ministère éducation nationale

Secrétariat Général

Direction générale des ressources humaines

Sous-direction du recrutement

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Concours du second degré – Rapport de jury

Session 2009

C.A.P.E.S. interne et C.A.E.R.

MATHÉMATIQUES

Rapport de jury présenté par Brigitte BAJOU,

inspectrice générale de l'Éducation nationale, Présidente du Jury

Les rapports des jurys des concours sont établis sous la responsabilité des présidents de jury

Table des matières

1. L’ÉVOLUTION DES EFFECTIFS

1.1. Le CAPES interne

L'effectif des candidats inscrits au CAPES interne a diminué en 2009, pour la deuxième année consécutive, avec 117 candidats inscrits de moins qu’en 2008, ce qui représente une baisse de 7,6% par rapport à la précédente session.

Évolution des inscrits au CAPES interne

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Effectif	1156	1572	1780	1704	1546	1429
Variation / année précédente	+31,8%	+36%	+13,2%	– 4,3%	– 9,3%	–7.6%

Répartition des candidats par profession (2009)

Profession	Admissibles	Admis
Enseignant titulaire du MEN	55	23
Agent non titulaire du MEN	192	85
Agent fonction publique hors MEN	17	10
Stagiaire en situation établ enseignement public	1	0
TOTAL	**265**	**118**

La catégorie de candidats la plus importante est toujours celle des enseignants contractuels (non titulaires) du second degré, environ 72% des admissibles et des admis.
Les enseignants titulaires des premier et second degrés (PLP, adjoints d’enseignement, stagiaires en situation, professeurs des écoles et instituteurs, certifiés d’autres disciplines) constituent la deuxième force en terme d’effectif, environ 20% des candidats admis.

Le pourcentage de présents par rapport au nombre d’inscrits est de 72,6%, en légère hausse par rapport à l’année précédente (69,1% en 2008).

Répartition des candidats par date de naissance (2009)

Année de naissance	Admissibles	Admis
Entre 1957 et 1966	18	4
Entre 1967 et 1970	22	8
Entre 1971 et 1973	35	18
1974-1975	42	21
1976-1077	42	25
1978-1979	53	21
1980-1981	27	11
1982-1983	20	8
1984-1985	6	2
TOTAL	**265**	**118**

1.2. Le CAERPC

Evolution des inscrits au CAERPC

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Effectif	495	520	568	615	671	618
Variation / année précédente	–5,7%	+ 5,1%	+ 9,2%	+ 8,3%	+ 9,1%	–7,9%

Pour ce concours, l'effectif des inscrits a également diminué cette année (–7,9% par rapport à celui de la session 2008).
Le pourcentage de présents par rapport au nombre d'inscrits est de 81,9%, sensiblement égal à celui de l'année passée.
Le taux de réussite globale en 2009 est de 29,6%, et cette année, tous les postes mis au concours ont été pourvus. Ce point est commenté au paragraphe 3.

Répartition des candidats par date de naissance (2009)

Année de naissance	**Admissibles**	**Admis**
Entre 1961 et 1966	11	9
Entre 1967 et 1970	14	7
Entre 1971 et 1973	21	13
1974-1975	19	12
1976-1077	27	21
1978-1979	47	33
1980-1981	39	34
1982-1983	26	19
1984	2	2
TOTAL	**206**	**150**

2. LES MODALITÉS DU CONCOURS

Pour le CAPES interne comme pour le CAERPC de mathématiques, les modalités consistent en une épreuve écrite d'admissibilité d'une durée de cinq heures (coefficient 1) et, pour les candidats admissibles, en une épreuve orale d'admission d'une durée maximale de soixante-quinze minutes (coefficient 2). L'épreuve orale est constituée d'un exposé de trente minutes maximum suivi d'un entretien de quarante-cinq minutes maximum. Les modalités du concours sont définies par l'arrêté du 2 mars 2000, publié au BOEN n° 15 du 20 avril 2000. Le programme est constitué des programmes des collèges et des lycées d'enseignement général et technologique en vigueur au 1er janvier de l'année du concours. Les commentaires de ce programme stipulent que *« les candidats doivent pouvoir situer les contenus des programmes de l'enseignement secondaire dans une perspective historique, à partir de l'apport de quelques grands mathématiciens »*, et qu'ils *« doivent pouvoir décrire et argumenter sur la manière dont l'enseignement des mathématiques s'inscrit dans la globalité des enseignements : articulation avec les autres disciplines, maîtrise de la langue, éducation à la* *citoyenneté, etc* ». Ils précisent également certains modules des sections de techniciens supérieurs qui doivent être connus.

3. POSTES, ADMISSIBILITÉ, ADMISSION

	CAPES interne	**CAERPC**
Postes	118	150
Inscrits	1429	618
Présents à l'écrit	1037	506
Barre d'admissibilité	10,56	8.91
Admissibles	265	206
Présents à l'oral	237	199
Barre d'admission	11,4	10,02
Admis	118	150

Comme l'an passé, le CAPES interne demeure un concours très sélectif puisque seulement un candidat sur quatre parmi les candidats présents à l'écrit a été déclaré admissible et à peine plus d'un candidat sur dix est finalement admis.

Pour le CAER, l'évolution est différente. En effet, le nombre de postes est resté en 2009 le même qu'en 2008 mais le nombre de candidats a diminué (environ −8%) et la qualité des prestations des candidats admissibles s'est améliorée conduisant le jury à pourvoir tous les postes, ce qui ne s'était pas produit les années précédentes. Le pourcentage de candidats reçus par rapport au nombre de candidats présents est ainsi de 29,6%.

4. L'ÉPREUVE ÉCRITE

Le sujet est systématiquement composé de deux problèmes concernant deux domaines distincts des mathématiques, généralement analyse, géométrie ou probabilités. Dans chacun des deux problèmes, les questions sont de difficulté très progressive et abordent des domaines et des capacités variés.

__4.1 . La composition écrite__

SESSION DE 2009

concours interne de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : mathématiques

Composition de mathématiques

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des représentations graphiques interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les deux problèmes proposés sont indépendants ; ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

N.B : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Problème 1

Le théorème de Morley

C'est un théorème qui permet de fabriquer de la symétrie à partir de rien. Il a été démontré par Frank Morley en 1898, et on peut l'énoncer comme ceci : **« Dans un triangle non plat, trois points pris parmi les points d'intersection des trisectrices issues des sommets du triangle forment un triangle équilatéral »**.

Ce problème en propose trois démonstrations différentes.

Les trois parties sont indépendantes et les résultats de l'une ne peuvent donc pas être utilisés dans l'autre.

Notations

On travaille dans le plan affine euclidien.

Si O, A et B sont trois points du plan (avec A ≠ 0 et B ≠ 0), on note $\widehat{\mathrm{AOB}}$ (ou $\widehat{\mathrm{BOA}}$, ou même $\widehat{\mathrm{O}}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'angle géométrique saillant (mesuré dans $[0\,;\,\pi]$) délimité par les demi-droites [OA) et [OB).

Par abus de notation, on note encore $\widehat{\mathrm{AOB}}$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

Soit d une droite du plan passant par O, on dira que d est une trisectrice de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{AOB}}$ si et seulement s'il existe un point M de d, distinct de O, tel que $\widehat{\mathrm{AOM}} = \frac{1}{3}\widehat{\mathrm{AOB}}$ ou $\widehat{\mathrm{AOM}} = \frac{2}{3}\widehat{\mathrm{AOB}}$ (de sorte que tout angle géométrique de mesure non nulle admet exactement deux trisectrices).

La distance entre deux points A et B est notée AB.

Partie A : Première démonstration

I. Préliminaires

Soit ABC un triangle non plat.

1. Construire à la règle et au compas le centre du cercle inscrit au triangle ABC, noté I.

On laissera apparentes toutes les lignes de construction.

2. Prouver l'égalité : $\widehat{\mathrm{BIC}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}$.

3. On note A_1 le point d'intersection de la bissectrice intérieure du triangle ABC issue du sommet A avec le segment [BC].

Prouver que si J est un point intérieur au triangle ABC, situé sur la bissectrice issue de A (c'est-à-dire un point du segment $[AA_1]$) vérifiant l'égalité $\widehat{BJC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}$ alors le point J est confondu avec le point I.

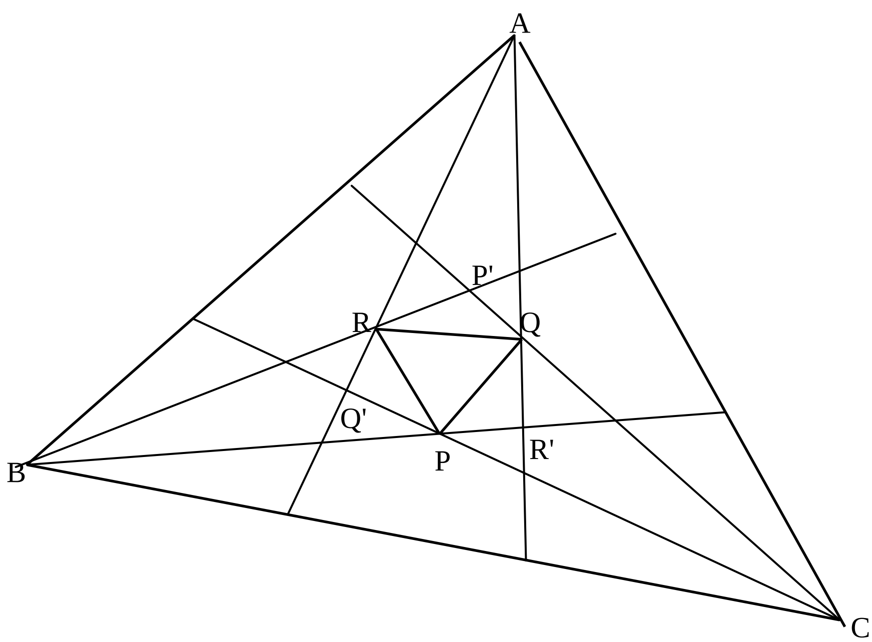
II. Construction auxiliaire

Soit PQR un triangle équilatéral et soient *u*, *v*, *w* trois nombres réels de l'intervalle $]0\,;\,\frac{\pi}{3}[$ tels que $u + v + w = \frac{2\pi}{3}$. On construit sur les côtés du triangle PQR, et à l'extérieur de ce triangle, trois triangles :

- $P'QR$ isocèle en P' et dont les angles à la base ont pour mesure *u*,
- $PQ'R$ isocèle en Q' et dont les angles à la base ont pour mesure *v*,
- PQR' isocèle en R' et dont les angles à la base ont pour mesure *w*.

1.1. Calculer $\widehat{Q'RQ} + \widehat{R'QR}$ en fonction de *u*.

1.2 Montrer que les droites (QR') et $(Q'R)$ sont sécantes. On notera A leur point d'intersection. On notera de même B le point d'intersection des droites (RP') et $(R'P)$ et C le point d'intersection des droites (PQ') et $(P'Q)$.



Dans la suite de la partie A on pourra se fier au schéma ci-dessus en ce qui concerne les positions relatives des différents points sur une droite donnée, ou les positions relatives des droites considérées, sans chercher à les justifier.

1.3. Montrer que $\widehat{\mathrm{Q'PB}} = u$. En déduire la valeur de $\widehat{\mathrm{CPR'}}$.

De même, on montre que $\widehat{\mathrm{R'QC}} = v$ *et* $\widehat{\mathrm{P'RA}} = w$ *et on en déduit la valeur de* $\widehat{\mathrm{AQP'}}$ *et de* $\widehat{\mathrm{BRQ'}}$.

2.1. Montrer que la droite (PP′) est une des médiatrices du triangle P′RQ.

2.2. En déduire que (PP′) est une bissectrice du triangle BP′C.

3.1. Écrire $\widehat{\mathrm{BPC}}$ et $\widehat{\mathrm{BP'C}}$ en fonction de u.

3.2. Montrer que $\widehat{\mathrm{BPC}} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\widehat{\mathrm{BP'C}}}{2}$.

