CONSEIL SUPÉRIEUR DES PROGRAMMES

Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C 2, C3 et C4

Catherine Houdement,

Maitre de conférences,
Université de Rouen/Espé

Contribution au travail sur les programmes de mathématiques des cycles 2 et 3

Novembre 14

Contribution au travail sur les programmes de mathématiques des cycles 2 et 3

Novembre 2014

Catherine Houdement

Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR)
Université de Rouen, Espe

Préliminaires

Ce texte est a priori destiné aux groupes des programmes, parmi lesquels d'autres experts de l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Je compte sur eux pour limiter les interprétations erronées ou débattre de points délicats. Ce texte n'est pas exhaustif sur les thèmes qu'il traite.

J'ai trouvé cet exercice assez difficile : difficile d'imaginer les types de réflexions ou d'apports qui peuvent faire avancer le groupe des programmes, dont je connais mal la culture sur les mathématiques et l'enseignement des mathématiques ; difficile de se placer dans un entre deux : entre résultats de recherche, expérience de formation, analyse de moments d'apprentissage et de pratiques de classe.

Ce texte est donc une réflexion personnelle, nourrie par les travaux de recherche de collègues, mon travail dans des groupes de recherche notamment du LDAR, ma participation à la rédaction des textes de mathématiques du primaire 2002 (documents d'application et documents d'accompagnement), mes échanges avec mes collègues mathématiciens au sein de le CREM[1] et bien sûr mes recherches et mon expérience de formatrice d'enseignants. La brièveté de l'exercice m'a conduit à limiter les citations de travaux et de leurs auteurs.

Sur l'impact des programmes sur les pratiques

Les programmes changent-ils les pratiques ?

- Ils les changent s'ils sont accompagnés de formation : par exemple les « problèmes pour chercher », déjà présents dans les programmes antérieurs à 2002 (dès 1995), ont été introduits par les enseignants dans leur pratique après 2002, sans doute parce qu'ils y étaient plus explicités, qu'ils avaient

[1] CREM, Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, créée en 1999 par le Ministre Jack Lang à la demande des associations de mathématiciens (APMEP, SMAI, SMF et UPS) et dirigée par J.P.Kahane.

été mis en avant dans les nombreuses formations associées aux programmes 2002. De plus les séances de problèmes pour chercher pouvaient être insérées dans les pratiques sans trop les bouleverser, entre deux progressions notionnelles classiques.

- Ils les changent si les auteurs de manuels intègrent les nouveautés du programme en respectant leur esprit.
- Mais ils ne les changent pas toujours dans le sens voulu : par exemple les séances de « problèmes pour chercher » n'ont pas toujours débouché dans les classes sur les conclusions attendues (mais insuffisamment explicites) du point de vue des mathématiques (rapport IGEN 2007).
- Ils ne les changent pas dans l'immédiat : par exemple la typologie des problèmes additifs introduite dans un paragraphe spécifique « Exploitation de données numériques » des *Documents d'application cycle 2* (2002), notamment pour hiérarchiser les difficultés du calcul relationnel en jeu dans ces problèmes, a été intégrée dans certains manuels. Elle a été développée en partie en 2010 dans *Le nombre au cycle 2* et *Le nombre au cycle 3* par des collègues de terrain qui l'utilisent, elle fait donc son chemin, sans encore atteindre la majorité d'enseignants ou d'auteurs des manuels.

Sur la forme à donner aux textes de programmes

La variabilité individuelle des enseignants, des auteurs de manuels, l'absence de temps conséquent de formation avec les enseignants en présentiel démultiplient les interprétations des textes de programmes. Inversement certains puristes épluchent les textes de programmes, au mot près, cherchant à déceler l'interprétation la plus conforme à ce qui est demandé.

Un phénomène à l'œuvre dans les programmes est appelé le paradoxe de l'explicitation (Sierpinska 2006) : un accent trop fortement mis sur une notion, une technique OU au contraire une absence (parce qu'on suppose la notion incontournable dans les pratiques), décuple son importance OU son inutilité pour les apprentissages. **Toute notion très explicitée peut faire de l'ombre aux notions proches moins traitées dans les programmes** Par exemple en 2002 les problèmes pour chercher ont fait le *buzz* ; mais cela a pu faire diminuer la place de problèmes « basiques » ou « complexes » (voir plus loin). **Un programme est aussi une affaire d'équilibre entre un attendu des enseignants et une volonté de transformations des pratiques pour un apprentissage plus efficace des savoirs à enseigner**.

Une entrée nécessaire dans les programmes **est celle des savoirs** : il semble incontournable de les faire apparaitre de façon assez fine, quitte à donner un texte de savoir qui pourrait servir aux élèves. Sur ce point, la demande des enseignants est forte, des recherches ont montré (Allard, LDAR en cours) qu'en classe il est souvent hors des habitudes et difficile de faire écrire ce qui est utile pour la suite des apprentissages, ou que sont proposées des formulations métaphoriques qui entrainent des malentendus. Le travail de thèse Tempier (2013) a montré que les enseignants sont plus réceptifs aux propositions de textes de savoir destinés aux élèves qu'aux textes explicatifs qui leur sont destinés.

