Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C 2, C3 et C4

Nathalie Sayac,

Maître de conférences
Université Paris Est Créteil (ESPÉ de Créteil)
Université Paris-Diderot (LDAR)

Contribution à la réflexion sur les nouveaux programmes du cycle 3 et du cycle 4

octobre 14

Nathalie Sayac
MCF en didactique des mathématiques,
Université Paris Est Créteil (ESPE de Créteil)
Université Paris-Diderot (LDAR)
nathalie.sayac@u-pec.fr

Cette contribution est le fruit d'échanges avec des collègues que j'ai sollicitées (N. Grapin, M-L Peltier, C. De Hosson, N. Pfaff) pour avoir leur avis sur les questions posées par le CSP afin de répondre de manière (un tant soit peu) collective, même si certaines réponses n'engagent que moi.

Le temps imparti ne m'a pas permis de répondre aussi précisément que je l'aurais souhaité.

1. Quelles connaissances ou compétences en mathématiques peuvent être attendues de tous les élèves en fin de Cycle 3 ? En fin de Cycle 4 ? Avec quels niveaux de maîtrise au cours de chaque cycle ? A quels moments de la scolarité situez-vous des paliers dans les apprentissages ? Pouvez-vous caractériser ces paliers ?

L'organisation de la scolarité primaire-6ème en quatre cycles de 3 ans me parait mieux adaptée que l'organisation actuelle, ces nouveaux cycles semblant mieux correspondre aux paliers de développement des élèves tant sur le plan cognitif que sur les plans affectif et comportemental. Envisager des paliers en fin de chacun des cycles paraît à la fois cohérent et pertinent.
Le premier (fin de cycle 1) peut être caractérisé par l'entrée réussie dans le monde de l'école : compréhension des enjeux fondamentaux de l'école (développer des comportements, des postures, des outils et des méthodes pour observer, analyser, comprendre, s'exprimer, s'interroger, créer) comme c'est déjà le cas, mais la terminologie apprentissages « premiers » n'est peut-être pas adaptée quand on voit la somme d'apprentissages réalisés avant l'école.
Le cycle 2 met l'accent sur les « apprentissages fondamentaux » et il convient de garder cette appellation. Le cycle 3 pourrait renforcer les apprentissages fondamentaux dans une perspective d'ouverture sur le monde. Le cycle 4 pourrait inclure de manière beaucoup plus visible les apprentissages dans une perspective citoyenne et culturelle comme le préconise le texte de cadrage du socle commun.

2. Quelles difficultés principales voyez-vous dans la mise en œuvre d'un socle commun ?

Une des difficultés actuelles du socle commun réside dans le fait qu'il n'y pas d'accord sur le terme de compétence (bien défini à partir du collègue, mais très flou à l'école primaire). Une harmonisation de ce qui est attendu derrière le terme de compétences (de l'école maternelle au lycée) est donc indispensable à une bonne appropriation du socle commun.

La mise en place du socle commun et par conséquent le développement de compétences chez les élèves demande à ce que ces derniers soient confrontés à des situations complexes. D'une part il est important que l'enseignant puisse distinguer la complexité de la difficulté, mais aussi qu'il puisse être outillé pour estimer *a priori* la complexité d'un exercice. En didactique des mathématiques, la distinction connaissance/compétence n'est pas réellement opérationnelle, mais elle l'est davantage en termes de savoirs/connaissances. Néanmoins, ayant mené une recherche sur l'évaluation des connaissances et des compétences réellement travaillées dans le bilan CEDRE 2008, en mathématiques, je conçois le développement de compétences en lien avec la mise en œuvre en classe de tâches complexes (Sayac, Grapin, 2013), même si les enseignants ne sont pas forcément prêts à appréhender cette complexité des tâches pour de multiples raisons (manque de ressources, en particulier pour le primaire, changement de pratique...). Il conviendra donc de les accompagner dans cette approche en formation initiale et/ou continue, en leur proposant différents outils permettant d'étudier la complexité d'un exercice (par exemple, les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de Robert 1998). Des exemples d'exploitation de ces outils dans le cadre d'une ressource pour la mise en œuvre du socle pourraient être bienvenus.