4. Montrer que P appartient aux bissectrices des angles $\widehat{\mathrm{P'BC}}$ et $\widehat{\mathrm{P'CB}}$.

De même, on montre que Q *appartient aux bissectrices des angles* $\widehat{\mathrm{Q'CA}}$ *et* $\widehat{\mathrm{Q'AC}}$, *et que* R *appartient aux bissectrices des angles* $\widehat{\mathrm{R'AB}}$ *et* $\widehat{\mathrm{R'BA}}$.

5. Dresser, en la justifiant, la liste des six trisectrices du triangle ABC.

6. Donner les mesures des angles $\widehat{\mathrm{CAB}}$, $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{BCA}}$ en fonction de u, v, w.

III. Démonstration du théorème

Soient $A_1B_1C_1$ un triangle non plat et u, v, w les réels définis par les relations suivantes :

$$\widehat{A_1} = \pi - 3u,\ \widehat{B_1} = \pi - 3v,\ \widehat{C_1} = \pi - 3w.$$

1. Calculer $u + v + w$.

2. Soit PQR un triangle équilatéral quelconque. La construction de la question II, à partir du triangle PQR et des valeurs de u, v et w ici définies, aboutit à un triangle ABC.

Justifier que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

3. Démontrer le théorème de Morley.

Partie B : Deuxième démonstration

I. La relation des sinus

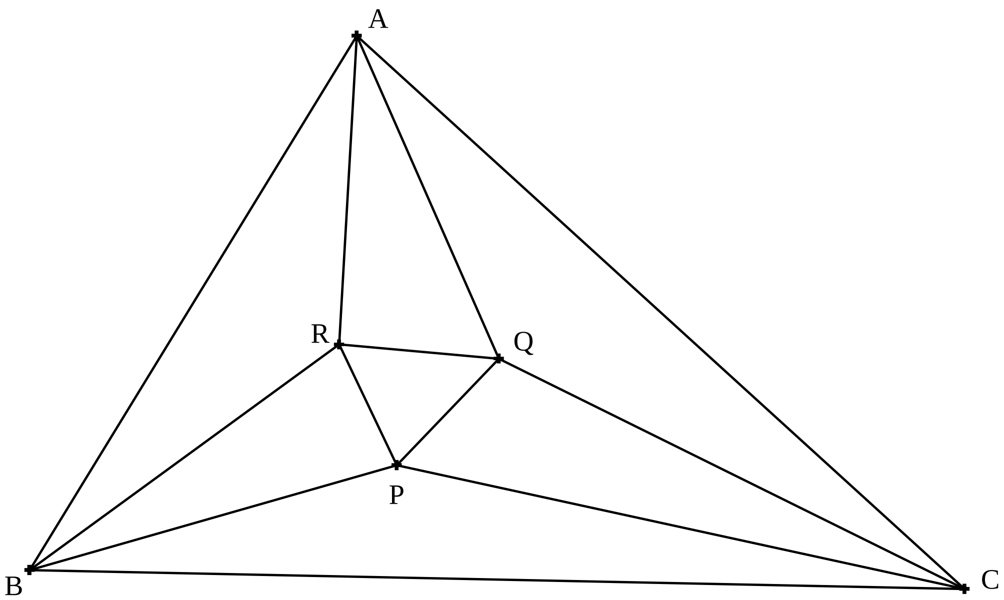
Soit ABC un triangle non plat, O le centre de son cercle circonscrit et r le rayon de son cercle circonscrit. On note a = BC, b = AC, c = AB.

1. Montrer que $\dfrac{a}{\sin \widehat{\mathrm{A}}} = 2r$ (on distinguera les cas $\widehat{\mathrm{A}} < \dfrac{\pi}{2}$, $\widehat{\mathrm{A}} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\widehat{\mathrm{A}} > \dfrac{\pi}{2}$).

2. En déduire la relation dite des sinus : $\dfrac{a}{\sin \widehat{\mathrm{A}}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{\mathrm{B}}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{\mathrm{C}}} = 2r$.

II. Démonstration du théorème de Morley

Soit ABC un triangle non plat quelconque. On note P, Q, R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets B et C, C et A, A et B, tels que définis par la figure ci-dessous. Soient α, β, γ les réels définis par $\widehat{\mathrm{A}} = 3\alpha$, $\widehat{\mathrm{B}} = 3\beta$, $\widehat{\mathrm{C}} = 3\gamma$.



Dans la suite de la partie B on pourra se fier au schéma ci-dessus en ce qui concerne les positions relatives des différents points sur une droite donnée, ou les positions relatives des droites considérées, sans chercher à les justifier.

1. En appliquant la relation des sinus aux triangles ABR et ABC, montrer que :

$$\mathrm{AR} = 2r\sin\beta\frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

2. Montrer que, pour tout nombre réel θ, on a la relation suivante : $\sin 3\theta = \sin\theta\,(4\cos^2\theta - 1)$.

On rappelle que, pour tout couple de réels (p, q), on a la relation suivante :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

3. Montrer que : $$4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)=\frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

4. Montrer que : $$\text{AR} = 8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right).$$

5. En déduire que : $$\text{AQ} = 8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$$

et que : $$\frac{\text{AR}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}=\frac{\text{AQ}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}=8r\ \sin\beta\ \sin\gamma.$$

6. On considère le point M de la demi-droite [AQ) vérifiant $\widehat{\text{ARM}}=\frac{\pi}{3}+\beta$.

6.1. Calculer $\widehat{\text{AMR}}$.

6.2. En appliquant la relation des sinus dans le triangle ARM, montrer AM = AQ.

6.3. Montrer que les points M et Q sont confondus

6.4. Prouver les égalités suivantes : $\widehat{\text{ARQ}}=\frac{\pi}{3}+\beta$ et $\widehat{\text{AQR}}=\frac{\pi}{3}+\gamma$.

7. Montrer que RQ = 8 r sin α sin β sin γ.

8. Conclure.

Partie C : Troisième démonstration

La démonstration qui suit est basée sur un article d'Alain Connes datant de 1998 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Chaque point M (x, y) du plan est aussi repéré par son affixe, c'est-à-dire le nombre complexe $z = x + iy$.

Les angles de vecteurs sont orientés. On appelle mesure principale d'un angle de deux vecteurs non nul, celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

Le complexe égal à exp $(2i\frac{\pi}{3})$ est noté j.

I. Préliminaires

1. Résoudre l'équation $z^3 - 1 = 0$ dans $\mathbf{C}$.
2. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. On considère trois points P, Q, R du plan complexe d'affixes respectifs p, q, r.

Prouver que le triangle PQR est équilatéral, avec l'angle orienté $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)$ de mesure principale égale à $\dfrac{\pi}{3}$, si et seulement si $p + j\,q + j^2\,r = 0$.
Dans ce cas, on dit que le triangle PQR est un triangle équilatéral direct.

4. Montrer que le triangle PQR est équilatéral, avec l'angle orienté $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)$ de mesure principale égale à $-\dfrac{\pi}{3}$, si et seulement si $p + j^2\,q + j\,r = 0$.

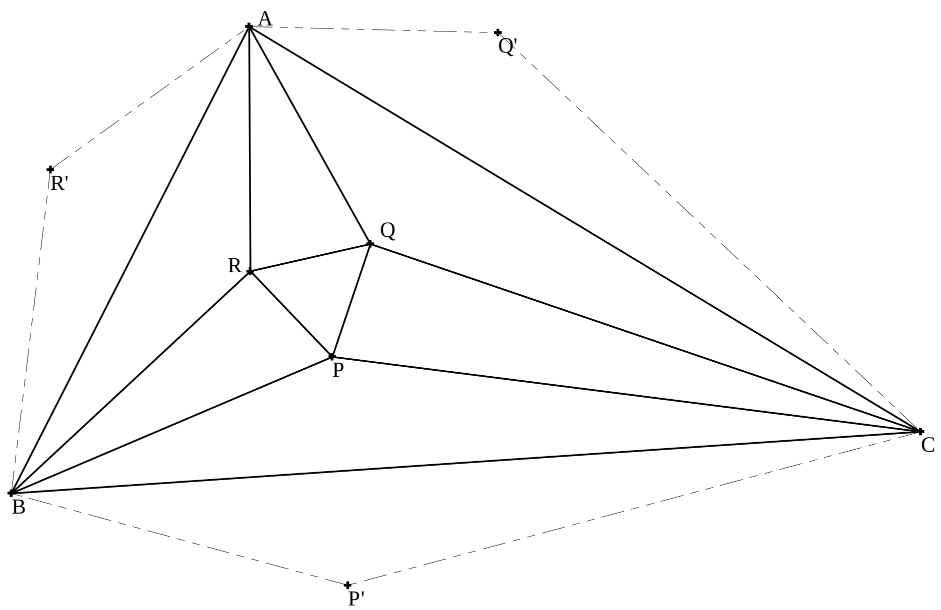
Dans ce cas, on dit que le triangle PQR est un triangle équilatéral indirect.

II. Généralités

On considère un triangle non plat ABC que l'on suppose direct c'est-à-dire tel que la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ soit comprise strictement entre 0 et π.

On note 3α, 3β et 3γ les mesures principales respectives des angles orientés $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$; elles appartiennent donc toutes à l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

On note P, Q, R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets adjacents B et C, C et A, A et B, tels que définis par la figure ci-dessous.



On note P′, Q′ et R′ les symétriques des points P, Q et R respectivement par rapport aux droites (BC), (AC) et (AB), et A′ le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

On rappelle qu'une rotation de centre Ω et d'angle θ ($\theta \in\ ]0\,;2\pi[$) est une similitude directe de centre Ω et de rapport $e^{i\theta}$.

On appelle f la rotation de centre A et d'angle 2α, g la rotation de centre B et d'angle 2β et h la rotation de centre C et d'angle 2γ.

1. Calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{CP}},\overrightarrow{\mathrm{CP'}}\right)$.

2. Montrer que P est un point fixe de la transformation g o h, R un point fixe de la transformation f o g et Q un point fixe de la transformation h o f.

III. Quelques calculs numériques

Soit M un point du plan d'affixe z et φ une transformation du plan. Par abus de langage on note encore φ (z) l'affixe du point φ (M).

1. Justifier l'existence de six nombres complexes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 tels que, pour tout nombre complexe z : $f(z) = a_1 z + b_1$, $g(z) = a_2 z + b_2$ et $h(z) = a_3 z + b_3$.

2. Prouver que ces nombres complexes vérifient les propriétés suivantes :

$$a_1 a_2 a_3 = j, \quad a_1 a_2 \neq 1, \quad a_2 a_3 \neq 1 \quad \text{et} \quad a_3 a_1 \neq 1.$$

3. Prouver que les nombres p, q et r vérifient les égalités suivantes :

$$p = \frac{a_2 b_3 + b_2}{1 - a_2 a_3}, \quad q = \frac{a_3 b_1 + b_3}{1 - a_3 a_1} \quad \text{et} \quad r = \frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1 a_2}.$$

4. *Un calcul (un peu lourd, mais faisable à la main) donne alors les deux résultats qui suivent.*

- *D'une part, pour tout nombre complexe z, on a :*

$$\left(f^3 \circ g^3 \circ h^3\right)(z) = \left(a_1 a_2 a_3\right)^3 z + \left(a_1^2 + a_1 + 1\right)b_1 + a_1^3\left(a_2^2 + a_2 + 1\right)b_2 + a_1^3 a_2^3\left(a_3^2 + a_3 + 1\right)b_3.$$

- *D'autre part, en tenant compte du fait que $a_1 a_2 a_3 = j$, on a :*

$$p + jq + j^2 r = -j^2 \frac{a_3\left[\left(a_1^2 + a_1 + 1\right)b_1 + a_1^3\left(a_2^2 + a_2 + 1\right)b_2 + a_1^3 a_2^3\left(a_3^2 + a_3 + 1\right)b_3\right]}{a_1\left(1 - a_2 a_3\right)\left(1 - a_3 a_1\right)\left(1 - a_1 a_2\right)}.$$

On admet ces deux résultats.

4.1. Prouver que f^3 o g^3 o h^3 est une translation notée τ.

4.2. Déterminer géométriquement l'image du point A par la translation τ.

En déduire que $f^3 \circ g^3 \circ h^3$ est égale à l'application identité.

