème concours est la même que la première épreuve du CAPES externe et CAFEP et a eu lieu le 9 mars 2009.

Les épreuves orales se sont déroulées à l'UFR de sciences de Versailles (Université de Versailles St-Quentin) les 23 et 24 juin pour l'épreuve d'exposé et les 24 et 25 juin pour l'épreuve sur dossier.

2 Énoncé et analyse de l'épreuve écrite

2.1 Énoncé de l'épreuve

Notations

• Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X) \in K[X]$, on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$.

• Si deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes, on notera $u_n \sim_n v_n$. De même, si f et g sont deux applications réelles définies au voisinage d'un point x_0 et équivalentes en x_0, on notera $f(x) \sim_{x_0} g(x)$. Quand le voisinage sera un voisinage à droite en x_0, on précisera $f(x) \sim_{x_0^+} g(x)$.

• On rappelle que le *produit au sens de Cauchy* de deux séries (réelles ou complexes) $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est la série $\sum w_n$ où le terme général w_n est défini pour $n \geqslant 0$ par $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_n v_{n-k}$. On rappelle aussi que si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit $\sum w_n$ est aussi absolument convergente et l'on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Objectifs du problème

Ce sujet aborde une série de résultats et de propriétés relatifs à la formule de Stirling [1] ainsi qu'aux polynômes et nombres dits de Bernoulli [2]. Il se compose de quatre parties.

Dans la partie I, on établit la formule de Stirling qui donne un équivalent simple de la suite $(n!)_n$. Ce travail utilise les intégrales de Wallis [3], qui sont étudiées au début de la partie. La fin de la partie I est une application des intégrales de Wallis et de la formule de Stirling à l'étude du volume des boules dans $\mathbb{R}^n$.

La partie II s'intéresse aux polynômes et nombres de Bernoulli. On y étudie certaines de leurs propriétés et l'on donne deux applications de cette étude. La première, arithmétique, s'intéresse au calcul des sommes du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^p$. La deuxième est consacrée au développement en série entière de la fonction $\dfrac{te^{xt}}{e^t - 1}$.

Dans la partie III, on introduit la fonction ζ de Riemann [4] et l'on explicite ses valeurs prises sur les entiers positifs pairs au moyen des nombres de Bernoulli. Ce calcul permet, avec la formule de Stirling, d'expliciter un équivalent simple pour la suite des nombres de Bernoulli.

Dans la partie IV, on revient à la formule de Stirling et l'on décrit une méthode pour obtenir un raffinement asymptotique de la formule.

Les parties de ce sujet ne sont pas indépendantes, chacune d'elles pouvant utiliser des résultats établis dans celles qui la précèdent. Aussi pourra-t-on utiliser pour traiter certaines

1. James, mathématicien anglais, Garden 1692 - Edimbourg 1770.
2. Jakob (francisé en Jacques), mathématicien suisse, premier d'une longue lignée familiale de mathématiciens. Bâle 1654 - Bâle 1705.
3. John, mathématicien anglais, Ashford 1616 - Oxford 1703.
4. Georg Friedrich Bernhard, mathématicien allemand, Breselenz 1826 - Selasca 1866

questions, les résultats établis dans les questions précédentes sans les démontrer. Il est toutefois vivement conseillé aux candidats d'aborder linéairement ce sujet.

I. Intégrales de Wallis et formule de Stirling.

I.1. Intégrales de Wallis.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

I.1.a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

(Indication. On pourra, par exemple, utiliser un changement de variables.)

I.1.b. Montrer que la suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante.

(Indication. Pour la décroissance, on pourra comparer les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$. Pour la stricte décroissance, on pourra raisonner par l'absurde.)

I.1.c. A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour $n \geqslant 0$, on a

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$$

I.1.d. En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a

$$\begin{cases} W_{2p} &= \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} &= \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

I.1.e. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

(Indication. On pourra utiliser la question précédente en distinguant suivant la parité de l'entier n.)

I.1.f. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$$

et en déduire que $W_n \sim_n W_{n+1}$.

(Indication. On pourra utiliser la question I.1.b.)

I.1.g. Montrer finalement que $W_n \sim_n \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim\limits_n W_n$.

I.2. Formule de Stirling.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 2$, par

$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$$

I.2.a. Exprimer simplement v_n en fonction n et donner un développement limité à l'ordre 2 en $1/n$ de la suite $(v_n)_n$.

I.2.b. En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente. Montrer alors que les suites $(\ln u_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim_n K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

I.2.c. En utilisant cet équivalent, calculer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_p$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que

$$n! \sim_n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

(Formule de Stirling)

I.3. Une autre application des intégrales de Wallis.

[**Rappel sur les intégrales multiples et généralisation.** (Ce rappel n'est utile que pour les sous-questions I.3.a. et I.3.c. de cette question I.3.)