Par exemple : voici un exemple de texte de savoir sur les fractions $\frac{1}{n}$ qui pourrait conclure un **premier** travail sur les fractions à partir de longueurs.

Fractions d'une unité :	
Un demi $\frac{1}{2}$	L'unité et partagée en deux parties égales, chaque partie est une **demie-unité** : $\frac{1}{2}$ *unité* (la **moitié** d'une unité Une demie-unité plus une demie-unité égale une unité : $\frac{1}{2}\ unité + \frac{1}{2}\ unité = 1\ unité$ [2]
Un quart $\frac{1}{4}$	L'unité et partagée en quatre parties égales, chaque partie est **un quart** d'unité : $\frac{1}{4}\ unité$ Quatre quarts d'unité égalent une unité : 4 x $\frac{1}{4}\ unité = 1\ unité$ Un quart d'unité est la moitié d'une demi- unité :
Un huitième $\frac{1}{8}$	L'unité et partagée en huit parties égales, chaque partie est un **huitième** d'unité: $\frac{1}{8}\ unité$; Deux huitièmes d'unité égalent un quart d'unité : 2 x $\frac{1}{8}\ unité = \frac{1}{4}$unités

Ce texte (avec dessins représentant des longueurs associées, ou des aires) **du registre scientifique** remplace utilement tout autre texte sur les parts de galette, le quatre-quarts… qui sont dans le **registre familier**.

La difficulté de rédiger les programmes est aussi de séparer ce qui est attendu pour les élèves des recommandations (qui tiennent de formation) pour les enseignants. Une façon de contourner cet obstacle pourrait être de proposer

[2] Les écritures rendent compte des actions et discours des élèves sur leurs actions. Il n'est pas question de réduction au même dénominateur

des textes de savoir. Mais il n'est pas sûr que tous les apprentissages puissent se résumer par des textes de savoir.

Plus généralement

Pour être efficaces, les programmes doivent être accompagnés de situations qui scénarisent les contenus à enseigner. Est-ce l'objet des programmes d'intégrer des exemples de situations ? Les réponses fournies dépendent sans doute des pays et des époques...

Les manuels scolaires et certaines ressources prennent cela en charge. On trouve aussi sur la toile des propositions de situations, d'exercices, d'activités, de qualité très variable quant aux mathématiques fréquentées, à la scénarisation proposée, et finalement aux apprentissages potentiels. Un programme devrait contribuer à mieux choisir des situations, des exercices, des problèmes et construire des cohérences relativement à un savoir ou un réseau de savoirs…

L'accompagnement des programmes : une nécessité

Le nombre au cycle 2 et *Le nombre au cycle 3* (publications MEN 2010) n'ont pas été beaucoup lus, me semble-t-il. Il conviendrait plutôt de dire que leur impact a été fortement diminué par le fait que leur diffusion n'a pas été accompagnée de formation des enseignants, de formation par des spécialistes de questions d'enseignement de mathématiques en primaire. Peut-être aussi que leur forme d'écriture permet de réfléchir aux pratiques, mais elle ne donne pas toujours de conseils suffisamment opérationnels.

Une entrée dans les contenus par des principes

Une vraie question : peut-on intégrer les éléments « robustes » les plus récents de la recherche dans un programme ? Il y a un certain risque de mauvaise interprétation par des enseignants non formés ou persuadés que puisque les mathématiques ne changent pas, leur enseignement non plus !

La communauté didactique peut sans doute aider à mesurer le degré d'intégration possible de telle ou telle « nouveauté », dans les programmes.

Il me semble qu'il serait important de mettre en avant dans les programmes **quelques « principes » qui traversent au moins les deux cycles (du CP à la 6ème).** L'intérêt de pointer quelques principes permettrait à l'enseignant de structurer sa vision de l'enseignement des mathématiques et aux élèves celle des mathématiques et d'abord définir l'enjeu des mathématiques dans ces cycles.

0. L'enjeu des mathématiques dans ces cycles

Les mathématiques sont un ensemble de savoirs et de techniques qui permettent d'anticiper les résultats d'actions (réelles ou évoquées) sur des objets (des quantités, des grandeurs, des déplacements, des configurations spatiales) sans mener ces actions (ou en minimisant les actions menées), mais par la force de la pensée articulant ces savoirs et ces connaissances.

Comment je peux savoir combien de personnes il y aura dans la pièce si 15 personnes entrent suivies de 37 autres, sans les dénombrer ? En pensant la réunion de deux collections, en connaissant un programme qui donne la quantité totale (15+37), en ayant une technique pour exécuter ce programme (par exemple 15+37=37+10+5=47+5=52 : on y voit toutes les propriétés : commutativité de l'addition, décomposition adaptée du second terme, ….).