4.3. Démontrer le théorème de Morley dans le cas d'un triangle ABC direct puis dans le cas d'un triangle ABC indirect.

FIN

Problème 2

Interpolation polynomiale, méthode des différences finies

La Partie I est indépendante des parties suivantes

En revanche les parties II, III et IV sont liées.

Partie I. Approximation d'une fonction sur un intervalle

Le plan est muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Etude de la fonction *f*

1.1. Etudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

1.2. Tracer la courbe représentative de la fonction f, avec une unité graphique de 4 cm.

2. Une première approximation

2.1. Déterminer la fonction polynomiale R de degré 1 vérifiant : $R(1) = \dfrac{1}{2}$ et $R(0) = 1$.

2.2. Déterminer la fonction polynomiale Q de degré 1 vérifiant : $Q(-1) = \dfrac{1}{2}$ et $Q(0) = 1$.

2.3. On note g la fonction affine par morceaux, définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ par :

- pour tout réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, $g(x) = Q(x)$;
- pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $g(x) = R(x)$.

Tracer la courbe représentative de la fonction g sur le même graphique que précédemment.

2.4. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, on a : $g(x) \leq f(x)$.

2.5. Calculer l'intégrale $I_g = \int_{-1}^{+1} g(x)\,dx$ et en déduire une minoration de l'intégrale $I_f = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$.

3. Interpolation quadratique

Dans cette partie on cherche à approcher la fonction f par une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

3.1. Montrer que, s'il existe une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à 2 qui vérifie les relations suivantes :

$$P(-1) = f(-1),\ P(0) = f(0),\ P(1) = f(1),$$

alors elle est unique.

3.2. On considère les fonctions polynomiales L_{-1}, L_0 et L_1 définies pour tout réel x par :

$$L_{-1}(x) = \frac{1}{2}x(x-1),\ L_0(x) = -(x-1)(x+1) \text{ et } L_1(x) = \frac{1}{2}x(x+1).$$

Calculer pour tout entier i de $\{-1, 0, 1\}$ et pour tout entier j de $\{-1, 0, 1\}$ le réel $L_i(j)$.

3.3. On note P la fonction polynomiale définie pour tout nombre réel x par :

$$P(x) = f(-1)\, L_{-1}(x) + f(0)\, L_0(x) + f(1)\, L_1(x).$$

Prouver, sans expliciter la fonction P, que c'est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant les relations suivantes :

$$P(-1) = f(-1),\ P(0) = f(0),\ P(1) = f(1).$$

3.4. Quel résultat peut-on énoncer à l'aide des questions 3.1. et 3.3.

3.5. Expliciter la fonction P et prouver que pour tout réel x de l'intervalle $[-1 ; 1]$ on a :

$$f(x) \leq P(x).$$

3.6. Tracer, toujours sur le même graphique que précédemment, la courbe représentative de la fonction P.

3.7. Donner une majoration de l'intégrale $I_f = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx$.

3.8. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de l'intégrale $I_f = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx$.

4. Soient y_0, y_1, y_2 trois nombres réels fixés.

On considère les fonctions polynomiales L_0, L_1, L_2 définies de la façon suivante :

pour chaque entier i compris entre 0 et 2 et pour tout nombre réel x, $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{(x-j)}{i-j}$.

En appliquant une méthode analogue à celle mise en œuvre à la question 3, prouver qu'il existe une unique fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à 2 telle que, pour tout entier i de $\{0, 1, 2\}$, $P(i) = y_i$.

Partie II. Méthode de Newton

Soient (y_0, y_1, y_2, y_3) quatre nombres réels fixés.

Dans cette partie, on se propose de déterminer quatre fonctions polynomiales P_0, P_1, P_2, P_3 telles que :

- ♦ P_0 est constante et vérifie : $P_0\,(0) = y_0$.
- ♦ P_1 est de degré inférieur ou égal à 1, $P_1\,(0) = y_0$ et $P_1\,(1) = y_1$.
- ♦ P_2 est de degré inférieur ou égal à 2, $P_2\,(0) = y_0$, $P_2\,(1) = y_1$, $P_2\,(2) = y_2$.
- ♦ P_3 est de degré inférieur ou égal à 3, $P_3\,(0) = y_0$, $P_3\,(1) = y_1$, $P_3\,(2) = y_2$ et $P_3\,(3) = y_3$.

Pour tout entier n de $\{0, 1, 2, 3\}$, si la fonction P_n vérifie les propriétés correspondantes ci-dessus, on dira qu'elle vérifie la propriété $(\mathcal{E}_n)$.

On introduit maintenant les notations suivantes :

$\Delta^0 y_0 = y_0$			
	$\Delta^1 y_0 = y_1 - y_0$		
$\Delta^0 y_1 = y_1$		$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0$	
	$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$\Delta^0 y_2 = y_2$		$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$	
	$\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$		
$\Delta^0 y_3 = y_3$			

1. Premiers résultats

1.1. Expliciter l'unique fonction polynomiale P_0 vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_0)$.

1.2. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale P_1 vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_1)$ et qu'elle peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P_1\,(x) = \Delta^0 y_0 + (\Delta^1 y_0)\, x.$$

1.3. Calculer $\Delta^2 y_0$ et $\Delta^3 y_0$.

2. Détermination de la fonction P_2

On suppose jusqu'à la fin de la question (II.3.3) que P_2 est l'unique fonction polynomiale vérifiant la propriété $(\mathcal{E}_2)$, et on note Q_2 la fonction polynomiale définie pour tout réel x par :

$$Q_2\,(x) = P_2\,(x) - P_1\,(x).$$

2.1. Que peut-on dire du degré de Q_2 ?

2.2. Calculer $Q_2\,(0)$ et $Q_2\,(1)$. En déduire qu'il existe un réel c_2 tel que $Q_2\,(x) = c_2\, x\,(x - 1)$.

2.3. Montrer que ce réel c_2 est égal à $\dfrac{\Delta^2 y_0}{2}$.

2.4. Montrer que la fonction polynomiale P_2 vérifiant la propriété ($\mathcal{E}_2$) peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P_2(x) = \Delta^0 y_0 + (\Delta^1 y_0)\, x + (\Delta^2 y_0)\frac{x(x-1)}{2}.$$

3. Détermination de la fonction P_3

En s'inspirant de la méthode précédente, justifier qu'il existe une fonction polynomiale P_3 vérifiant la propriété ($\mathcal{E}_3$) et qu'elle peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P_3(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right)x + \left(\Delta^2 y_0\right)\frac{x(x-1)}{2} + \left(\Delta^3 y_0\right)\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}.$$

On admet que cette fonction P_3 est l'unique fonction polynomiale vérifiant la propriété ($\mathcal{E}_3$).

Plus généralement, on peut prouver le théorème suivant, établi pour $n = 3$ à la question précédente et admis dans la suite de ce problème.
Soit n un entier naturel strictement positif ($n > 0$) et ($y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$) $n + 1$ nombres réels.
Il existe une unique fonction polynomiale P_n de degré inférieur ou égal à n vérifiant la propriété suivante :

pour tout entier naturel $k \leq n$, $P_n(k) = y_k$,

et cette fonction peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P_n(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right)x + \left(\Delta^2 y_0\right)\frac{x(x-1)}{2} + \cdots + \left(\Delta^n y_0\right)\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!},$$

où la notation $\Delta^k y_0$ est définie par la relation de récurrence suivante :

- *pour tout entier naturel $j \leq n$, $\Delta^0 y_j = y_j$ et*
- *pour tout entier naturel non nul $k \leq n$ et pour tout entier naturel $j \leq n - k$,*

$$\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j.$$

Partie III. Résolution d'une équation aux différences finies

Soit Q une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 et α un réel.

Le but de cette partie est de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction polynomiale P telle que $P(0) = \alpha$ et pour tout nombre réel x, $P(x + 1) - P(x) = Q(x)$.
On dira d'une telle fonction P qu'elle vérifie la propriété ($\mathcal{C}_{Q,\alpha}$).

On rappelle qu'une fonction polynomiale de degré n (n entier ≥ 0) qui admet $(n + 1)$ racines distinctes est nulle.

On définit les fonctions polynomiales suivantes, pour tout réel x, par :

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = x,\ H_2(x) = \frac{x(x-1)}{2},\ H_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!},$$

$$\text{et } H_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}.$$

1. Question préliminaire : cas particulier de la fonction nulle et unicité

1.1. Montrer pour tout réel α l'existence et l'unicité d'une fonction polynomiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$ dans le cas où Q est la fonction nulle.

1.2. Montrer que s'il existe une fonction polynomiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$, alors elle est unique.

2. Cas général : analyse du problème

Soit Q une fonction polynomiale non nulle, de degré inférieur ou égal à 3, et α un réel.

On suppose dans cette partie l'existence d'une fonction polynomiale P vérifiant la propriété $(C_{Q,\alpha})$.

2.1. Prouver que P n'est pas une fonction constante.

2.2. On note m le degré de la fonction polynomiale P.

Prouver que le degré de la fonction polynomiale Q vérifiant, pour tout réel x, l'égalité $Q(x) = P(x + 1) - P(x)$ est inférieur ou égal à $m - 1$.

En déduire que m est inférieur ou égal à 4.

2.3. Prouver que P peut s'exprimer de façon unique sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) + a_3 H_3(x) + a_4 H_4(x).$$

On ne demande pas l'expression des coefficients a_k.

2.4. Calculer a_0.

2.5. Vérifier que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 4$, on a pour tout réel x :

$$H_k(x + 1) - H_k(x) = H_{k-1}(x)$$

2.6. En déduire une expression de $Q(x)$ en fonction des a_k et des $H_k(x)$.

3. Synthèse

Soit Q une fonction polynomiale non nulle de degré inférieur ou égal à 3 et α un réel.
On note, pour tout entier naturel $j \leq 3$, $y_j = Q(j)$.

3.1. Justifier qu'il existe une fonction polynomiale P vérifiant la propriété ($\mathcal{C}_{Q,\alpha}$) et que cette fonction peut s'exprimer sous la forme suivante pour tout réel x :

$$P(x) = \alpha + \left(\Delta^0 y_0\right) H_1(x) + \left(\Delta^1 y_0\right) H_2(x) + \left(\Delta^2 y_0\right) H_3(x) + \left(\Delta^3 y_0\right) H_4(x).$$

3.2. En déduire qu'il existe une unique fonction polynomiale P vérifiant la propriété ($\mathcal{C}_{Q,\alpha}$).

Partie IV. Somme des puissances 3ièmes des *k* premiers entiers

Le but de cette partie est de donner une formule, donnant pour tout entier naturel non nul k, la somme : $\sigma_k = 1^3 + 2^3 + \ldots k^3$ (avec par convention $\sigma_0 = 0$).
Précisément on pose $\sigma_0 = 0$ et, pour tout entier naturel k, $\sigma_{k+1} = \sigma_k + (k+1)^3$, ce qui est une définition par récurrence de la suite $(\sigma_k)_{k\geq 0}$.

On note Q la fonction polynomiale définie par $Q(x) = (x+1)^3$, et pour tout entier naturel $j \leq 3$, on note $y_j = Q(j)$.
On note P la fonction polynomiale qui vérifie :

$$P(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout réel } x,\ P(x+1) - P(x) = Q(x).$$

1. Montrer que pour tout entier naturel k non nul, on a $\sigma_k = P(k)$.
2. En déduire une expression de σ_k utilisant la notation $\Delta^k y_0$.
3. Calculer $\Delta^k y_0$ pour tout entier k compris entre 0 et 3.
4. Donner une expression simple de la somme σ_k en détaillant les calculs.

FIN

4.2. Commentaires sur la composition écrite

L'épreuve écrite de la session 2009 se composait de deux problèmes indépendants, le premier de géométrie, le second d'analyse. Le premier problème n'a été que partiellement abordé par de nombreux candidats, voire pas du tout. On constate par ailleurs de la part de nombreux candidats un manque de recul sur les deux sujets : les questions de synthèse ont été peu réussies.