Les notions d'intégrales doubles et triples ainsi que la méthode de calcul par intégrations successives de ces dernières (présentes au programme), se généralisent à toute dimension finie de la manière suivante : étant donné un entier $n \geqslant 1$, une partie $A_n \subset \mathbb{R}^n$ sera dite continûment paramétrable si $n = 1$ et A_1 est un segment ou si $n \geqslant 2$ et s'il existe une partie $A_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ continûment paramétrable et deux fonctions continues $f, g : A_{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$A_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in A_{n-1} \text{ et } f(x_1, \cdots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant g(x_1, \cdots, x_{n-1})\}$$

Avec ces notations, pour une fonction continue $\varphi : A_n \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit l'intégrale multiple de φ sur A_n par la formule suivante :

$$\int \cdots \int_{A_n} \varphi(x_1, \cdots, x_n) d_{x_n} \cdots d_{x_1} = \int \cdots \int_{A_{n-1}} \left(\int_{f(x_1, \cdots, x_{n-1})}^{g(x_1, \cdots, x_{n-1})} \varphi(x_1, \cdots, x_n) d_{x_n} \right) d_{x_{n-1}} \cdots d_{x_1}$$

On admettra, sans démonstration, qu'à l'instar des intégrales doubles et triples, le réel ainsi obtenu ne dépend que de la partie A_n et de la fonction φ. Le volume de la partie A_n sera alors, par définition, le réel $\int \cdots \int_{A_n} d_{x_n} \cdots d_{x_1}$.]

On se propose d'étudier ici le comportement du volume d'une boule de rayon fixé quand on fait varier la dimension de l'espace. Plus précisément, on se fixe un réel $R > 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$ on considère dans $\mathbb{R}^n$ la boule $\mathcal{B}_n$ de centre O et de rayon R :

$$\mathcal{B}_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2\}$$

On note V_n son volume.

I.3.a. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{B}_n \Longleftrightarrow \begin{cases} (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_{n-1} \\ \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \leqslant x_n \leqslant \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \end{cases}$$

En déduire par récurrence sur $n \geqslant 1$, que $\mathcal{B}_n$ est continûment paramétrable.

I.3.b. Soient $\lambda > 0$ un réel et $m \geqslant 0$ un entier. Montrer, en se servant par exemple d'un changement de variable utilisant la fonction $t \mapsto \lambda \sin t$, que

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\lambda^2 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} dx = 2\lambda^{m+1} W_{m+1}$$

I.3.c. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $k = 1, \cdots, n-1$ on a

$$V_n = 2^k \left(\prod_{i=1}^{k} W_i\right) \int \cdots \int_{\mathcal{B}_{n-k}} \left(R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \cdots dx_1$$

(Indication. On pourra, pour n fixé, faire une récurrence finie sur k.)

I.3.d. Prouver finalement que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$V_n = \left(\prod_{i=1}^{n} W_i\right) (2R)^n$$

et par suite, que pour $k \geqslant 1$

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}$$

et que pour $k \geqslant 0$

$$V_{2k+1} = 2^{2k+1} \frac{k!}{(2k+1)!} \pi^k R^{2k+1}$$

Expliciter V_1, V_2, V_3 et V_4.

I.3.e. En utilisant la formule de Stirling, donner des équivalents simples des suites $(V_{2k})_k$ et $(V_{2k+1})_k$.

I.3.f. En déduire que $\lim_n V_n = 0$.

I.3.g. Montrer que, soit la suite $(V_n)_n$ est décroissante, soit il existe un rang n_0 tel que la suite $(V_n)_n$ soit croissante jusqu'au rang n_0, puis décroissante.

(Indication. On pourra calculer simplement le rapport V_{n+1}/V_n grâce à la question I.3.d. et utiliser les questions I.1.b. et I.1.g.)

I.3.h. Donner les valeurs de R pour lesquelles la suite $(V_n)_n$ est décroissante.

I.3.i. Que vaut le rang n_0 de la question I.3.g. quand $R = 1$?

II. Polynômes et nombres de Bernoulli.

II.1. Définitions.

II.1.a. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(x)dx = 0$.

II.1.b. En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(B_n(X))_n$ vérifiant

- $B_0(X) = 1$
- $\forall n \geqslant 1,\ B_n' = nB_{n-1}$
- $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(x)dx = 0$

On appelle $(B_n(X))_n$ *la* suite des polynômes de Bernoulli. *Pour tout* $n \geqslant 0$, *on pose* $b_n = B_n(0)$. *La suite de réels* $(b_n)_n$ *est appelée* suite des nombres de Bernoulli.

II.1.c. Expliciter $B_n(X)$ et b_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

II.2. Premières propriétés.

II.2.a. Quel est le degré de $B_n(X)$ pour $n \geqslant 0$?

II.2.b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

II.2.c. Prouver par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binômial : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

II.2.d. En déduire, pour $n \geqslant 1$, une expression de b_n en fonction de $b_0, \cdots, b_{n-1}$. Calculer b_5 et b_6.

II.2.e. Montrer que la suite $(b_n)_n$ est une suite de rationnels et que, pour $n \geqslant 0$, les polynômes $B_n(X)$ sont à coefficients rationnels.

II.2.f. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$$

Montrer, en utilisant la définition des polynômes de Bernoulli, que pour tout $n \geqslant 0$ on a $C_n(X) = B_n(X)$.

II.2.g. En déduire que

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \geqslant 1,\ b_{2n+1} = 0 \\ \bullet\ \forall n \geqslant 0,\ B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

II.3. Etude des variations de B_n sur $[0, 1]$.

II.3.a. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Etablir que, si P est non nul et de signe constant sur $[0, 1]$, alors on a $\displaystyle\int_0^1 P(x)dx \neq 0$.