C'est le fondement des problèmes notamment arithmétiques : trouver par la pensée sans mettre en scène le scénario proposé dans l'énoncé.

Il me semble que l'importance d'un projet de lecteur pour motiver l'élève pour la lecture fait consensus. Il faudrait introduire le projet du « mathématiqueur ».

Je me concentre dans la suite sur le numérique : quantités, grandeurs et nombres.

1. Il existe de multiples façons de désigner un nombre entier (par oral ou par écrit). Il est important :

- **que les élèves soient familiers avec plusieurs désignations** (que nous allons lister ci-dessous) ce qui signifie qu'ils en comprennent le sens : en particulier ils sont capables de désigner une collection par tel type de désignation[3] et inversement ils sont capables de produire une collection[4] donnée par tel type de désignation**.**

[3] Désigner une collection par 3+2 doit/peut être installé dès la maternelle, par exemple pour un élève qui ne sait pas encore écrire 5, mais 1, 2, 3, 4 : sont ainsi accessibles 3 types de désignations symboliques dès la maternelle : cinq // 5 // 3+2 ; 2+2+1…

[4] En utilisant un matériel concret en cycle 2

- **qu'ils sachent passer d'une désignation à une autre,** avec des liens à accentuer entre certaines désignations.

Les désignations importantes sont (sur l'exemple cent quarante-six) : le nombre oral usuel, le nombre écrit en chiffres ou écriture décimale du nombre (146)[5], des écritures additives[6] (140+6 ; 70+76 ; 50+50+46 ; 150-4 ; 200 - 54….) , des écritures multiplicatives et plus généralement arithmétiques (2x73 ; 2x70+6 ; 3x50-4 ; (300 :2) -40…. ; le nombre en unités de numération[7] (1 centaine, 4 dizaines, 6 unités ; 14 dizaines 6 unités ; 1 centaine 3 dizaines 16 unités ; 146 unités….).

On voit sur les exemples que les tâches de changement de désignation englobent des connaissances sur la numération et le calcul.

Cette remarque est bien sûr aussi vraie **pour les nombres non entiers** ; écriture décimale canonique (3,56) ; écritures fractionnaires ($\frac{356}{100}$, $\frac{3560}{1000}$, etc.) ; écritures arithmétiques souvent mixtes ($3+\frac{5}{10}+\frac{6}{100}$; $3+\frac{56}{100}$; $3+0{,}56$; $2+1{,}56$; $1{,}7+1{,}86$; etc : écritures en unités de numération : 3 et 56 centièmes ou 3 unités simples et 56 centièmes ; 3 et 5 dixièmes et 6 centièmes ; 3 et 560 millièmes).

2. La connaissance de la numération (écriture décimale des entiers et des non entiers, numération orale) structure et nourrit le travail sur les nombres et le calcul : elle se développe tout au long de la scolarité primaire, est cruciale en CE sur les entiers, reste cruciale en CM notamment pour la compréhension de l'écriture décimale (à virgule) des fractions décimales (les nombres décimaux)[8].

Les enseignants semblent souvent ne pas être au point dans l'enseignement de la numération, qu'elle soit orale ou écrite (en chiffres) : ils savent que la numération écrite est décimale (interprétée comme dix joue un rôle essentiel, pour compter on regroupe par dix, mais sans véritable lien construit avec l'écriture des nombres) ; que la numération écrite est aussi de position (un chiffre dans un nombre a une valeur qui dépend de sa place dans le nombre), mais ils ne savent pas toujours opérationnaliser ces deux principes.

[5] Il existe aussi des désignations mixtes oral--écrit usuelles : cent 46 ; 2 fois 73 ; très utiles pour les grands nombres 1 234 567 « 1 million 234 mille 567 »
[6] Le nombre écrit en addition soustraction
[7] Expression introduite par Chambris 2008
[8] La réflexion qui suit est nourrie des travaux de thèse Chambris (2008), Mounier (2010), Tempier (2013) (université Paris Diderot), les écrits auxquels ils se réfèrent et d'autres

Il me semble important de (leur) rappeler les propriétés de notre numération ou encore comment peut s'expliquer la construction de la numération orale et écrite.

Notre numération[9] orale et écrite des entiers est décimale :

- il existe un nom/chiffre différent qui désigne chaque collection de un objet, deux objets, …. neuf objets;
- un groupe de dix objets forme une nouvelle unité, appelée dizaine ; on peut compter en dizaines.
- un groupe de dix dizaines d'objets forme une nouvelle unité, appelée centaine : on peut compter en centaines
- idem avec les unités mille, dizaines de mille, centaines de mille, millions, dizaines de millions, centaine de millions[10]……
- plus généralement le **principe décimal** : *Dix unités d'un ordre quelconque forment une unité de l'ordre immédiatement supérieur* (voir par exemple Tempier 2013)

Finalement on peut décrire toute collection d'objets par des quantités inférieures à dix d'unités (simples), de dizaines, de centaines, de mille, de dizaines de mille, de centaines de mille, de millions, de dizaines de millions, de centaines de millions d'objets.