Il est légitime d'attendre des candidats à un concours de recrutement d'enseignants qu'ils se montrent tout particulièrement attentifs à la correction de l'expression écrite, la précision du vocabulaire et des notations, la clarté et la rigueur de l'argumentation. Beaucoup de candidats, en particulier ceux déclarés admissibles, ont rendu des copies de bonne qualité relativement à la rédaction et à la présentation. Il reste malgré tout des copies négligées et exigeant de la part du correcteur des efforts de lecture trop importants. Il est en particulier déconseillé d'utiliser simultanément les couleurs rouge et vert que les correcteurs daltoniens n'arrivent pas à distinguer. On note également des fautes d'orthographe et de grammaire choquantes ainsi que de nombreuses imprécisions dans le vocabulaire et les notations mathématiques. Il ne faut pas oublier que l'acquisition par les élèves de la maîtrise de la langue est une mission de chaque enseignant quelle que soit sa discipline.
L'argumentation n'est également pas exempte de reproches : les hypothèses ne sont souvent pas explicitées, les raisonnements sont souvent incomplets, les équivalences fausses, les quantificateurs absents (on ne saurait accepter par exemple : « *Démontrons* $f(x) \leq P(x)$ »).
On constate trop souvent une inflation des conditions d'application des théorèmes ; or ce n'est pas au correcteur de choisir dans une liste celles qui sont nécessaires et suffisantes.
Dans ce qui suit, nous rappelons tout d'abord les conseils fondamentaux pour produire une copie correspondant aux attentes du jury d'un concours de recrutement d'enseignants, puis nous commentons plus précisément le sujet posé cette année.
Comme dans toute épreuve écrite de mathématiques, la règle du jeu est la même :
Il s'agit de résoudre le problème posé mais aussi de le rédiger avec soin, en vue de convaincre le correcteur qu'on l'a résolu.

Cela suppose en particulier le respect d'un certain nombre de règles :

- à chaque question, annoncer ce que l'on va montrer, comment on va le montrer et encadrer le résultat final
- considérer que tout ce qui est affirmé doit être justifié, même brièvement
- lors de l'utilisation d'un théorème, en vérifier précisément les hypothèses et annoncer la conclusion clairement.
- en Analyse, se soucier de l'existence de l'objet avant de le calculer (dérivées, quotients…)
- en Géométrie, lorsque cela est nécessaire, accompagner la rédaction d'une démonstration d'un extrait de la figure pour faciliter la lecture
- pour une question donnée, se limiter à une méthode de résolution sauf demande contraire de l'énoncé.
- lors de la rédaction d'une question « technique » (par exemple pour une résolution d'équation) présenter les calculs de façon lisible afin de faciliter la lecture du correcteur ; en particulier ne pas sauter d'étapes sans explication

- soigner la présentation et l'expression écrite

- ➢ souligner les points importants car cela facilite la lecture
- ➢ ne pas hésiter à sauter une ligne entre deux questions
- ➢ numéroter les questions traitées et les pages dans le bon ordre

♦ se munir évidemment du matériel nécessaire, en particulier calculatrice, règle et compas.

Par ailleurs, les erreurs suivantes observées sont à éliminer :

♦ Maîtrise de la langue : un candidat ne peut se permettre de multiplier des erreurs comme « *on résoud…* », « *on conclue…* », « *on a prouver…* », « *j'obtient…* »,

♦ Confusion entre objets mathématiques de natures différentes : fonction et courbe, fonction et nombre, point et abscisse, segment et longueur…
Exemples relevés en géométrie : « *la droite PP' au lieu de (PP')* » , « *segment RP* ».
Exemples relevés en analyse : « *fonction* $f(x)$ *au lieu de* f », « $1 + x^2$ *au lieu de* $x \mapsto 1 + x^2$ », « *f est paire, donc f admet un axe de symétrie* ».

♦ Des langages flous et/ou incorrects
Quelques exemples relevés : « *La médiatrice du triangle isocèle* », « *Dans le triangle BPC, [BP) et [CP) sont deux bissectrices* », « *Le système est une famille libre, il admet une solution* », « *Des angles consécutifs* », « *Soit (BP). Son angle est* π »…

♦ En logique élémentaire, par exemple, on trouve le raisonnement suivant :
« …$\deg Q \leq m - 1$ *et* $\deg Q \leq 3$ *donc* $m - 1 \leq 3$ ».

Problème 1

Ce problème propose trois démonstrations du théorème établi par Frank Morley en 1898. On peut l'énoncer comme ceci : « **Dans un triangle non plat, trois points pris parmi les points d'intersection des trisectrices issues des sommets du triangle forment un triangle équilatéral ».**
Les trois parties sont indépendantes et les résultats de l'une ne peuvent pas être utilisés dans l'autre.
Le problème a été très partiellement abordé, et de façon lacunaire : beaucoup de candidats n'ont traité que la partie **A**, puis sont allés grappiller quelques points dans les parties suivantes. Les questions les plus « délicates » ont été mal ou pas traitées. La synthèse finale de la troisième démonstration n'a jamais été menée à bien, les candidats ayant des lacunes importantes sur les similitudes.

Partie A
I.
I.1 Quelques rares candidats ne respectent pas la consigne de la construction à la règle et au compas.
Une grande majorité des candidats construisent les trois bissectrices, alors que deux suffisaient.
Quelques candidats confondent bissectrice et médiatrice.
I.2 Question abordée par la plupart des candidats. Certains se lancent sans discernement dans des calculs compliqués et perdent du temps. Certains manifestent des difficultés à gérer les unités d'angle usuelles que sont le radian et le degré.

I.3 Question peu étudiée et très mal réussie. La plupart des raisonnements sont faux, notamment celui qui consiste à affirmer que, si les angles $\widehat{BIC}$ et $\widehat{BJC}$ sont égaux, alors nécessairement les points I et J sont confondus.

II.

II.1.1 Question bien traitée en général.

II.1.2 La plupart des candidats conduisent un raisonnement par l'absurde en supposant que les droites (Q'R) et (QR') sont parallèles. Parmi eux, beaucoup écrivent alors sans le justifier que, sous cette hypothèse, on a l'égalité : $\widehat{Q'RQ}+\widehat{R'QR}=\pi$. Par ailleurs, il n'est pas rare de lire que, si les droites (Q′R) et (QR′) sont parallèles, alors elles sont nécessairement toutes deux perpendiculaires à (QR). Certains candidats font appel au point A dans leur argumentation, alors qu'il ne sera défini qu'ultérieurement comme l'intersection des deux droites (Q′R) et (QR').

Enfin, d'autres concluent en disant que si on avait $u = \dfrac{\pi}{3}$, alors le triangle P'QR serait équilatéral, ce qui est impossible car il est isocèle !

II.1.3 Dans leur grande majorité, les candidats affirment que « B, P et R' sont alignés » équivaut à « $\widehat{BPR'} = \pi$ » sans se soucier de la position relative des points.

En général, la preuve de l'égalité $\widehat{Q'PB} = u$ n'a pas soulevé de difficultés supplémentaires, mais les candidats ont perdu du temps pour en déduire la valeur de $\widehat{CPR'}$, en ne voyant pas que les angles $\widehat{Q'PB}$ et $\widehat{CPR'}$ étaient opposés par le sommet.

Plusieurs candidats se sont inutilement lancés dans la démonstration des égalités $\widehat{R'QC} = v$, $\widehat{P'RA} = w$, faute d'avoir correctement interprété la phrase de l'énoncé, écrite en italique :

« *De même, on montre que…* »..

II.2.1 et 2.2 Traitées en général, mais pas toujours bien rédigées. La caractérisation de l'appartenance d'un point à la médiatrice d'un segment par l'équidistance de ce point aux extrémités du segment permettait d'obtenir rapidement le résultat voulu. Ceux qui n'ont pas utilisé cette caractérisation ont perdu du temps. Après avoir prouvé que les points P et P' étaient équidistants de Q et R, un seul candidat a pensé à ajouter « les points P et P' sont distincts » avant d'en déduire que la droite (PP') était la médiatrice du segment [RQ].

II.3.1 Question abordée en général. Les résultats obtenus sont le plus souvent exacts mais aussi menés pesamment, faute d'une lecture approfondie de la figure et d'une utilisation judicieuse des résultats précédemment démontrés.

II.3.2 Pas de remarques.

II.4 Les candidats qui ont traité cette question ont bien fait le rapport avec la question **A.I.3.**, mais la rédaction a manqué de précision, des données ayant été oubliées : « P point intérieur au triangle BP'C » ou « P sur la bissectrice issue de P' » dans ce même triangle.

II.5 De trop nombreux candidats se sont limités à dresser la liste des six trisectrices du triangle ABC (l'énoncé exigeait pourtant explicitement une justification). D'autres ont énoncé en guise de démonstration quelques relations entre des angles, sans se référer réellement à la définition d'une trisectrice.

II.6 Question correctement traitée en général par ceux qui l'ont abordée, malgré quelques erreurs de calcul, le plus souvent correspondant à la suppression de parenthèses précédées d'un signe « moins ».

III.

1. Très souvent traitée et de façon correcte.

2. La définition de « triangles semblables » est en général connue.

3. Très peu de candidats ont abordé cette question. Ceux qui s'y sont risqués se sont montrés très imprécis dans la rédaction, les propriétés des similitudes utilisées n'étant pas explicitées.

Partie B

I.

I.1 Question étonnamment peu traitée. Le cas $\widehat{\mathrm{A}} = \frac{\pi}{2}$ est souvent expédié sans détail, voire éludé. Des lacunes sur les angles rentrants doivent être comblées.

I.2 Question davantage traitée, les candidats admettant le résultat de la question **1**.

II.

II.1 Question peu traitée. Certains candidats commettent une erreur de raisonnement dans l'application de la relation des sinus dans le triangle ABR, en utilisant la même lettre r pour le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et au triangle ABR.

II.2 Question davantage traitée que la précédente. Certains candidats utilisent les formules d'Euler, mais ils ne les connaissent qu'approximativement, notamment celle concernant sin θ.

II.3 Question très peu traitée. La plupart des candidats savent utiliser le résultat de la question **II. 2.**, mais ne vont pas plus loin dans leurs calculs.

II.4-5 Questions abordées plus souvent que les questions **II. 1** et **3**, mais aucun candidat ne pense à justifier les divisions.

II.6.1 Pas de remarques.

II.6.2 Très peu abordée. On lit tout de même dans certaines copies que $\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ car les angles considérés sont géométriques et donc non orientés !

II.6.3 On a pu lire dans les copies, peu nombreuses, où la question a été abordée :

« *les points* A, M, Q *sont alignés et* AM = AQ, *donc* M = Q ».

II.6.4 Pas de remarques.

II.7-8 Questions bien traitées par ceux qui les ont abordées.

Partie C

I.

I.1 Les solutions dans **C** de l'équation $z^3 - 1 = 0$ ont la plupart du temps été trouvées, par des méthodes variées, mais souvent sans grande rigueur.

Certains ont factorisé $z^3 - 1$ par $z - 1$ (parfois de façon laborieuse), puis ont résolu l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, la plupart du temps correctement.

D’autres ont posé : $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, et ont alors révélé d’importantes faiblesses concernant la manipulation des arguments.
Certains candidats ont considéré, et c’était leur droit, que la question était une simple question de cours (racines cubiques de l’unité dans **C**), et se sont contentés d’écrire : « les solutions sont 1, j et j^2 ».

I.2 Question bien traitée en général, diverses méthodes ayant été utilisées, notamment celle de la somme de termes consécutifs d’une suite géométrique de rapport *j*, ou celle consistant à considérer que le nombre complexe *j*, distinct de 1, est solution de l’équation $z^3 - 1 = 0$, équivalente à l’équation $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$.

I.3-4 Questions peu abordées.
Trop rares ont été les candidats capables d’expliciter une équivalence telle que, pour la question I.3. (angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)$ de mesure principale égale à $\dfrac{\pi}{3}$) :
« le triangle PQR est équilatéral si, et seulement si, R est l’image de Q par la rotation de centre P et d’angle $\dfrac{\pi}{3}$ ».
Parmi eux, certains ont su poursuivre par :
« le triangle PQR est équilatéral si, et seulement si : $r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$ »,
et quelques rares candidats sont parvenus à mener les calculs jusqu’à leur terme pour obtenir l’équivalence demandée.