II.3.b. Montrer, par récurrence sur $n \geqslant 1$, que B_{2n} vérifie

$$\begin{cases} \bullet\ (-1)^n B_{2n}(0) < 0 \\ \bullet\ (-1)^n B_{2n}(1) < 0 \\ \bullet\ (-1)^n B_{2n}(\frac{1}{2}) > 0 \\ \bullet\ \text{la fonction } (-1)^n B_{2n} \text{ est strictement croissante sur } [0, \frac{1}{2}] \text{ et strictement décroissante} \\ \quad \text{sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

et que B_{2n+1} vérifie

$$\begin{cases} \bullet\ (-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0 \\ \bullet\ \text{il existe deux réels } \alpha_{2n+1} \in]0, \frac{1}{2}[\text{ et } \beta_{2n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[\text{ tels que la fonction } (-1)^n B_{2n+1} \\ \quad \text{soit strictement décroissante sur } [0, \alpha_{2n+1}] \text{ puis strictement croissante sur } [\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}] \\ \quad \text{puis strictement décroissante sur } [\beta_{2n+1}, 1] \end{cases}$$

(Indication. Il pourra être judicieux d'aborder en même temps la récurrence sur ces six propriétés.)

II.3.c. En déduire que le signe du réel b_{2p} est $(-1)^{p+1}$.

II.3.d. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $B_n^*(X) = B_n(X) - b_n$. Pour $n \geqslant 1$, donner l'allure générale des courbes représentatives des fonctions B_{4n-2}^*, B_{4n-1}^*, B_{4n}^*, B_{4n+1}^* sur l'intervalle $[0, 1]$.

II.4. Une application arithmétique.

II.4.a. Montrer, par récurrence sur $n \geqslant 1$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

II.4.b. Soient $p \geqslant 1$ et $N \geqslant 0$ deux entiers. On pose $S_p(N) = \sum_{k=0}^{N} k^p$, montrer en utilisant la question II.4.a. que

$$S_p(N) = \frac{B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}}{p+1}$$

II.4.c. Calculer explicitement, en fonction de l'entier naturel N, les sommes $S_p(N)$ pour $p = 1, 2, 3$.

II.5. Une application analytique.

II.5.a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{b_n}{n!} t^n$ est égal à 2π.

(Indication. On pourra, par exemple, déterminer les réels $t > 0$ pour lesquels la suite $(\frac{|b_n|}{n!} t^n)_n$ reste bornée. A cet effet, on pourra utiliser la formule de Stirling et admettre pour cette question que l'on a l'équivalent $b_{2p} \sim_p (-1)^{p+1} \left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p} \sqrt{16\pi p}$. Ce dernier résultat sera établi dans la question III.2.e. à venir.)

II.5.b. Calculer le produit au sens de Cauchy des séries entières

$$\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{t^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{b_n}{n!} t^n\right)$$

et en déduire que, pour tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, on a

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{b_n}{n!} t^n$$

II.5.c. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, on a

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

II.5.d. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n(x)}{n!} t^n$ est bien 2π.

(Indication. On pourra regarder dans $\mathbb{C}$ le comportement de la série entière au voisinage du cercle $|z| = 2\pi$.)

III. Fonction ζ de Riemann et nombres de Bernoulli.

III.1. Fonction ζ.

On appelle fonction ζ de Riemann (réelle) la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

III.1.a. Soit $s > 0$. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} < \frac{1}{k^s}$$

En déduire que la nature (divergence ou convergence) de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ est la même que celle de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$.

III.1.b. Donner le domaine de définition de ζ et prouver qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.

III.1.c. Montrer que $\zeta(s) \sim_{1^+} \dfrac{1}{s-1}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{s \to 1^+} \zeta(s)$.

III.1.d. Soit $a > 1$ un réel. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. En déduire que ζ est continue sur son domaine de définition et que $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1$.

III.1.e. Montrer que, pour tout $s > 0$, la série $\theta(s) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ converge. Prouver que, pour tout $s > 1$, on a

$$\theta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s)$$

III.2. Calcul de $\zeta(2p)$.

Pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on note

$$c_k(f) = \int_0^1 f(x) e^{-2ik\pi x} dx$$

le k-ième coefficient de Fourier de la fonction f. On rappelle sans démonstration que, si f et g sont deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, alors on a

$$\int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{c_k(f)} c_k(g)$$

(où $z \mapsto \overline{z}$ désigne la conjugaison complexe).

III.2.a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient $c_k(B_n)$.
(Indication. Pour $k \neq 0$ et $n \geqslant 2$, on cherchera une relation entre $c_k(B_n)$ et $c_k(B_{n-1})$.)

III.2.b. Soient $n, m \geqslant 1$ deux entiers. Montrer que

$$\int_0^1 B_n(x) B_m(x) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[c_{-k}(B_n) c_k(B_m) + c_k(B_n) c_{-k}(B_m)\right]$$

et en déduire la valeur de cette intégrale au moyen de valeurs de la fonction ζ.
(Indication. On distinguera les cas $n + m$ pair et $n + m$ impair.)