Les expressions citées ci-dessus sont connues des curricula et des enseignants, elles existent dans les manuels, mais souvent uniquement dans le tableau de numération : le rôle que les enseignants font jouer à ces expressions actuellement n'est pas celui d'**unité** (ils utilisent d'ailleurs peu cette expression seule pour le thème numération, c'est-à-dire comme référence pour compter avec la possibilité de changer de référence).

Il nous semble intéressant d'institutionnaliser la « numération en unités » pointée par Chambris 2008, et de désigner ces expressions par « unités de numération ».

[9] La numération vue comme une désignation « compacte » des nombres avec peu de symboles de base.
[10] Les anglophones parlent de « ones, tens, hundreds, thousands »

En effet le nombre écrit en chiffres qui mesure une collection est la **juxtaposition ordonnée**, de la droite vers la gauche, des nombres d'unités selon leur ordre de grandeur croissant (ordre 1 : unités simples, ordre 2 : dizaines ; ordre 3 : centaines etc.) sans mention explicite des unités. L'absence d'une unité isolée est notée par 0. C'est **le principe de position.** La numération en unités rend parfaitement compte de la cohérence interne, mais cachée, du nombre écrit en chiffres : 7 unités 8 dizaines 6 centaines pou 687 OU 3 unités 4 dizaines 5 milliers pour 5043.[11]

Pourquoi institutionnaliser « numération en unités » et « unités de numération » ? Une expression nouvelle peut déclencher de la part des enseignants et de auteurs de manuels une attention particulière, créer des résonances souhaitées avec le système métrique et ses unités (5kg 250g comme 5 milliers 250 unités, Chambris 2008), notamment sur les tâches de conversions à l'intérieur du système d'unités : 3 centaines = 30 dizaines ; 2 centaines 16 dizaines = 3 centaines 6 dizaines car 10 dizaines =1 centaine, utiles à la compréhension du calcul notamment posé en colonnes.

A termes les tâches : « quel est le chiffre des dizaines de 162 ? » qui ne renvoient qu'au principe de position devraient disparaitre au profit de « écrire 162 en unités de numération » ; « combien de dizaines dans 162 ? » qui renvoient aux principes décimal et position (voir travaux de Tempier 2013 pour des contextualisations). L'écriture en unités de numération pourrait remplacer les décompositions arithmétiques de type 263=2X100 + 6x10 +3 qui embarquent les élèves vers le calcul sans suffisamment mettre l'accent sur la valeur des chiffres.

La numération écrite est une numération décimale de position. Elle fonctionne avec seulement dix symboles, les neuf chiffres et le zéro. Le nombre de chiffres d'un nombre indique sa grandeur : s'il est composé de 3 chiffres, il est situé entre cent et mille ; s'il est composé de 7 chiffres, il est situé entre cent mille et un million (mille mille). Il est remarquable que n'importe quelle juxtaposition de chiffres soit un nombre.

La numération orale n'est pas une numération de position, même si la position des mots change parfois le sens du nombre : 'quatre vingts' et 'vingt-quatre' ; 'cent deux' et 'deux cents' ; 'cent dix' existe, mais pas 'dix cents'. L'apprentissage des noms de nombres est difficile, notamment à cause de singularités des expressions traditionnelles. La numération en unités pourrait être une alternative pour parler les nombres avant même de connaitre tous les

noms usuels, en complément d'expressions provisoires, notamment en cas de difficulté à mémoriser les noms usuels :
Entre dix et vingt : dix-un OU une dizaine et une unité, dix-deux dix-un OU une dizaine et une unité
Au-delà de vingt : deux dizaines / deux dix / vingt 70 7 dizaines

Pour la lecture des grands nombres au-delà de quatre chiffres, le rôle d'unités spécifiques (mille, million, milliard…) se dégage : le nombre s'exprime à partir de ces unités ce qui revient à le séparer en groupes (classes) de 3 nombres à partir de la droite. Chaque classe reçoit un nom mille, million, milliard, etc..