II.

II.1 Le résultat est la plupart du temps correct, mais non justifié : il faut revoir la propriété concernant les angles orientés pour les symétries.

II.2 Parmi les rares candidats ayant abordé cette question, la plupart se sont contentés d’énoncer la relation $g \circ h$ (P) = $g(h$ (P)) = g (P') = P, sans justification, ou avec une justification partielle sur les angles, sans tenir compte des longueurs.

III.

III.1 Cette question n’a que très exceptionnellement été traitée, l’écriture complexe d’une similitude directe n’étant pas connue.

III.2 Les connaissances des candidats sur la composée de similitudes directes sont généralement insuffisantes pour traiter convenablement cette question. La preuve du fait que $a_1 a_2 \neq 1$ a manqué de rigueur avec une difficulté à traduire la relation $e^{2i(\alpha+\beta)} \neq 1$ sur $\alpha + \beta$.

III.3 Question peu abordée, mais calculs bien menés par ceux qui l’ont traitée.

III.4 Question quasiment jamais abordée.

Problème 2

Ce problème traite d’interpolation polynomiale et de résolution d’une équation aux différences finies. Il se compose de quatre parties dont la dernière est un réinvestissement pour le calcul de la somme des puissances cubiques des *k* premiers entiers.
Les candidats se sont davantage investis dans l’étude de ce problème sans toutefois en cerner avec précision l’objet. Les questions d’existence et d’unicité sont mal perçues : certains candidats ont des difficultés à expliciter ce qu’ils viennent de démontrer, à analyser ce qui est demandé. Les raisonnements ont manqué souvent de rigueur et de précision, notamment dans

les propriétés relatives à l'intégration et à l'étude des signes. On peut noter aussi des connaissances peu solides dans le domaine des polynômes.

Partie I

1.1. Question généralement bien traitée.
On peut relever quelques erreurs concernant la justification de la dérivabilité de la fonction $f:\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbf{R}$:
« *f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$* ».
« *f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée des fonctions $x \mapsto 1+x^2$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, toutes deux dérivables sur $\mathbf{R}$* » (l'ordre de la composition n'étant d'ailleurs pas précisé).
Le calcul de la dérivée est parfois erroné : oubli du « v^2 » dans la formule.
Des phrases telles que : « le signe de $f'(x)$ **dépend** de celui de $-2x$ », sont à proscrire ; il conviendrait de les remplacer par « le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x$ » pour donner une véritable information.
On peut regretter que le renseignement donné sur la monotonie de f soit rarement le plus précis possible (*f est décroissante sur* $[0, +\infty[$, *f est strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$), alors que le tableau de variations dressé par la suite permettra d'affirmer que « *f est strictement décroissante sur* $[0, +\infty[$ ».
De nombreux candidats évoquent la parité de la fonction, mais n'en tirent aucune conséquence concernant l'étude de la fonction. La confusion entre fonction et courbe représentative est fréquente : « *f est une fonction paire, donc f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées* ».

1.2. Pas de remarque particulière, si ce n'est que l'unité graphique a été respectée, et que les représentations graphiques obtenues sont généralement précises et soignées.

2.1.

2.2. Questions bien traitées en général. Seuls quelques candidats ne connaissent pas la définition de « *fonction polynomiale* », et sont amenés à proposer pour les fonctions polynomiales Q et R demandées respectivement $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

2.3. Question bien traitée en général. L'erreur principalement rencontrée consiste à considérer que la représentation graphique de la fonction g est la réunion de deux demi-droites.
Certaines erreurs de calcul commises dans l'une ou l'autre des questions **2.2**, **2.3** auraient dû être détectées à l'occasion du tracé de la représentation graphique de g, mais cela n'a pas toujours été le cas : on a pu voir des représentations graphiques d'une fonction g qui manifestement ne coïncidait pas avec la fonction f en au moins l'un des réels -1, 0 ou 1.

2.4. Question généralement bien traitée.
On peut regretter que les candidats n'aient qu'exceptionnellement exploité la parité des fonctions f et g.
Certains candidats ne pensent pas à « *mettre les expressions au même dénominateur* » pour étudier le signe de la différence $f(x)-g(x)$ et élaborent un raisonnement imprécis ou peu rigoureux en étudiant les variations de la fonction rationnelle $f-g$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

Plus étonnant, il n'est pas rare que le candidat calcule un discriminant pour étudier le signe de $x^2 - 2x + 1$ et de $x^2 + 2x + 1$.
Enfin, écrire à plusieurs reprises dans une même copie des affirmations telles que : « *pour tout* x *de* $[0\,;1]$, $x > 0$ » relève d'une grande négligence.

2.5. On a pu observer plusieurs occurrences de la confusion entre **relation de Chasles** et **linéarité de l'intégrale**.

Le calcul de l'intégrale I_g, égale à $\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$, n'a généralement pas posé de difficulté.
Là encore, une erreur de calcul se détectait facilement, l'intégrale de la fonction g s'interprétant comme la somme des aires de deux trapèzes. On a cependant pu lire des résultats absurdes comme : $I_g = 0$, $I_g = -\frac{1}{2}$. On a aussi relevé une confusion entre l'intégrale I_g (un réel) et une aire (une grandeur) : $I_g = \frac{3}{2}$ u.a., $I_g = \frac{3}{2} \times 4^2$ cm^2.

Pour établir l'inégalité $I_g \leq I_f$, de nombreux candidats se sont sentis tenus de donner quelques propriétés de *f* et *g* justifiant le passage suivant :

$$\text{« } \forall\, x \in [-1\,;1],\ g(x) \leq f(x) \text{ » donc « } \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ».}$$

On a ainsi pu lire :
« *f et g sont dérivables sur* $[-1\,;1]$ » (g n'est manifestement pas dérivable en 0),
« *f et g sont continues et positives sur* $[-1\,;1]$ » (la positivité n'est d'aucune utilité ici).

3.1. En général, pour prouver l'existence et l'unicité d'une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à 2 qui vérifie les relations :

$P(-1) = f(-1)$, $P(0) = f(0)$, $P(1) = f(1)$,

les candidats ont traduit sur les coefficients d'une fonction polynomiale $x \mapsto ax^2 + bx + c$ le fait qu'elle prenait la même valeur que f en chacun des réels -1, 0 et 1, ce qui conduisait à la résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues. Cette résolution ne posait aucune difficulté, et amenait à prouver non seulement l'unicité mais aussi l'existence d'une telle fonction P.
Quelques idées fausses sur les systèmes d'équations linéaires ont été rencontrées :
« *un système de trois équations à trois inconnues n'admet au plus qu'une solution* »,
« *on a trois conditions pour trouver trois inconnues, donc il existe un unique* P ».
Ce n'est qu'exceptionnellement que les candidats ont raisonné en supposant que, si deux polynômes P_1 et P_2 convenaient, alors leur différence était un polynôme de degré au plus 2 s'annulant en au moins 3 réels distincts, ce qui conduisait à l'égalité $P_1 = P_2$.

3.2. Question bien réussie.

3.3. Question généralement bien traitée. On a cependant assez souvent pu lire que le polynôme : $x \mapsto f(-1)\,L_{-1}(x) + f(0)\,L_0(x) + f(1)\,L_1(x)$ était la « *somme des polynômes* L_{-1}, L_0, L_1 », et même la « *somme des polynômes* $L_{-1}(x)$, $L_0(x)$, $L_1(x)$ », au lieu d'une affirmation telle que :

« $x \mapsto f(-1)\,L_{-1}(x) + f(0)\,L_0(x) + f(1)\,L_1(x)$ *est combinaison des polynômes* L_{-1}, L_0, L_1 ».

3.4. Étonnamment, cette question a rencontré un succès restreint. Beaucoup de candidats n'ont pas su dire ce qu'ils venaient de démontrer.
Au lieu de, par exemple : « *la fonction* : $x \mapsto f(-1)\,L_{-1}(x) + f(0)\,L_0(x) + f(1)\,L_1(x)$ *est la seule fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à* 2 *qui coïncide avec* f *en* -1, 0 *et* 1 », on a ainsi pu relever :
« *la fonction polynomiale* $x \mapsto f(-1)\,L_{-1}(x) + f(0)\,L_0(x) + f(1)\,L_1(x)$ *est unique* » (ce qui ne saurait être remis en cause !).

3.5.1. Généralement bien réussie. La plupart des candidats ont déjà démontré l'existence et l'unicité de la fonction P à la question **3.1**, et ont ainsi obtenu pour P la fonction :

$$x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 1.$$

Il aurait été judicieux de mentionner que les calculs pour expliciter la fonction P à partir des égalités, valables pour tout réel x :

$$P(x) = f(-1)\,L_{-1}(x) + f(0)\,L_0(x) + f(1)\,L_1(x),$$

n'étaient menés qu'à titre de vérification.

3.6. Question généralement bien traitée. Mais la représentation graphique proposée est parfois celle de la restriction de P au segment $[-1\,;1]$.

3.7. Mêmes remarques que pour **2.5**.

3.8. Quelques candidats ont calculé la valeur exacte de I_f ($I_f = 2[\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$), d'autres ont obtenu une valeur approchée de I_f en utilisant une fonction spéciale de leur calculatrice. Ces démarches semblaient cependant bien éloignées de celle mise en œuvre dans le problème qui permettait d'affirmer : $\frac{3}{2} \le I_f \le \frac{5}{3}$, puis : $1{,}5 \le I_f \le 1{,}7$, pour conclure que $1{,}6$ était une valeur approchée de I_f à 10^{-1} près. Il faut noter que ne sont pas acceptables des raisonnements rédigés ainsi :
« *on a* : $\frac{3}{2} \le I_f \le \frac{5}{3}$, *or* : $\frac{5}{3} \approx 1{,}7$, *donc* $I_f \approx 1{,}6$ *à* 10^{-1} *près* »,
« *la demi somme de* $\frac{3}{2}$ *et* $\frac{5}{3}$ *vaut* $\frac{19}{12}$, *et on a* : $\frac{19}{12} \approx 1{,}58$ *à* 10^{-2} *près, donc* $I_f \approx 1{,}6$ *à* 10^{-1} *près* ».

4. Cette question a souvent été éludée. Les candidats qui s'y sont attelés en respectant la consigne de l'énoncé (« en appliquant une méthode analogue à celle développée à la question 3 ») ont la plupart du temps fourni des réponses satisfaisantes, sauf pour ce qui concerne l'unicité.

Partie II

1.1. Ecrire $P_0(0) = y_0$ ne répond pas à la question.

1.2. Souvent mal rédigée. Les raisonnements par implication ne montrent que l'unicité. Quand la résolution du système est faite, certains candidats se contentent d'expliciter P_1 sans préciser en quoi ils ont démontré l'unicité ou l'existence.

1.3. Question généralement bien traitée. Quelques rares erreurs de calcul.

2.1. La fonction polynomiale Q_2 est définie, dans l'énoncé, par :
pour tout réel x, $Q_2(x) = P_2(x) - P_1(x)$.
On a étonnamment pu lire à plusieurs reprises que Q_2 était la **somme** des fonctions polynomiales P_1 et P_2. Certains candidats ont affirmé que le degré de la différence de deux polynômes était égal au maximum des degrés de ces polynômes. D'autres encore ont écrit que, des inégalités $\deg(P_1) \leq 1$, $\deg(P_2) \leq 2$, on pouvait déduire l'égalité $\deg(Q_2) = \deg(P_2)$.

2.2. Question généralement bien traitée, même si de nombreux candidats n'ont pas vu que les informations : « $Q_2(0) = Q_2(1) = 0$, $\deg(Q_2) \leq 2$ » permettaient de conclure sans aucun calcul à l'existence d'un réel c_2 tel que Q_2 s'écrive $x \mapsto c_2 x(x-1)$.

2.3. Cette question a occasionné des calculs longs et laborieux chez les candidats qui, après avoir écrit $Q_2(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$, ont cherché à exprimer les coefficients a, b, c en fonction des réels y_0, y_1, y_2.