III.2.c. Pour $p \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_0^1 B_1(x)B_{2p-1}(x)dx$ en intégrant par parties. En déduire que

$$\zeta(2p) = (-1)^{p+1}\frac{b_{2p}}{2}\frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}$$

III.2.d. Donner les valeurs de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4},\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$$

et des sommes

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2},\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^4},\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^6}$$

III.2.e. En utilisant les questions III.1.d. et III.2.c. ainsi que la formule de Stirling, montrer que

$$b_{2p} \sim_p (-1)^{p+1}\left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p}\sqrt{16\pi p}$$

III.3. Application numérique.

III.3.a. Soient $s > 1$ et $N \geqslant 1$. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant N+1}\frac{1}{n^s} \leqslant \frac{N^{1-s}}{s-1}$$

III.3.b. Etant donné un réel $\epsilon > 0$, expliciter un entier N_0 tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^s}$ soit une approximation à ϵ près de $\zeta(s)$.

III.3.c. Déduire de ce qui précéde, une approximation rationnelle A de π^6 à 10^{-2} près.

III.3.d. Majorer l'erreur commise en prenant $\sqrt[6]{A}$ comme approximation de π. Combien de décimales de π cette approximation permet-elle de donner ? Les donner.

IV. Formule de Stirling généralisée.

On considère la suite $(\Omega_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 0$, par $\Omega_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}$.

On sait, d'après la partie I, que l'on a $\Omega_n = 1 + o(1)$. On se propose ici de décrire une méthode pour obtenir un développement limité en $1/n$ à un ordre donné de la suite $(\Omega_n)_n$, autrement dit on veut raffiner la formule de Stirling.

IV.1. On se fixe un entier $N \geqslant 2$.

IV.1.a. Montrer que $\ln\Omega_N = \ln\Omega_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}\left(1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

IV.1.b. Montrer que la fonction $t \mapsto \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+t)$ est développable en série entière en 0. Préciser son développement ainsi que le rayon de convergence de ce développement.

IV.1.c. En déduire que

$$\ln \Omega_N = \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \left(\zeta(k) - \sum_{n \geqslant N} \frac{1}{n^k} \right)$$

IV.1.d. Montrer que la série $\sum (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k)$ est convergente.

(Indication. On pourra utiliser le critère des séries alternées.)

IV.1.e. En déduire que

$$\ln \Omega_N = \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) - \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$

où $R_k(N) = \sum_{n \geqslant N} \frac{1}{n^k}$.

IV.2.

IV.2.a. Prouver que, pour tout $k \geqslant 2$ et tout $N \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{k-1} . \frac{1}{N^{k-1}} \leqslant R_k(N) \leqslant \frac{1}{k-1} . \frac{1}{N^{k-1}} + \frac{1}{N^k}$$

IV.2.b. En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k-1)}{2k(k+1)} R_k(N) = o\left(\frac{1}{N^{p-2}} \right)$$

IV.3.

IV.3.a. Montrer que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k-1)}{2k(k+1)} \zeta(k) = 1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi$$

et que, pour tout $N \geqslant 2$, on a

$$\ln \Omega_N = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$

IV.3.b. Déduire de ce qui précède que, si les suites $(R_2(N))_N, \cdots, (R_{p+1}(N))_N$ possèdent des développements limités en $1/N$ à l'ordre p, alors la suite $(\ln \Omega_N)_N$ en possède aussi un et que celui-ci est égal à celui de la suite $\left(\sum_{k=2}^{p+1} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) \right)_N$.

IV.3.c. Montrer que la suite $(\ln \Omega_N)_N$ possède un développement limité en $1/N$ à l'ordre 1. En déduire celui de la suite $(\Omega_N)_N$ à cet ordre.

IV.4.

IV.4.a. Montrer que, pour $N \geqslant 1$, on a $R_2(N) - \frac{1}{N} = \sum_{n \geqslant N} \frac{1}{n^2(n+1)}$.

IV.4.b. En comparant cette dernière série à l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$, donner le développement limité de la suite $(R_2(N))_N$ en $1/N$ à l'ordre 2. En déduire le développement limité de la suite $(\ln \Omega_N)_N$ puis de la suite $(\Omega_N)_N$, en $1/N$ à l'ordre de 2.

IV.4.c. En généralisant ce qui vient d'être fait, décrire brièvement les étapes à suivre pour trouver un développement limité de la suite $(\Omega_N)_N$, en $1/N$ à un ordre donné.

FIN

2.2 Description de l'épreuve écrite

L'épreuve d'analyse de cette année abordait les polynômes et nombres de Bernoulli et la formule de Stirling généralisée. Il s'agissait là d'un sujet sur un thème très classique et très classiquement rencontré en premier cycle universitaire. L'épreuve comportait quatre parties.

La partie I. était consacrée aux intégrales de Wallis. On y donnait deux applications : la formule de Stirling (I.2.) qui fournit un équivalent simple de la suite $(n!)_n$ et le calcul et l'étude du volume de la boule euclidienne en toute dimension (I.3.).

La partie II. s'intéressait aux polynômes et nombres de Bernoulli. Dans les questions II.1,2,3. on étudiait les propriétés classiques de ces derniers, en particulier leurs variations sur l'intervalle $[0,1]$. Les parties II.4. et II.5. présentaient chacune une application. La première, arithmétique, faisait exprimer les sommes du type $S_p(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^p$ en fonction des polynômes et nombres de Bernoulli. La deuxième était analytique et concernait le développement en série entière de la fonction $t \longmapsto \dfrac{te^{xt}}{e^t - 1}$.