Tâche de lecture de 78561123 78 561 123 78 millions 561 mille 123

Tache d'écriture de 1 million 25 mille 78 1 25 78 ne peut pas convenir, en effet il s'agit de 12 578 qui se lit 12 mille 578. Il faut donc adapter pour la bonne lecture : 1 025 078 :

La numération en unités pourrait s'introduire à mi - CP, mais il faut garder à l'esprit qu'il est difficile pour les élèves de voir à la fois UNE dizaine et DIX unités dans dix bâtonnets assemblés par un élastique. Les jeunes élèves (GS, CP, début CE1) restent sensibles à l'approche perceptive du matériel (par exemple bâtonnets isolés et regroupés par dix) et au comptage par unités simples : c'est à l'enseignant de les aider à doubler leur point de vue. UNE dizaine et DIX unités sont deux points de vue simultanés sur des organisations d'objets matériels : dix objets regroupés en un tout ou pas.
La numération en unités trouve tout son sens en CE1 (et les classes suivantes) avec le travail sur les centaines (et au-delà). Un travail sur les désignations est possible qui trouve sa finalité pour les calculs : '14 dizaines et 5 unités', '1 centaine 4 dizaines 5 unités', mais aussi '13 dizaines et 15 unités'.
La numération en unités est une désignation des nombres **qui traverse la scolarité primaire** : elle permet de justifier les techniques opératoires, elle aide au calcul en ligne, elle donne du sens à l'écriture décimale des fractions décimales (les nombres décimaux) : elle est donc un outil puissant de justification de techniques.

<u>Calcul</u>
74+56+32= 12 unités et 15 dizaines =165
152-68 = 15 dizaines 2 unités -6 dizaines 8 unités = 14 dizaines 12 unités - 6 dizaines 8 unités = 8 dizaines 4 unités

Nombres rationnels

Fractions :

Le **principe décimal** et le **principe de position** s'appliquent à l'écriture en chiffres des nombres décimaux. La numération en unités, avec ajout de nouvelles unités (partage en dix successifs) rend parfaitement compte et explicite cette écriture

45,123

45 unités simples, 1 dixième, 2 centièmes, 3 millièmes OU

45 unités simples, 12 centièmes, 3 millièmes OU

45 unités simples, 123 millièmes.

De la même façon qu'un travail sur des organisations de bâtonnets (des collections) permet de donner du sens aux unités de numération des entiers, un travail sur des bandes (des longueurs) peut donner du sens aux nouvelles unités de numération :

- un dixième d'unité est une part de l'unité obtenue en partageant l'unité partagée en dix parties égales
- un centième d'unité est une part de l'unité obtenue en partageant l'unité en cent parties égales.

Il semble important d'introduire les fractions de longueurs et plus généralement l'étude de certains rationnels (écrits notamment sous forme fractionnaire) : de plus les noms des nouvelles unités de numération sont aussi ceux des écritures fractionnaires associées :

$\frac{1}{10}$ un dixième $\frac{1}{100}$ un centième $\frac{1}{1000}$ un millième etc.

Cette cohérence entre langage mathématique et parler usuel est bienvenue ici dans la langue française. Elle rend inévitable l'utilisation des unités de numération sous multiples de l'unité simple. Elle justifie a posteriori l'introduction des unités de numération pour les entiers.

Chez nos voisins anglophones, cette proximité langagière existait déjà avec les unités de numération des entiers : en effet *unités simples* se dit *ones* (les uns) ; *dizaines* se dit *tens* (les dix) ; *centaines* se dit *hundreds* ; etc. En France cette proximité n'existe que pour les unités de numération sous - multiples de l'unité simple.

3. Matériel et langage, conceptualisation et matériel

Certains matériels et certaines actions sur le matériel sont souvent bien utiles pour accéder à une première signification d'un concept. Mais ils ne remplacent pas le concept et ne génèrent pas spontanément de la conceptualisation.

Dans le paragraphe précédent ont été évoquées les unités de numération, unités simples, dizaines, centaines, etc… Par exemple il est relativement usuel et adéquat de donner du sens à ces expressions par des tâches de dénombrement de collections de bâtonnets , qu'il s'agit d'organiser par paquets de dix, puis sacs de cent, puis boites de mille. Mais ce n'est pas uniquement la vue de la collection totalement organisée ou les actions sur la collection qui construisent les unités de numération, ou le fait de montrer un paquet de dix qui rappelle ce qu'est une dizaine, mais **un travail oral et écrit** sur les égalités : 10 unités = 1 dizaine ; 3 dizaines = 30 unités ; dans 16 dizaines il y a une centaine.

C'est pourquoi les mots qui décrivent le matériel comme ici paquets de dix bâtonnets, plaques de cent timbres peuvent jouer le rôle de perturbateurs. Il serait a priori plus adapté d'utiliser tôt des termes plus mathématiques comme dizaines de bâtonnets, centaines de timbres, etc…. **Il serait bon d'éveiller la vigilance de l'enseignant sur ces questions de langage :** une même expression pour des contextes différents comme dizaine de bâtonnets, dizaine de timbres, dizaine de perles contribue à souligner l'invariant visé**.**

Plus généralement il serait sans doute intéressant dans les programmes de préciser les mots / expressions mathématiques (**registre scientifique**) que l'enseignant doit utiliser et faire utiliser par ses élèves. Cela ferait partie des éléments pour générer des textes de savoir. Voir des exemples dans le paragraphe suivant.