2.4. Question généralement bien traitée ; la plupart des candidats ont pensé à écrire $P_2(x)$ sous la forme $P_1(x) + Q_2(x)$ et ont exploité les résultats précédemment démontrés.

3. Les candidats qui ont abordé cette question ont la plupart du temps exhibé la bonne fonction Q_3, mais la valeur de c_3 a souvent été admise et trop peu de candidats ont pensé à faire la synthèse de leur démarche.

Partie III

1.1. Les candidats n'ont que très rarement compris l'enjeu de la question. Ceux qui ont tenté d'exploiter le résultat : $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $P(x+1) = P(x)$ ont généralement affirmé que P prenait la même valeur en tous les entiers naturels sans la moindre justification (une démonstration par récurrence élémentaire établissait le résultat). Le plus souvent suivait l'affirmation péremptoire : « donc P est constante ».

1.2. Quasiment aucun candidat n'a fait le lien avec la question précédente. On lit encore la même erreur de raisonnement, à savoir que si R et P sont deux fonctions vérifiant ($C_{Q,\alpha}$) alors, le fait que $R(x+1) - P(x+1) = R(x) - P(x)$ entraîne que $R - P$ s'annule en tout entier, donc s'annule en tout réel.

2.1. Question généralement bien traitée. Quelques candidats ont considéré que « *Q est une fonction polynomiale non nulle* » signifiait que Q ne s'annulait pas.

2.2. Peu de candidats ont traité cette question.
Pour prouver que le degré de Q est inférieur ou égal à $m - 1$, la plupart des candidats ont saisi intuitivement que, dans $P(x+1) - P(x)$, les termes de degré m de $P(x+1)$ et $P(x)$ s'annulaient, mais ne sont pas parvenus à en donner une justification rigoureuse.
On voit encore apparaître l'ancienne notation C_n^p pour le coefficient binômial $\binom{n}{p}$.
On note très souvent le raisonnement faux suivant : deg $Q \leq m - 1$ et deg $Q \leq 3$ implique $m - 1 \leq 3$

2.3. En général, le sens même de la question n'a pas été réellement saisi.
Peu de candidats ont su exploiter le théorème donné à la fin de la partie **II**. D'autres ont pensé à justifier l'existence et l'unicité de l'écriture de P comme combinaison

linéaire des H_k en utilisant que la famille $(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$ est une base de l'espace vectoriel de dimension 5 des polynômes de degré au plus 4, mais la justification de la base fait souvent défaut.

2.4. et 2.5 et 2.6. Questions bien traitées en général par ceux qui les ont abordées.

3.1. et 3.2. Très peu de candidats ont abordé ces questions. Ceux qui s'y sont essayés ont rarement réussi à faire la synthèse des résultats obtenus dans les questions précédentes et se sont fréquemment lancés dans des calculs inutiles.

Partie IV

Cette partie n'était pas difficile, mais demandait application et concentration, tant dans les calculs que dans la synthèse à effectuer des résultats donnés dans l'énoncé.

1. Ceux qui ont traité cette question ont proposé une démonstration par récurrence du résultat annoncé : $\forall\ k \in \mathbf{N}^*,\ \sigma_k = P(k)$.
Parfois, ce qui était acceptable (par convention la valeur 0 était attribuée à σ_0), ils ont établi le résultat suivant : $\forall\ k \in \mathrm{N}^*,\ \sigma_k = P(k)$.
Il faut observer que ni l'étape de l'initialisation, ni celle appelée hérédité ne sont la plupart du temps rigoureusement rédigées.

2. Pas de remarque particulière si ce n'est que cette question a été très peu traitée.

3. Question comprise mais à la fin de l'épreuve, les candidats ne voient pas que α vaut 0 !

4. Peu de candidats ont traité correctement cette question en restant appliqués dans les calculs.

5. L'ÉPREUVE ORALE D'ADMISSION

En préliminaire, le jury rappelle que ni le concours (CAPES ou CAERPC), ni le niveau d'enseignement qui détermine la catégorie du dossier (collège ou lycée) proposé au candidat pour l'oral, ne peuvent être modifiés postérieurement à l'inscription, et qu'il appartient donc à chaque candidat d'être extrêmement vigilant sur ces deux points au moment de la confirmation de son inscription.

Par ailleurs la validation des candidatures relève de la direction du recrutement au ministère de l'éducation nationale. Le jury n'a aucune connaissance des situations professionnelles des candidats ni de leur dossier administratif ; son rôle concerne uniquement l'évaluation des compétences des candidats à enseigner les mathématiques.

5.1. Les modalités de l'épreuve orale

Le candidat prépare son épreuve orale à partir d'un dossier choisi parmi deux dossiers sélectionnés par le jury. Ces dossiers proposent des sujets correspondant au niveau d'enseignement (collège ou lycée) choisis par les candidats au moment de leur inscription au concours. Un dossier est composé d'une première feuille présentant le sujet et le travail demandé, et de quelques feuilles proposant des extraits de divers manuels, sélectionnés par le jury et destinés à aider le candidat dans sa préparation.

Les candidats qui enseignent dans le second degré choisissent le niveau correspondant à leur expérience sur le terrain et ce choix paraît judicieux puisque l'oral doit être pour chacun une occasion de valoriser ses acquis professionnels. Les candidats qui n'enseignent pas dans le second degré ont intérêt à choisir le niveau où ils valoriseront le mieux un profil professionnel. Dans tous les cas, les exigences du jury portent sur les connaissances mathématiques mais concernent également la connaissance des programmes, l'articulation des notions les unes par rapport aux autres et également la façon d'apprendre aux élèves à raisonner et à être rigoureux.

Répartition des candidats admissibles présents selon le concours et le niveau choisi

Session 2009	CAPES interne	CAERPC	Ensemble
Niveau collège	146	165	311
Niveau lycée	92	34	126
Total	**238**	**199**	**437**

Proportion de candidats admissibles présents ayant choisi le niveau collège

	CAPES interne	CAERPC	Ensemble
Session 2009	61,3%	82,9%	71,2%
Session 2008	63%	79,2%	72%
Session 2007	67,4%	77,9%	71,3%
Session 2006	67%	79,6%	72,4%
Session 2005	75,3%	84%	79,04%

Taux de réussite à l'oral selon le niveau choisi et le concours

CAPES	Présents	admis	Taux réussite		CAERPC	Présents	admis	Taux réussite
niveau collège	146	77	52,70%		niveau collège	165	126	76,30%
niveau lycée	92	41	44,60%		niveau lycée	34	24	70,60%

Parmi les deux dossiers proposés au candidat, l'un comporte systématiquement la mention *« avec utilisation des TICE »*, tandis que l'autre est dépourvu de cette mention.
Pour les dossiers *« avec utilisation des TICE »,* au moins une des questions posées à propos du sujet fait référence à une mise en œuvre des TICE (calculatrice et/ou ordinateur) dans le cadre de la classe. La présentation d'au moins une activité utilisant les TICE est alors obligatoire et le non respect de cette consigne est pénalisant.
Pour les dossiers ne comportant pas la mention *« avec utilisation des TICE »*, l'utilisation de la calculatrice ou de l'ordinateur n'est pas obligatoire mais un candidat peut néanmoins, s'il le juge opportun, les introduire dans sa présentation.

La durée de la préparation est de deux heures et celle de l'épreuve orale d'une heure et quinze minutes au maximum. Cette épreuve est composée de deux parties : un exposé du candidat (durée maximum : 30 minutes), suivi d'un entretien avec le jury (durée maximum : 45 minutes).

5.2. Les deux heures de préparation

Les calculatrices, CD, clefs USB personnels ainsi que les CD fournis avec les manuels et les téléphones portables sont interdits durant la totalité de l'épreuve orale et sont confisqués dès l'arrivée des candidats, juste avant la distribution des sujets.

En revanche, chaque candidat a la possibilité d'utiliser tous ses documents personnels sur papier. Par ailleurs, l'accès à la bibliothèque est libre durant les deux heures de la préparation. Une liste des ouvrages disponibles figure au paragraphe 9.

Depuis cette année, chaque candidat dispose d'un ordinateur durant toute la durée de sa préparation. Une liste des logiciels disponibles figure au paragraphe 6. Des clefs USB ainsi que des transparents et feutres adaptés sont disponibles sur simple demande. Il est également possible d'emprunter à tout moment une des calculatrices disponibles à la bibliothèque. Une liste des calculatrices disponibles figure au paragraphe 6.

5.3. Les attentes du jury

Le CAPES interne est un concours de promotion interne et à ce titre a pour objet spécifique de promouvoir les capacités professionnelles. En conséquence, il ne suffit pas d'avoir un niveau de mathématiques personnel « satisfaisant » pour réussir l'épreuve orale du concours. Le jury attend évidemment des candidats une bonne connaissance des mathématiques. Cependant les capacités à faire des mathématiques sont déjà testées lors de l'épreuve écrite et d'une certaine façon validées par l'admissibilité. Aussi lors de l'épreuve orale, au-delà des connaissances mathématiques, d'autres capacités sont également testées :

- la capacité à enseigner les mathématiques et à les rendre attrayantes

- la capacité à communiquer, ce qui signifie être capable de s’exprimer correctement et également d’échanger avec le jury
- la capacité à donner des définitions correctes des notions traitées même lors d’exercices (et donc pas seulement lors de la présentation de l’exposé préparé), lorsqu’elles sont demandées par le jury durant l’entretien.

5.3.1. L’exposé

L’exposé doit être élaboré à partir des questions posées dans le dossier retenu par le candidat, il doit faire montre d’une réflexion personnelle cohérente avec les consignes données dans le sujet. Il est donc essentiel que le candidat lise bien les questions qui lui sont posées, afin d’éviter d’être hors sujet ou d’apporter des réponses insuffisantes. Par exemple, lorsqu’il s’agit de proposer l’introduction d’une notion, il est tout à fait inapproprié de passer vingt minutes à présenter des résultats de cours pour proposer ensuite deux ou trois exercices d’application.

A la fin de chaque sujet, il est demandé au candidat de faire figurer quelques informations sur une « fiche d’exposé ». Il convient là encore de ne rédiger que ce qui est demandé. A part les énoncés des exercices proposés (s’ils ne figurent pas dans le dossier), les demandes peuvent concerner un extrait de ce que l’enseignant pourrait faire noter sur un cahier d’élèves, ou un plan de cours, ou la résolution d’un exercice. La fiche est là pour montrer aux membres de la commission la capacité du candidat à rédiger un document propre à destination des élèves. Elle constitue un des éléments d’appréciation du candidat mais elle doit rester assez succincte et ne devrait pas excéder trois pages. En particulier, la fiche d’exposé ne doit pas servir de support à l’exposé et il est d’ailleurs très mal venu de la lire ou de la recopier en guise d’exposé.

La première qualité d’un exposé doit être un **contenu mathématique** satisfaisant. Les énoncés présentés doivent être rigoureux et précis et leur statut clairement identifié. Il convient, par exemple, de ne pas confondre définition et propriété ou encore d’avoir une idée précise de ce qu’est une propriété caractéristique.
Les membres du jury souhaitent voir **au moins une démonstration** au cours de l’exposé, ou si le sujet ne s’y prête pas, au moins une situation où le candidat montre **sa capacité à développer un raisonnement mathématique**.
Toutefois, le contenu mathématique ne suffit pas. Il s’agit de faire une présentation attrayante qui captive le jury. Il importe de **donner une vision dynamique des notions mathématiques présentées**, replacer la séquence dans un contexte, **favoriser le questionnement** et ne pas se limiter à la présentation de techniques ou recettes.
Pour les sujets concernant la présentation d’une séance d’exercices, il importe de **varier le type d’exercices choisis**. En effet, les **exercices d’application** sont trop souvent majoritaires par rapport à ceux **de découverte** et ceux permettant **l’acquisition de sens**. Or l’évolution des programmes et de l’enseignement des mathématiques insiste sur la démarche d’investigation et la nécessité d’apprendre aux jeunes à poser un problème, à chercher à le résoudre et pas seulement à mettre en œuvre des techniques.
La deuxième qualité de l’exposé concerne la **façon de le présenter**. Il est absolument indispensable de prendre de la distance vis-à-vis de ses notes. Tous les documents papier étant autorisés lors de la préparation, il ne s’agit pas de recopier ses notes au tableau mais de les **présenter de façon convaincante**, de montrer qu’on s’est approprié le contenu mathématique de son exposé. En particulier, il ne faut pas recopier les énoncés d’exercices au tableau, puisqu’ils figurent sur la fiche d’exposé remise au jury.