Dans la partie III, on calculait les valeurs de la fonction zéta de Riemann en les entiers naturels pairs. Après une courte introduction de cette fonction (III.1.), on décrivait (III.2.) une méthode utilisant les séries de Fourier pour arriver à ce calcul. On déduisait alors de cette étude (III.2.e.) un équivalent simple de la suite des nombres de Bernoulli.

Dans la partie IV. on revenait à la formule de Stirling que l'on tentait de généraliser. On cherchait à donner un développement limité de la suite de terme général $\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$.

Le sujet a abordé volontairement un thème classique et, en principe, bien étudié en premier cycle universitaire. Il a été conçu pour ne présenter que des questions élémentaires relevant du programme de la licence. La partie I, la plus massivement abordée par les candidats, était d'un niveau élémentaire et ne nécessitait aucune connaissance théorique poussée. On aurait pu s'attendre à ce que la qualité mathématique des copies s'en voit renforcée, c'est en fait le contraire qui s'est produit. Le jury a constaté, lors de la correction de cette épreuve, une massification inquiétante des erreurs et des fautes de raisonnement. Dans le même ordre d'idée, on constate une raréfaction du nombre de bonnes copies par rapport aux années antérieures. Les erreurs fréquemment relevées poussent à penser que pour une proportion inquiétante des candidats les mathématiques se résument à des formules mal comprises et mal appliquées, sans substance et parfois sans sens. Le souci de rigueur et d'esprit analytique semble disparaître au profit d'approximations du langage et de la pensée, ce qui d'un point de vue épistémologique est aux antipodes de la substance même des mathématiques et de leur enseignement. Ce constat ne peut faire qu'interroger la communauté sur la formation des futurs enseignants du secondaire.

2.3 Analyse des prestations

Les candidats ont significativement abordé la partie I du sujet ainsi que les questions II.1. et II.2. La sélection s'est donc globalement opérée sur cette partie-là du sujet. La question II.3. semble avoir rebuté beaucoup des candidats qui l'ont atteinte, la majorité d'entre eux ayant préféré passer directement aux questions suivantes. La question II.4. fut peu abordée, mais globalement bien. On peut donc considérer qu'elle a concerné les bons candidats. La question II.5. fut peu et mal traitée, les raisonnements sur les séries entières semblant être mal maitrisés.

Détails des erreurs fréquemment rencontrées. Nous détaillons une liste synthétique des erreurs les plus rencontrées dans les copies.

a) Méthodes de calcul d'intégrales. A la question I.1.a. un nombre non négligeable de candidat a tenté un changement de variables hasardeux du type $x = \sin t$ pour résoudre le problème. Ces changements de variables menaient à une intégrale impropre. Aucun d'eux ne pouvait marcher sans prendre de précautions, puisque les fonctions incriminées n'étaient pas C^1 sur l'intervalle considéré. Les autres candidats ont naturellement utilisé un changement de variables linéaire, mais beaucoup se sont trompés sur les formules de trigonométrie et la question du changement de bornes de l'intégrale.

La question I.1.c. demandait d'utiliser une intégration par partie. Très peu de candidats ont pris le soin de signaler que les fonctions utilisées étaient de classe C^1 et que l'on pouvait donc procéder ainsi. Le concours du CAPES est un concours de recrutement d'enseignants. On est en droit d'attendre que les candidats sachent faire preuve de pédagogie et qu'ils montrent leur maîtrise des théorèmes élémentaires, sachant surtout qu'ils seront potentiellement appelés à enseigner ces derniers.

b) Calcul d'équivalents. Très souvent dans les questions concernant des calculs d'équivalents de fonctions ou de suites, on constate que les candidats ne font pas forcément la différence entre équivalence et égalité. Beaucoup d'entre eux n'hésitent pas à passer de l'un à l'autre sans se poser de question, préférant l'égalité, sans doute plus commode pour effectuer des opérations algébriques. Par exemple, à la question I.2.c. environ une copie sur deux passe de $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} \sim \dfrac{\pi\sqrt{2}}{K\sqrt{p}}$ à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{K\sqrt{p}}$ pour calculer la valeur de K.

c) Passage à la limite. Plusieurs questions beaucoup abordées du sujet, nécessitaient des théorèmes de passage à la limite. Une quantité impressionnante de candidats pense que si une fonction est strictement positive et possède une limite en un point, alors cette dernière est elle-même strictement positive ! C'est le cas, par exemple, à la question I.2.b. où pour montrer le fait que $K > 0$, l'on rencontre très souvent l'argument que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive. L'erreur est systématique à la question III.1.b. pour montrer la stricte monotonie de ζ.

d) Développements limités. A la question I.2.a. une proportion importante de candidats est incapable de donner un développement limité correct de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0. Très peu de candidats réalisent que pour obtenir le développement limité à l'ordre 2 de la suite $(v_n)_n$, il faut (à cause de la présence du n) pousser le développement limité de $\ln(1-1/n)$ à l'ordre 3.