4. Concernant le calcul : Il est essentiel

- **de mettre en avant une dialectique calcul automatisé/ calcul réfléchi en résonance avec problèmes automatisés / problèmes autres** (voir plus loin), **comme dans les programmes 2002 :**
- **de convaincre enseignants et élèves de la nécessité de raisonner le calcul pour et avant de mémoriser des faits ou des techniques.**

Les textes Butlen & Masselot (le nombre au cycle 2, le nombre au cycle 3) sont éclairants sur cette question. Fournir une progression (voir par exemple le

Document d'Accompagnement des programmes 2002, Calcul mental 2005) aide aussi les enseignants.

Dans tous les cas il est important d'aider l'enseignant à mobiliser le langage adapté pour justifier la calcul mathématiquement et à l'encourager à faire mobiliser ce langage par les élèves.

Calcul automatisé

Ce qu'il est souhaitable que les élèves sachent de mémoire (ou par reconstruction mentale rapide).

Il comporte des faits déclaratifs (toute composition / décomposition additive de nombres de 1 à 20, table de multiplications, décompositions en dizaines et unités, etc.) et des techniques (pour multiplier par dix, placer un zéro à droite ou décaler la virgule d'un rang vers la droite, distribuer la multiplication relativement à l'addition, etc.) liées à l'écriture décimale des nombres.

Il n'est sans doute pas opportun d'automatiser des techniques de calcul sur écritures fractionnaires avant le cycle 4.

Calcul réfléchi

Ce que les élèves doivent pouvoir calculer en construisant pour l'occasion une stratégie. Par exemple 56x11 vu comme 560 et 56, vu comme 560+40+16.

Une réflexion sur les techniques opératoires

Prenons l'exemple des techniques liées aux quatre opérations : tout d'abord il existe pour chaque opération **des** techniques pour chaque modalité : mentale, écrite réfléchie, écrite posée en colonnes.

Certaines techniques sont plus économiques que d'autres en mémoire sollicitée : les techniques posées (du moins pour l'addition et la soustraction) ne sollicitent que les sommes et différences de nombres d'un chiffre, mais reposent aussi sur des propriétés mathématiques (qui peuvent rester cachées aux élèves).

Il est important que les calculs soient demandés sous forme d'une expression en ligne de nombres (souvent avec un nombre de chiffres différents). En effet la mise en colonne est très souvent inutile en particulier pour l'ajout d'un nombre d'un chiffre. C'est alors à l'élève de choisir la mise en colonnes et de mettre en colonnes.

Techniques locales (orales ou avec support écrit)**,** liées aux nombres en jeu et aux connaissances qu'a l'élève sur tel nombre ou telle procédure. Ces techniques sont locales mais elles mettent en jeu les propriétés des nombres en jeu dans le calcul. A ce titre-là elles sont essentielles <u>pour leur valeur épistémique</u> (Artigue 2004).
54+37 : en décomposant chaque nombre ou un des nombres et recomposant pour la somme
Exemple 1 : faire 50 plus 30 et 4 plus 7 soit 80 plus 11 soit 91
Exemple 2 : faire 54 plus 30, 84, plus 7, 91
Exemple 3 : faire 54 plus 40 et retirer 3.

Techniques en unités de numération : ces techniques sont au début illustrées par des actions matérielles sur objets groupables dégroupables (par exemple bâtonnets). Les techniques en unités de numération ont une <u>grande valeur épistémique</u> (vers la compréhension du nombre écrit en chiffres)
54+37 : je dois ajouter 5 dizaines et 4 unités et 3 dizaines et 7 unités, ce qui fait 8 dizaines et 12 unités. Je trouve encore 1 dizaine dans 12, ce qui fait 9 dizaines et 2 unités, donc 92.

Techniques générales en colonne :
Elles sont utiles pour aller vite, moins se fatiguer et calculer avec de grands nombres ; elles ont une <u>grande valeur pragmatique, mais une valeur épistémique faible, sauf si le langage (le parler de la technique) qui les accompagne est adapté.</u>
Les algorithmes de calcul usuels font aussi partie du calcul automatisé.

T2 : Technique posée en colonne de l'addition :

1 1 1 8 5 <u>+ 2 7</u>	**Attention au langage** Ne pas dire : 5 plus 7 : 12, je pose 2 et je retiens 1 **MAIS dire** 5 plus 7 : 12. Je pose 2 sous les unités et je retiens 1 dizaine (ou j'écris 1 dizaine au-dessus des dizaines) 8 et 2 : 10 dizaines et 1 : 11 dizaines. J'écris 1 sous les dizaines et je retiens 1 centaine 1 et 1 : 2 centaines

T3 : Technique posée en colonne de la soustraction à appeler « technique par décomposition d'une unité d'ordre supérieur ». Éviter les qualificatifs trop métaphoriques : par emprunt, par démolition… qui parfois engendrent des malentendus chez les élèves.