Les membres du jury apprécient un exposé bien structuré et vivant, une présentation orale claire et une utilisation judicieusement pensée du tableau, les points importants étant mis en relief. Rappelons à ce propos qu'il est souhaitable de gérer le tableau durant l'exposé de façon à ne pas avoir à effacer avant le début de l'entretien.

La **précision et la rigueur de l'expression orale** sont des qualités importantes pour un enseignant. C'est pourquoi le candidat devra être attentif à toujours utiliser le mot juste et à ne pas se contenter d'à-peu-près.

Le temps de parole mis à la disposition du candidat pour l'exposé ne doit pas nécessairement être utilisé en totalité. De très bons exposés peuvent être courts (mais pas trop !) et il ne faut pas se sentir obligé de « meubler » à tout prix pour parler pendant les 30 minutes imparties. De toutes façons, les minutes non utilisées ne seront pas reportées sur la durée de l'entretien. Néanmoins, l'incapacité de certains candidats à parler plus de 10 minutes interroge, surtout lorsqu'aucun réel développement mathématique (démonstration ou démarche de résolution d'un exercice) n'a été présenté lors de l'exposé.

5.3.2. L'entretien

Les questions posées par le jury lors de l'entretien peuvent être destinées à faire préciser un point de l'exposé, à faire énoncer une définition ou un théorème, à faire résoudre un exercice proposé par le candidat, à lui faire élaborer une démonstration. Elles n'ont pas pour but de le piéger, mais d'éclairer et d'approfondir – lorsque le besoin s'en fait sentir – une partie du sujet traité, de suggérer une piste de résolution pour une question d'exercice, de mettre en évidence une erreur ou une imprécision….

Tout candidat doit être **capable de donner une solution claire et satisfaisante de tout exercice qu'il a lui-même proposé**. De plus il doit s'attendre à être interrogé sur la façon dont les notions utilisées dans les exercices proposés sont introduites (par exemple, produit scalaire au lycée, symétrie centrale au collège, critère de divisibilité au collège ou lycée…). En géométrie, la pertinence et la qualité des figures réalisées sont appréciées, de même en analyse les représentations graphiques de fonctions.

Pour le traitement des exercices, les candidats ne devraient pas se borner à la résolution mais prendre également en compte la situation dans la classe. Encore une fois, il s'agit d'une épreuve professionnelle. Les membres du jury aimeraient voir plus souvent des activités comportant une part d'initiative ; ils n'acceptent pas l'argument « c'est trop dur pour les élèves », d'autant que, selon les situations de classes, des exercices peuvent être durs et intéressants.

Les membres du jury ne s'attendent pas à ce qu'un candidat sache répondre de façon immédiate à toute question. Ils apprécient une attitude de questionnement et **jugent très favorablement un candidat** qui reformule une question pour laquelle il n'a pas de réponse immédiate, qui **fait des essais, tente de poser le problème, montre sa capacité à réfléchir** et également **sa capacité d'écoute** vis-à-vis des suggestions qui peuvent lui être faites. En revanche, on attend d'un professeur qu'il connaisse les démonstrations des propriétés qu'il enseigne à ses élèves, en particulier au collège, même si ces propriétés sont données aux élèves sans démonstration (par exemple, propriété caractéristique de la médiatrice). Il est également impératif d'être capable de donner des définitions correctes des notions traitées même lors d'exercices (et donc pas seulement lors de la présentation de l'exposé préparé), lorsqu'elles sont demandées par le jury durant l'entretien.

Un professeur certifié étant susceptible d'enseigner dans toutes les classes de l'enseignement secondaire général et technologique (de la Sixième à la Terminale), voire en Section de Techniciens Supérieurs, le jury est en droit d'interroger les candidats, non seulement sur les niveaux évoqués dans le dossier, mais aussi sur les niveaux voisins (prolongement d'une notion aux niveaux suivants ou mise en place des pré-requis d'une notion aux niveaux antérieurs, par exemple). Une bonne connaissance de l'ensemble des programmes de l'enseignement secondaire est donc attendue et leur méconnaissance constitue un élément pénalisant dans l'évaluation du candidat.

Pour conclure, le jury souhaite faire observer aux futurs candidats que les documents d'accompagnement ou documents ressources sont très riches de commentaires et d'exemples qui pourraient agrémenter positivement les exposés et faciliter les réponses lors des entretiens. Par exemple, la justification du signe « moins » devant un nombre, ou concernant les graphes, la présentation d'un exemple de situation concrète.
Il est donc vivement conseillé de **lire les documents d'accompagnement** ou les **documents ressources** pour soutenir une appropriation optimale des notions au programme des différentes classes du collège et du lycée**.**

5.3.3. Observations particulières à la session 2009

Le jury souhaite relever un certain nombre de points positifs et également indiquer des difficultés qui persistent.

Les points positifs

- ***La maîtrise des TICE***
  Cette année encore, une nette amélioration de la maîtrise des logiciels est constatée, en particulier une bonne utilisation des logiciels de géométrie *geogebra* et *geoplan*.
  Un certain nombre de candidats introduisent l'utilisation des TICE dans les sujets « sans TICE », ce qui est plutôt satisfaisant, à condition toutefois que les activités proposées soient pertinentes et enrichissent la présentation du sujet.
  En revanche, aucun candidat n'a le réflexe d'utiliser les TICE pendant l'entretien pour soutenir une recherche par exemple. Les membres du jury rappellent que l'ordinateur est à la disposition du candidat durant toute l'interrogation.

- ***L'utilisation pertinente de transparents***
  Chaque salle d'oral dispose d'un rétro-projecteur et cette année encore, la proportion d'utilisateurs a augmenté, environ un candidat sur dix. Le jury s'en réjouit car ce type de présentation limite l'écriture fastidieuse de longs énoncés au tableau et offre des possibilités intéressantes sur le plan pédagogique.

- ***La gestion du tableau***
  Les membres du jury observent qu'une grande majorité des candidats utilisent judicieusement et proprement le tableau et apprécient que la consigne de ne pas effacer durant l'exposé soit en général respectée.

- ***La capacité à démontrer des résultats***
  De plus en plus de candidats sont conscients du fait qu'ils doivent pouvoir démontrer les résultats qu'ils énoncent. Cette année encore, les membres du jury se réjouissent de constater que de moins en moins de candidats excusent leur méconnaissance d'une démonstration par le fait qu'elle est trop difficile pour les élèves.

Des difficultés qui subsistent

- ***Des connaissances floues sur certaines notions***
  - les angles (angles géométriques, angles orientés de vecteurs, secteur angulaire),
  - les triangles semblables et isométriques,
  - la nature des nombres et leur écriture.

- ***La mise en œuvre des TICE***
  L'utilisation des TICE est encore trop souvent illustrative, et insuffisamment pensée comme un outil d'aide au raisonnement. Par ailleurs, lorsqu'il est demandé de préciser les « modalités d'utilisation en classe » cela signifie que l'on attend du candidat qu'il précise les conditions de mise en œuvre avec les élèves : quelle activité, qui expérimente et comment, quel bilan…

- ***Concernant les probabilités***
  Les définitions des concepts élémentaires sont mal connues. Dans un sujet portant sur les probabilités, quel que soit son niveau, on attend d'un candidat qu'il sache donner la définition d'une probabilité, même si celle-ci ne figure pas dans le programme de la classe indiquée dans le sujet.

- ***Concernant les statistiques***
  On attend des candidats qu'ils sachent motiver le recours aux résumés statistiques choisis. A ce sujet, il est vivement conseillé de consulter le document ressource récemment mis en ligne sur le site du ministère (http://eduscol.education.fr) traitant des notions de probabilités et statistiques du nouveau programme de seconde et qui fournit des exemples tout à fait pertinents.

- ***Notions de logique***
  La distinction entre condition nécessaire et condition suffisante met encore trop souvent les candidats en difficulté. Il en va de même pour la négation de certaines propositions.
  Là encore, il est vivement conseillé aux futurs candidats de consulter le document ressource traitant des notions de logique du nouveau programme de seconde.

- ***Quelques propos à éviter***
  - Ne pas parler de « case » lors de l'utilisation d'un tableur
  - Eviter de donner comme réponse : « c'est écrit dans les manuels »

6. L'UTILISATION DES TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DE LA COMMUNICATION

6.1. Calculatrices et logiciels disponibles pour la session 2009

6.1.1. Modèles de calculatrices disponibles

Casio

Graph 35+, 100+ et RM 7000 & 9000 (tablettes)
Classpad 300+, Classpad 330

Texas Instruments

TI 84^{+} Silver, Voyage 200 + tablettes
TI Collège, TI Collège Plus

Hewlett Packard

HP 40 G + tablettes

6.1.2. Logiciels implantés sur chaque ordinateur – de type PC –

La première colonne du tableau qui suit présente la liste des logiciels mis à disposition des candidats durant la préparation ainsi que durant l'interrogation, les ordinateurs étant tous configurés de la même façon. La deuxième colonne présente le bilan d'une enquête concernant l'utilisation des différents logiciels.

Nom du logiciel	**Nombre d'utilisations**
Cabri II	49
Cabri 3D	0
Geogebra	73
Geoplan-Geospace	49
Interesp	0
Excel	102
Open Office Calc	3
TI Smart View	4
TI Nspire Cas	0
Emulateur Casio ClassPad	2
Emulateur Casio 85	3
Derive	0
ToutYx	1
Scilab	0
Maxima	0
Xcas	0
Python	0
TOTAL	**286**

La lecture de ce bilan confirme la décision du jury de supprimer pour la prochaine session les logiciels Interesp et ToutYx.
On peut observer que les logiciels de calcul formel et de programmation n'ont pas été utilisés cette année. Ils sont en accord avec les orientations du nouveau programme de seconde et figuraient essentiellement cette année à titre d'information. Ils seront bien évidemment maintenus lors de la prochaine session.
Les émulateurs de calculatrice apparaissent également comme des outils récents mais tout à fait adaptés et efficaces pour les présentations devant des classes. Ils seront à nouveau proposés lors de la session prochaine et le jury espère observer une augmentation de leur utilisation, plus confortable que celle de la calculatrice pour une présentation devant un jury.
Enfin il n'est pas prévu à ce jour d'ajout de nouveau logiciel.

6.2. L'épreuve orale

Sur le bureau de chaque salle de commission d'oral se trouve un ordinateur de type PC, présentant la même configuration que ceux installés en salle de préparation. Cet ordinateur est muni de deux écrans, l'un orienté vers le candidat, l'autre vers le jury, ce qui permet à celui-ci d'observer le déroulement de la séquence informatique proposée en même temps que le candidat la réalise.
Dans chaque salle se trouve également un rétroprojecteur, à l'aide duquel le candidat peut projeter, le cas échéant :

- soit les transparents qu'il aura réalisés (des transparents vierges sont fournis à la demande, avec des feutres, en salle de préparation),
- soit l'écran de la calculatrice utilisée au moyen d'une tablette de rétroprojection.

Dans un certain nombre de cas, les commissions d'oral ont assisté à des exposés proposant des utilisations très judicieuses des TICE dans des séquences d'enseignement : utilisation pertinente comme un outil de conjecture, faisant une bonne distinction entre observation et démonstration, utilisation pour la mise en place d'un procédé algorithmique, ou encore utilisation comme un outil pour poser les problèmes sous forme plus ouverte. Cependant, encore une fois cette année, les spécificités de ces outils, comme leur caractère dynamique par exemple, n'ont pas suffisamment été prises en compte et le rôle de l'ordinateur a encore trop souvent été réduit à celui d'instrument de dessin géométrique, au même titre que les instruments de géométrie traditionnels. Donc, même si on peut se féliciter de la qualité de certaines prestations, il reste encore, pour une bonne part des candidats, à réfléchir de façon plus approfondie sur les apports nouveaux des TICE comme outil pédagogique et didactique.