e) Polynômes. Les candidats ne distinguent, bien sûr, pas la notion de polynômes et de fonctions polynômes. Aucun d'eux ne prend, par exemple, le soin de dire (et donc de justifier) que si une fonction polynôme est nulle sur un intervalle non ponctuel alors le polynôme associé est forcément nul.

f) Intégrales de fonctions positives. Dans les questions I.1.b. et II.3.a. on attendait des candidats qu'ils mentionnent que si une fonction continue et de signe constant est d'intégrale nulle sur un segment alors cette fonction est nulle sur ce segment. La quasi totalité des candidats oublie de parler de la continuité pour conclure. Certains mentionnent, sans aucune explication, que si une fonction est strictement positive sur un intervalle, son intégrale est aussi strictement positive. Ce résultat est vrai pour les fonctions Riemann-intégrables (puisque ces dernières sont presque partout continues), mais on est en droit d'attendre d'un candidat une explication, ne serait-ce que la phrase clé "la fonction est continue en un point où elle ne s'annule pas".

g) Aspects calculatoires. Les candidats semblent absolument rebutés par tout calcul numérique. Ils sont pourtant autorisés à utiliser de puissantes calculatrices. L'immense majorité d'entre eux saute systématiquement toute question calculatoire. Pour ceux qui acceptent de se plonger dedans, pratiquement aucun n'est capable de mener à bien les calculs. C'est le cas notamment pour la question I.3.i. qui ne présentait pourtant aucune difficulté.

h) Soin et rigueur. Peu de candidats arrivent à énoncer clairement les théorèmes qu'ils utilisent et à vérifier que les hypothèses sont bien satisfaites pour pouvoir appliquer le résultat mentionné à la question posée. De même, il semble qu'aucun soin particulier ne soit porté aux hypothèses même de l'énoncé. La manipulation des divers types de raisonnement (preuve par récurrence, contraposée, preuve par l'absurde) est mal maîtrisée et surtout ces raisonnements sont mal présentés. Trop souvent on retrouve dans les copies une volonté acharnée de vouloir conclure malgré d'évidentes absurdités. Dans le même ordre d'idée, on constate de plus en plus une volonté de déguiser des faux raisonnements dans l'espoir que le correcteur passera sans remarquer. Faut-il rappeler que les copies sont lues plusieurs fois par deux correcteurs ?

3 Les épreuves orales

3.1 L'épreuve orale sur dossier du 24 juin

Thème : Courbes et équations

1. L'exercice proposé au candidat

Soit m un réel. On cherche à déterminer le nombre de solutions réelles dans l'intervalle $[-5; 5]$ de l'équation :

$$-x^2 + 2x - 1 + m\mathrm{e}^{-x} = 0. \qquad (E)$$

1) Dans cette question on pose $m = 2$. À l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'unique solution de (E).
2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5; 5]$ par $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^x$.
   À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de f et émettre une conjecture quant au nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans l'intervalle $[-5; 5]$ en fonction des valeurs de m.
3) Démontrer que, pour tout réel m, l'équation (E) et l'équation $f(x) = m$ ont le même ensemble de solutions dans l'intervalle $[-5; 5]$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- les diverses étapes de la résolution de l'exercice ;
- deux exercices sur le thème de la résolution approchée d'équations numériques.

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les connaissances et savoir-faire mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Seconde

Contenus	**Capacités attendues**	**Commentaires**
Mises en équation : résolution algébrique, résolution graphique d'équations ou d'inéquations	[...] Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type $f(x) = k; f(x) < k; f(x) = g(x)$ ...	[...] On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problèmes conduisant à une équation qu' on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

Programme de Terminale scientifique

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Langage de la continuité et tableau de variation Théorème (dit des valeurs intermédiaires) : soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.	Ce théorème pourra être admis ou démontré à l'aide de suites adjacentes. On démontrera le corollaire suivant : si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a, b]$. On étendra ce corollaire au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. On pourra approcher la solution de l'équation $f(x) = k$ par dichotomie ou balayage avec la calculatrice ou au tableur.	On conviendra, dans les tableaux de variations, que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. Dans la rédaction de la solution à un problème, une simple référence au tableau de variation suffira pour justifier l'existence et l' unicité d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$.

3.2 L'épreuve orale sur dossier du 25 juin

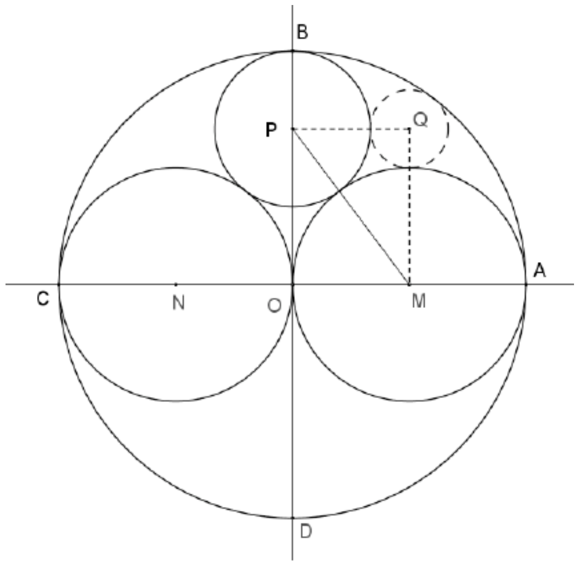
Thème : Étude de configurations

1. L'exercice proposé au candidat

On considère un cercle $\mathcal{C}_0$, de centre O et de rayon 6, et deux diamètres perpendiculaires $[AC]$ et $[BD]$ de ce cercle. On désigne par M et N les milieux respectifs de $[AO]$ et $[OC]$. On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles de rayon 3 et de centres respectifs M et N.