Cette technique peut s'illustrer avec un matériel groupable/dégroupable et se dire en utilisant les unités de numération : elle rappelle que le nombre n'est pas une juxtaposition de chiffres à traiter indépendamment les uns des autres.

comme semble le croire l'élève qui calcule ainsi

$$\begin{array}{r} 1\,9\,5 \\ -\;\;2\,7 \\ \hline \mathbf{1\,7\,2} \end{array}$$

Mais que chaque chiffre est lié aux autres par la positon qu'il occupe dans le nombre.
Elle permet de renforcer les unités de numération.
Elle est opérationnelle pour tel élève quand il la réussit sans matériel.

8 1 ~~9~~ 15 - 2 7	**Attention au langage** Dire 7 ôtés de 5 : je ne peux pas travailler avec les unités seulement Ne pas dire je casse la dizaine OU j'emprunte une dizaine MAIS je décompose la dizaine en 10 unités : j'ai donc 15 unités et 8 dizaines (ou 15 unités et 18 dizaines) 7 ôtés de 15 reste 8 : j'écris 8 unités Dire 2 ôtés de 8 : reste 6 dizaines Reste 168

Cette technique usuelle repose sur des connaissances sur la numération (nombre en unités de numération) ; elle ne transforme qu'un nombre. Elle est moins coûteuse en connaissances que la technique T4 suivante, elle a cependant la même valeur pragmatique.

T4 : technique en colonnes de la soustraction dite par ???. Il est difficile de trouver un nom ; elle est parfois appelée « technique par compensation » ; le plus juste mathématiquement serait « technique par compensation entre les deux nombres ».
Attention aux métaphores qui embarquent les élèves vers d'autres significations : par exemple si on parle d'emprunt, certains élèves se demandent à qui on a emprunté….».

 1 9 15 - 2 7 1	**Attention au langage** Dire 7 ôtés de 5 : je ne peux pas travailler avec les unités seulement J'ajoute 10 unités au premier nombre dans les unités : j'ai donc 15 unités Pour compenser j'ajoute 1 dizaine aux dizaines du second nombre qui a alors 3 dizaines: 7 ôtés de 15 donne 8 unités : j'écris 8 sous les unités 3 ôtés de 9 donne 6 dizaines …. Je trouve 168

Cette technique est plus coûteuse en justification mathématique (nombre en unités de numération et invariance de la différence de deux nombres par translation) elle nécessite plus de connaissances, elle est beaucoup difficile pour le cycle 2 que la technique **T3**. Elle a cependant la même valeur pragmatique.

Doit-on enseigner plusieurs techniques de calcul : de fait oui si on lit ce qui précède, notamment pour les technique locales qui doivent toujours précéder les techniques générales.
Doit-on enseigner plusieurs techniques générales (techniques en colonnes) dans une classe, une école ? **A priori non en cycle 2, il serait même opportun de se mettre d'accord sur la technique retenue, la façon de l'écrire et de la dire.** Mais l'enseignant doit accepter d'autres techniques (par exemple venant d'autres écoles) : la technique « étrange » est analysée par la classe, validée (justification mathématique et économie). Il est normal que vivent dans la classe plusieurs techniques, l'important étant que chaque élève sache calculer.

5. Les problèmes arithmétiques

Comme dans le calcul, il existe une dialectique entre problèmes « automatisés » (l'élève fait appel à sa mémoire des problèmes) et problèmes qui ne le sont pas (nous dirons abusivement dans ce texte « problème à recherche »

- Au niveau du sujet : face à un problème un élève peut d'une certaine façon le reconnaitre et inférer de sa mémoire une stratégie adaptée (problème automatisé) ; sinon il a à construire une stratégie nouvelle (problème à recherche). **Conséquence fondamentale : plus l'élève a réussi personnellement de problèmes, plus il en réussira d'autres….**.

- Au niveau institutionnel (programmes) : c'est aux programmes de définir
  - quels types de problèmes l'élève moyen de tel cycle devrait reconnaitre (problème automatisé) : cela ne veut pas dire que la stratégie qu'il emploiera pour réussir doive être imposée[12]
  - et quels autres problèmes l'enseignant peut poser sachant que l'élève moyen devra essayer, chercher, construire une nouvelle stratégie.

Je me limite ici aux problèmes arithmétiques.
Il est bon de rappeler qu'un problème peut être donné de multiples façons : mimé, action arrêtée, oral répété, texte écrit, texte écrit avec image, texte écrit avec autres supports.