Rappelons enfin que, lors de l'entretien, le jury peut demander à tout candidat ayant choisi un dossier ne comportant pas la mention *« avec utilisation des TICE »* de montrer une illustration pédagogique de l'utilisation de la calculatrice ou d'un logiciel, lorsque cette utilisation figure au programme de la classe concernée pour le thème abordé.

7. EXEMPLE DE SUJET COLLÈGE « AVEC UTILISATION DES TICE »

Avec utilisation des TICE

TYPE D’ACTIVITÉ PÉDAGOGIQUE :

Introduction d’une notion

THÈME :

La symétrie centrale

NIVEAU :

Cinquième

CE DOSSIER COMPREND :

Une page présentant une activité pouvant être proposée à des élèves de Cinquième pour introduire la symétrie centrale.

TRAVAIL DEMANDÉ :

1. En utilisant ou non le document proposé, présenter le plan d’une séquence d’enseignement s’appuyant sur l’utilisation d’un logiciel de géométrie et ayant pour objectif d’introduire la symétrie centrale et de dégager ses principales propriétés dans une classe de Cinquième.

2. Préciser les prérequis et expliquer les choix des définitions et propriétés retenues.

3. Proposer un exercice pour illustrer chacune des phases de la séquence.

SUR LA FICHE D’EXPOSÉ, ON INDIQUERA :

1. Le plan de la séquence et les objectifs de l’utilisation du logiciel.

2. Les énoncés des exercices proposés.

8. EXEMPLE DE SUJET LYCÉE « AVEC UTILISATION DES TICE »

Avec utilisation des TICE

TYPE D'ACTIVITÉ PÉDAGOGIQUE :

Activités et travaux dirigés

THÈME :

Echantillonnage et simulation en statistique

NIVEAU :

Seconde

CE DOSSIER COMPREND :

Outre la présente fiche, trois pages extraites d'un manuel de Seconde, comportant une liste d'exercices d'application et d'approfondissement.

TRAVAIL DEMANDÉ :

Préparer, en salle informatique, un travail dirigé sur le thème ci-dessus, s'appuyant sur l'utilisation d'un tableur-grapheur. On pourra, ou non, utiliser les exercices ci-joints (éventuellement adaptés).

SUR LA FICHE D'EXPOSÉ, ON INDIQUERA :

1. Les énoncés des exercices choisis, ou leur référence s'ils figurent dans les documents ci-joints.

1. Les modalités d'utilisation du tableur-grapheur.

9. LISTE DES OUVRAGES DISPONIBLES À LA BIBLIOTHÈQUE

niveau	éditeur	collection	année d'édition
6è	Hachette	Phare	2005
6è	Belin		1990
6è	Hachette	Diabolo	2005
6è	Hatier	Pythagore	1990
6è	Nathan	Transmath	2005
6è	Hatier	Triangle	1996
6è	Hatier	Pythagore	1996
6è	Hachette	Cinq sur cinq	1996
6è	Belin	Décimale	1996
6è	Bordas		2000
6è	Magnard		2000
6è	Hatier	Triangle	2000
6è	Nathan	Transmath	2000
6è	Hachette	Cinq sur cinq	2000
6è	Bordas		2005
6è	Nathan	Domino	2005
6è	Pole		
6è	Dider	Dimathème	2005
6è	Delagrave		2005
6è	Bréal		2005
5è	Bordas	Babylone	2006
5è	Hachette		1991
5è	Hatier	Pythagore	1991
5è	Bordas	Puissance maths	1991
5è	Nathan	Transmath	1997
5è	Hatier	Pythagore	1997
5è	Hatier	Triangle	1997
5è	Hachette	Cinq sur cinq	2000
5è	Nathan	Transmath	2001
5è	Bordas		2001
5è	Hatier	Triangle	2001
5è	Magnard		2001
5è	Didier	Dimathème	2006
5è	Hachette	Diabolo	
5è	Belin	Prisme	

niveau	éditeur	collection	année d'édition
4è	Hatier	Pythagore	1992
4è	Hachette		1992
4è	Nathan	Transmath	1992
4è	CRDP Lille	Méthodes en pratique	1988
4è	Hatier	Triangle	1998
4è	Bordas	MédiaMaths	2002
4è	Magnard	Livre du Prof	2002
4è	Magnard	Maths	2002
4è	Dider	Dimathème	2002
4è	Bréal	Maths	2007
4è	Bordas	Maths	1998
4è	Hatier	Pythagore	1998
4è	Nathan	Transmath	1998
4è	Hachette	Cinq sur cinq	1998
4è	Nathan	Transmath	2002
4è	Hachette	Cinq sur cinq	2002
4è	Hatier	Triangle	2002
4è	Hatier	Triangle	2002
4è	Hachette	Diabolo	2003
4è	Nathan	Transmath	2007
4è	Babylone	Maths	2007
4è	Hachette	coll^{n} Phare	2005
3è	Magnard	Maths	1990
3è	Istra		1993
3è	Nathan	Transmath	1993
3è	Hachette		1993
3è	Hatier	Pythagore	1993
3è	Nathan	Transmath	1999
3è	Hatier	Triangle	1999
3è	Bordas	Maths	1999
3è	Hachette	Cinq sur cinq	1999
3è	Dider	Dimathème	2003
3è	Bordas		2003
3è	Nathan	Transmath	2003
3è	Hachette	Cinq sur cinq	2003
3è	Bréal	Trapèze	2003
3è	Hatier	Triangle	2003
3è	Hachette	Diabolo	2004
3è	Nathan	Maths Autour de Thalès	2003
3è	Breal		2008

niveau	éditeur	collection	année d'édition
2nde	Magnard		2003
2nde	Bréal		1997
2nde	Hatier	Sigmath	1998
2nde	Bordas	Fractale	2000
2nde	Nathan	Hyperbole	2000
2nde	Nathan	Transmaths	2000
2nde	Hatier	Point math	2000
2nde	Bréal		2000
2nde	Hatier	Pythagore	2000
2nde	Bordas	Indice	2000
2nde	Hachette	Déclic	2000
2nde	Didier	Dimathème	2000
2nde	Delagrave		2000
2nde	Belin		2000
2nde	Hachette	Repères	2004
2nde	Bordas	Fractale	2004
2nde	Nathan	Transmath	2004
2nde	Bréal		2004
2nde	Magnard	Abscisse	2004
2nde	Nathan	Hyperbole	2004
2nde	Didier	Modulo	2004
2nde	Bordas	Indice	2004
2nde	Didier	Math'x	2005
2nde	Bordas	Fractale	2000
1è S	Didier	Dimathème (anal)	2001
1è S	Bréal		2001
1è S	Bordas	Fractale	2001
1è S	Nathan	Hyperbole	2001
1è S	Nathan	Transmath	2001
1è S	Belin		2001
1è S	Bordas	Indice	2001
1è S	Bordas	Fractale	2001
1è S	Hachette	Déclic	2001
1è S	Hachette	Terracher (géom)	2005
1è S	Belin	Radial	2005
1è S	Bordas	Indice	2005
1è S	Hachette	Repères	2005
1è S	Nathan	Hyperbole	2005
1è S	Nathan	Transmath	2005
1è S	Didier	Math'x	
1èS	Hatier	Maths et Maths	1998
1è ES	Nathan	Dimathème	2001

niveau	éditeur	collection	année d'édition
TL	Bordas	Fractale (spé)	1994
TL	Nathan	Transmath (spé)	1996
TL	Hachette	Déclic	1999
1è STT	Bordas		2003
1è STG	Nathan	Galée	2005
1è STG	Bordas	Indice	2005
1è STG	Foucher		2005
1è STG	Dider	Dimathème	2005
1è STG	Nathan	Intervalle	2005
BTS	Nathan	Compta-gestion	2001
T STT	Nathan	Compta-gestion	1998
T STT	Didier	Dimathème (CG)	1999
T STT	Didier	Dimathème AC)	1999
T STT	Bordas	Indice(action-com)	2003
T STT	Bordas	Indice (compt-ges)	2003
T ES	Nathan	Transmath (obl+spé)	1994
T ES	Bordas	Fractale (obl)	1994
T ES	Bordas	Fractale (spé)	1994
T ES	Nathan	Transmath (obl+spé)	1998
T ES	Bréal	(obl+spé)	1998
T ES	Hachette	Déclic (obl+spé)	1998
T ES	Didier	Dimathème (spé)	1998
T ES	Nathan	Hyperbole (obl+spé)	2002
T ES	Hachette	Déclic (obl+spé)	2002
T ES	Nathan	Hyperbole (obl)	2002
T ES	Nathan	Transmath (obl+spé)	2002
T ES	Bréal	(obl+spé)	2002
T ES	Bréal	(obl)	2002
T ES	Didier	Dimathème (obl+spé)	2002
T ES	Dider	Hyperbole	2006
TS	Bordas	Fractale (spé)	1994
TS	Bordas	Fractale (obl)	1994
TS	Nathan	Transmath (obl)	1994
TS	Nathan	Transmath (spé)	1994
TS	Bréal	(obl)	1998
TS	Bréal	(spé)	1998
TS	Dider	Dimathème (spé)	1998
TS	Dider	Dimathème (obl)	1998
TS	Nathan	Transmath (obl)	1998

1è ES	Didier	(oblig)		TS	Nathan	Transmath (spé)	1998
1è ES	Didier	(option)	2001	TS	Bordas	Indice (spé)	2002
1è ES	Nathan	Transmath	2001	TS	Bordas	Indice (obl)	2002
1è ES	Nathan	Hyperbole (obl)	2001	TS	Bréal	(spé)	2002
1è ES	Bréal	(obl)	2001	TS	Bréal	(obl)	2002
1è ES	Hachette	Déclic	2001	TS	Nathan	Transmath (spé)	2002
1è ES	Nathan	Transmath	2005	TS	Nathan	Transmath (obl)	2002
1è ES	Didier	Modulo	2005	TS	Bordas	Fractale spé)	2002
1è ES	Nathan	Hyperbole	2005	TS	Nathan	Hyperbole (obl)	2002
				TS	Nathan	Hyperbole (spé)	2002
1è L	Hachette	Déclic	2001	TS	Hachette	Terracher (obl+spé)	2002
1è L	Hachette	Déclic	2001	TS	Hachette	Déclic (obl+spé)	2002
1è L	Nathan	Transmath	2001	TS	Dider	Math'x (obl)	2002
1è L	Delagrave		2001	TS	Dider	Math'x (spé)	2002
1è L	Hatier		2001	TS	Nathan	Transmath	2006
1è L	Bordas	Indice	2001	TS	Lavoisier	Hyperbole	2006
1è L		Maths informatique	2001	TS	Lavoisier	Indice	2006
1è SMS	Nathan		1995	études sup	Lavoisier	Passerelle	2005

10. DE LA SESSION 2009 A LA SESSION 2010

Je tiens à remercier ici les vice-présidents du temps et de l'énergie qu'ils ont dépensés pour assurer le déménagement du CAPES interne.
En effet, nous avons d'abord dû transporter depuis le collège de Montrouge, où nous étions installés depuis plusieurs années, de nombreux documents et matériels. Il a fallu ensuite organiser l'installation au lycée Daguin à Mérignac. Ce n'était pas une affaire tout à fait simple, en particulier la préparation des nombreux ordinateurs, chaque ordinateur devant offrir aux candidats une configuration identique et devant être en bon état de marche.
Je veux aussi remercier ici l'extrême amabilité et disponibilité du proviseur Monsieur Ranson et de son intendant Monsieur Mériguet, qui ont répondu favorablement à toutes nos demandes, nous permettant ainsi de faire fonctionner le jury du CAPES dans des conditions optimales pour tous, candidats, surveillants et membres du jury.

Pour la session 2010, l'oral du CAPES interne et CAERPC de mathématiques se déroulera à nouveau au lycée Daguin à Mérignac et durant les vacances de Printemps de la zone C.