1) Déterminer la position du centre P et le rayon du cercle $\mathcal{C}_3$ tangent aux cercles $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

2) Montrer que si on appelle Q le centre du cercle $\mathcal{C}_4$ tangent aux cercles $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$, le quadrilatère $MOPQ$ est un rectangle. Quel est le rayon du cercle $\mathcal{C}_4$?



2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- sa réponse à la question 1) de l'exercice ;
- deux exercices sur le thème « **Étude de configurations** ».

Le candidat présentera au jury :

◇ le contenu de ses fiches ;

◇ les différents théorèmes mis en jeu dans l'exercice, en précisant à chaque fois le niveau auquel ils sont enseignés.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Seconde

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Les configurations du plan. Triangles isométriques, triangles de même forme.	Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires. Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées.	À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non. On pourra utiliser la définition suivante : « deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre » (il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès, deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement/réduction. Rapport entre les aires de deux triangles de même forme. Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. On s'interrogera, à partir de décompositions en triangles, sur la notion de forme pour d'autres figures de base (rectangle, quadrilatère quelconque...).

4 Déroulement des épreuves orales et conseils

L'oral du concours consiste en deux épreuves de 45 minutes : une épreuve d'exposé de leçon et une épreuve sur dossier. Pour chaque épreuve, le candidat dispose de 25 minutes d'exposé et de 20 minutes d'entretien avec le jury.

Les candidats au concours Troisième voie bénéficient de beaucoup d'atouts : leur maturité, des connaissances bien assimilées, et souvent l'expérience d'une utilisation de l'outil mathématique et informatique dans leur vie professionnelle.

Pour ce type de concours, la communication qui s'établit entre le candidat et son jury est primordiale : il convient donc de valoriser cet aspect. À ce titre, écrire trop de détails au tableau est contreproductif, il est préférable de s'adresser plus souvent aux examinateurs, et de faire preuve de conviction.

Selon les termes de l'arrêté du 26 juillet 2005 : *Outre les objectifs de l'épreuve d'admission du concours externe, l'épreuve doit aussi permettre au candidat de démontrer qu'il a réfléchi à l'apport que son expérience professionnelle constitue pour l'exercice de son futur métier et dans ses relations avec l'institution scolaire, en intégrant et en valorisant les acquis de son expérience et de ses connaissances professionnelles à la problématique du dossier et dans ses réponses aux questions du jury.*

4.1 Pour la première épreuve : l'épreuve d'exposé de leçon

Le candidat tire au sort une enveloppe proposant deux sujets. Il choisit un de ces deux sujets qu'il prépare sans document pendant 2 heures. À l'issue de sa préparation le candidat expose au jury le thème traité.

Il s'agit d'un exposé de connaissances et non pas d'une séquence d'enseignement effectuée face à une classe fictive.

L'exposé est fait au niveau souhaité par le candidat mais il doit témoigner d'un bon niveau en mathématiques. Il paraît en effet essentiel que le candidat montre qu'il domine le contenu du sujet et qu'il maîtrise le niveau auquel il se situe. Ce sont les connaissances du candidat qui sont évaluées, la rigueur de son raisonnement et de son expression, la cohérence des différentes parties de son développement : objectifs définis de manière précise, pré-requis éventuels identifiés, démarche logique, progressive et argumentée aboutissant aux objectifs contenus dans le sujet proposé. L'exposé doit donner lieu à au moins une démonstration détaillée d'un résultat énoncé. Le candidat doit veiller à la rigueur et à la précision de cette présentation.

Bien évidemment, le jury est sensible à la bonne organisation et la bonne présentation de ce qui reste écrit au tableau. L'écriture doit être lisible : le candidat est en général libre d'effacer un tableau qu'il a rempli, afin de poursuivre son exposé. Certaines démonstrations peuvent être exposées oralement : cela permet d'écrire moins, et de se tourner plus vers le jury. Le candidat est souvent amené à effectuer des figures au tableau, en utilisant le matériel mis à sa disposition (règle, équerre, compas, craies de couleur), ou à présenter des illustrations sur transparent ou sur calculatrice. La rétroprojection est mise en place par le jury, de sorte que les candidats n'ont pas à s'inquiéter de ces questions matérielles.

Lors de l'entretien, le jury amène le candidat à apporter un certain nombre de précisions et à faire d'éventuelles corrections. Il peut également demander la justification de certains résultats. Outre les connaissances mathématiques attendues, la qualité de l'écoute et de la compréhension des questions posées permet également d'évaluer la capacité du candidat à communiquer. Le jury valorisera donc un candidat qui s'attache à répondre aux questions avec précision et concision.

Les questions qui sont alors posées par le jury ne visent en rien à déstabiliser le candidat, mais au contraire à lui donner la possibilité de corriger certaines erreurs ou imprécisions, d'apporter des compléments sur des points qu'il aurait passés sous silence, de valoriser des acquis dont il ne soupçonne parfois pas l'intérêt.