Problèmes « automatisés » : ce que j'ai appelé **les problèmes basiques**, id est les problèmes à deux données numériques trouver la 3ème ou à trois données numériques trouver la 4ème (proportionnalité) sans donnée superflue, avec une formulation raisonnable, voire minimale s'ils sont en texte, avec les informations non dispersées. A priori trouver le bon modèle (une des quatre opérations ou la proportionnalité) permet de résoudre ces problèmes ce que font souvent les élèves quand ces problèmes sont automatisés pour eux. **Dans tous les cas les élèves « ont le droit » de construire des stratégies,** le but étant toujours qu'ils réussissent le problème. Si on regarde le temps d'apprentissage, un problème automatisé pour un élève a d'abord été un problème à recherche.

Les problèmes basiques (additifs et multiplicatifs) ont été catégorisés et hiérarchisés par Vergnaud repris par Fayol (1990) selon la complexité des types de raisonnements en jeu, indépendamment des autres variables : taille de nombres, nature des nombres (entiers ou non), cohérence temporelle des informations dans le texte avec celle de l'action /du traitement, etc. Voire même influence des contextes.

Cette hiérarchisation est à intégrer dans les programmes, elle est à travailler en formation, elle est citée dans plusieurs articles du *Nombre au cycle 2, cycle 3* pour les problèmes additifs ; elle faisait partie des Documents d'application cycle 2 (2002), sous une forme peut-être trop vulgarisée. C'est un outil d'aide à l'enseignement et l'évaluation. Cependant elle a du mal à « prendre » dans les

[12] Comme dans les programmes 2008 la mention de la règle de trois pour la proportionnalité : en effet il existe de multiples stratégies pour réussir un problème de quatrième proportionnelle, appuyées sur des propriétés de linéarité.

classes et les manuels ordinaires par manque de formation fine des enseignants et de leurs superviseurs.

Il est à préciser que cette hiérarchisation définit aussi le sens des opérations : par exemple le sens de la soustraction est la liste des types de problèmes relevant du calcul arithmétique de la soustraction : recherche de l'état final connaissant la transformation négative et l'état initial sur lequel elle agit , recherche de la transformation (additive ou soustractive) si on connait les états initial et final, recherche d'une partie d'un tout quand le tout et les autres parties sont connues, , recherche de l'état initial connaissant la transformation positive et l'état final, recherche du référé connaissant le référent et la comparaison négative, etc…. Ces différents types de problèmes composent le sens de la soustraction, ses différentes facettes : on pourrait ainsi (en listant les types de problèmes dont la réussite automatisée est visée) définir par cycle le sens attendu pour la soustraction.
On sait qu'il n'est pas raisonnable d'enseigner séparément les problèmes d'addition et de soustraction, du fait des proximités de raisonnements sollicités. Par contre l'apprentissage des sens de l'addition comme de la soustraction peut s'étaler sur les deux cycles.
Les quatre premières catégories (transformation d'un état, composition de deux états, comparaison de deux états, composition de transformations) définies par Vergnaud modélisent assez bien tous les problèmes additifs (relevant de l'addition et de la soustraction) des deux cycles (2,3). Attention une catégorie ne définit pas un ordre de difficulté : la difficulté vient aussi de la place de l'inconnue dans le schéma ternaire avec lequel Vergnaud modélise les catégories (indépendamment d'autres variables : formulation, contexte…)
Addition et soustraction sont conceptuellement liées : on aborde des problèmes additifs et soustractifs simultanément, on introduit les signes + et – simultanément, on calcule des sommes (même de nombres de deux chiffres) et des différences bien avant que soit institutionnalisée une technique. Par contre la technique en colonnes de l'addition sera institutionnalisée avant une technique en colonnes de la soustraction.
Idem pour multiplication et division exacte ; puis division euclidienne.

Autres types de problèmes
* **Les problèmes complexes** : cette rubrique regroupe des composés de problèmes basiques OU des problèmes basiques surchargés d'informations, souvent la majorité de problèmes posés dans les classes. Un tel problème est résoluble par un élève s'il a automatisé les problèmes basiques sous-jacents et s'il sait les construire.

* **Les problèmes à recherche** : il est important de laisser vivre ces problèmes dans l'institution notamment pour aider les élèves à changer leur attitude face aux mathématiques. De toute façon qu'ils aient une existence institutionnelle ou pas, les élèves sont à un moment ou un autre de leur scolarité confrontés à de tels problèmes (ceux qu'ils n'ont pas « automatisés ») ; deux possibilités s'offrent alors à eux :

- soit ils renoncent à se mettre au travail car ils croient qu'ils ne sont pas capables de faire ce qu'ils n'ont jamais fait,
- soit ils ont confiance en eux, un contrat dans ce sens est installé dans la classe, ils essaient alors de construire une nouvelle stratégie en essayant, réfutant, adaptant des stratégies issues de leur mémoire des problèmes.

Il est donc important que l'enseignant installe un contrat du droit à la réussite non immédiate, à la résolution par essais successifs et si possible contrôle de la réponse obtenue. La proposition de « problèmes à recherche » va dans ce sens.