Le jury est parfaitement conscient du temps écoulé depuis l'acquisition des connaissances initiales. Toutefois, l'absence de maîtrise du calcul algébrique a été trop souvent constatée, ainsi les erreurs sur la nature et la définition des fonctions usuelles : confusion entre fonctions exponentielles et puissances, définition de la fonction logarithme népérien autrement que par le bouton adéquat de la calculatrice...

Ce qui a été recherché chez les candidats, c'est la capacité à communiquer avec leurs futurs élèves, collègues et formateurs, à mettre à jour leurs connaissances un peu anciennes, apporter leur propre expérience et accepter de tirer profit des conseils, voire des critiques, quel qu'ait été leur parcours scolaire et universitaire antérieur, parfois prestigieux.

4.2 Pour la seconde épreuve : l'épreuve sur dossier

La seconde épreuve, de 45 minutes au maximum, qui se déroule le lendemain matin sur un thème commun à tous les candidats convoqués le jour même, consiste à répondre précisément aux questions posées à propos d'un exercice donné par le jury, puis à proposer à son tour des exercices sur un thème connexe, thème lui aussi bien explicité par le sujet.

Le candidat expose pendant 25 minutes au maximum. L'entretien qui suit a une durée d'au moins 20 minutes. Au cours de cet entretien, les candidats sont invités à évoquer leur parcours professionnel, et le profit qu'ils pourront tirer de leur expérience dans l'exercice de leur futur métier.

La fiche que le candidat remet au jury présente la rédaction d'une question précise ainsi qu'un choix d'exercices proposés par le candidat sur le thème étudié.

Les erreurs le plus souvent constatées consistent à présenter une solution de l'exercice du jury, alors qu'il s'agit plutôt de dégager les méthodes utiles à sa résolution, et de rappeler quels outils mathématiques sont à l'œuvre dans celui-ci. De même, présenter un exercice ne signifie pas écrire son énoncé exhaustif au tableau, ni détailler son corrigé, mais indiquer le but de l'exercice, éventuellement l'illustrer par des figures soignées au tableau, ou par l'usage de la calculatrice, et préciser les notions que cet exercice permet de manipuler.

Le jury déplore qu'un certain nombre de candidats n'aient pas mis à profit le temps d'exposé pour présenter les objectifs des exercices proposés en identifiant de manière précise les théorèmes et outils mis en jeu. Le recours à des énoncés rigoureux et l'usage du tableau mis à disposition des candidats s'avèrent souvent judicieux. Le choix des énoncés d'exercices se rapportant aux thèmes traités n'est pas toujours argumenté. Il est parfois même peu pertinent. Les propositions d'exercices faisant appel à des outils différents de ceux en jeu dans l'exercice candidat sont valorisées.

L'entretien conduit le jury à faire préciser la rédaction de certaines parties, permettant ainsi au candidat de faire valoir ses qualités pédagogiques. Il est regrettable que cet exercice révèle des insuffisances mathématiques et il convient de rappeler aux candidats la nécessité de ne proposer que des exercices dont ils maîtrisent la résolution.

L'entretien permet également au candidat de décrire les responsabilités et les activités qui lui ont été confiées en faisant valoir l'apport que son expérience professionnelle constitue pour l'exercice du futur métier envisagé.

L'expérience professionnelle d'un candidat pourrait par exemple souvent utilement être exploitée dans le cadre de travaux pluridisciplinaires liés à la problématique du dossier : il appartient au candidat de le souligner et de l'illustrer.

L'entretien doit aussi permettre au jury d'évaluer l'aptitude du candidat à présenter sa motivation et à se projeter dans le métier de professeur de mathématiques. La qualité de l'expression orale est prise en compte.

Cette épreuve sur dossier permet donc au candidat de prouver :

a) qu'il connaît les contenus d'enseignement et sait les illustrer ;

b) qu'il a réfléchi aux finalités et à l'évolution de la discipline ainsi que sur les relations de celle-ci aux autres disciplines ;

c) qu'il a les aptitudes à l'expression orale, à l'analyse, à la synthèse et à la communication.

5 Conclusion

À l'oral, la seconde épreuve n'a pas permis de réellement mettre en valeur les apports spécifiques de ces nouveaux candidats relatifs à leur carrière professionnelle précédente. Une certaine timidité a pu les gêner, ou pour la plupart, un manque de réflexion préalable, en particulier pour ceux qui, parmi eux, avaient été employés dans différents métiers proches de l'éducation.

Les candidats admis ont fait preuve d'une grande régularité dans leurs résultats aux différentes épreuves. Ils ont de plus montré une motivation profonde et sérieuse pour le métier auquel ils prétendaient.

Le jury suggère aux futurs candidats de mettre d'une façon plus éclatante leurs spécificités en valeur, et espère qu'ils bénéficieront d'une préparation de qualité.

la session 2010

La session 2010 se déroulera selon les mêmes modalités que celles de la session 2009. Les modèles de calculatrices disponibles lors des épreuves orales seront comme en 2009 :

Casio Classpad 300
Hewlett-Packard 49g (à ne pas confondre avec le modèle 49g+)
Texas Instruments Voyage 200
Texas Instruments Nspire CAS (à ne pas confondre avec le modèle Nspire)

FIN DU RAPPORT