Par ailleurs, dans leurs pratiques quotidiennes, les enseignants se concentrent principalement sur programme concernant le niveau de leur(s) classe(s) car c'est à partir de celui-ci qu'ils construisent leur programmation. Le socle commun n'intégrant qu'une partie de ce programme n'est donc pas un outil dont ils ont un usage « naturel » ni dans leur enseignement, ni pour leur programmation, ni pour l'évaluation des élèves. La parution des nouveaux programmes en même temps que celle du nouveau socle aidera certainement les enseignants à s'en emparer. Ils le feront d'autant plus efficacement que l'écriture de ces deux documents sera harmonisée, en cohérence et bien articulée.

La dimension liée à la culture commune devra être suffisamment explicite pour permettre aux enseignants de s'en emparer et de mieux comprendre les finalités du nouveau socle.

3. Pourriez-vous nous présenter, de manière synthétique, les principaux résultats de la recherche en didactique dans votre champ disciplinaire, les débats qui le traversent et votre position sur ces débats ?

Numération : Les résultats de l'évaluation « la DEPP sur les connaissances des élèves de CE2 en calcul et en numération a suscité différents débats sur l'enseignement du nombre à l'école (maternelle et élémentaire), avec notamment, pour certains chercheurs, une remise en cause de l'approche employée durant ces trente dernières années. Or, différentes thèses menées en didactique des mathématiques sur l'enseignement de la numération à l'école permettent d'interroger plus en profondeur les raisons de ces résultats : par exemple la thèse de Chambris (2008) interroge les relations entre la numération décimale et les grandeurs, celles de Mounier (2011) et Tempier (2013) proposent des ingénieries didactiques pour enseigner la numération, respectivement au CP et au CE2. Alors que les résultats produits par Chambris ont commencé à être pris en compte dans le document ressource « le nombre au cycle 3 », ceux de Mounier et Tempier mériteraient aussi d'être exploités dans la construction de ressources institutionnelles accompagnant les programmes.

Opération/Calcul : Les travaux autour du calcul, des opérations et des techniques opératoires sont connus et depuis longtemps pris en compte dans les programmes et dans les ressources pour les enseignants, même si les avis sont parfois partagés (Brissiaud/Charnay-Briand : http://www.cafepedagogique.net/lesdossiers/pages/contribs_brissiaud3.aspx). Il est néanmoins reconnu par tous que les élèves en difficulté sur les opérations sont très souvent ceux qui ne se sont pas appropriés le principe de la numération décimale de position. Il est donc essentiel à la fois de renforcer l'enseignement de la numération décimale et à la fois de lier cet enseignement à l'apprentissage des techniques opératoires et de la résolution de problèmes arithmétiques (mais pas forcément en les couplant autoritairement dans un même domaine).

Les élèves en difficultés : De nombreuses recherches (Charles-Pézard, Butlen, Masselot 2012, Peltier-Barbier, Butlen, Masselot, Ngono, Pézard, Robert, Vergnes 2004, Coulange 2012) portent sur l'enseignement des mathématiques dans les zones dites sensibles dans lesquelles se concentre souvent la population d'élèves en difficulté scolaire. Ces recherches permettent de mieux comprendre la nature de ces difficultés et de mettre en évidence l'efficacité de choix pédagogiques articulant de manière forte réflexion et acquisition d'automatismes.

La prise en compte du langage et de la lecture : Des chercheurs en didactiques des mathématiques commencent à s'emparer de la problématique du langage dans les apprentissages mathématiques (Gobert 2013, Rebière 2013). Mithalal, Bulf et Mathé partis du principe que les interactions discursives dans la classe de géométrie sont généralement étudiées comme des reflets de la conceptualisation de l'élève et non comme des lieux d'apprentissage à part entière ont entrepris de développer un outil d'analyse prenant en compte l'activité matérielle et l'activité discursive des élèves (en cours).
Par ailleurs, l'impact des difficultés en lecture de certains élèves sur leur compréhension des consignes ou sur celle des problèmes présentés sous forme d'énoncés écrits est également pris en considération par des chercheurs en DDM, notamment Houdement (2011).

Maternelle : les premiers apprentissages mathématiques ont également fait l'objet d'une attention particulière de la part de certains chercheurs. Tous s'accordent pour reconnaître que la construction des premiers nombres est en fait complexe. Le concept de nombre nait de la confrontation de l'élève à des situations qui le font vivre (notamment dénombrement, mais il est d'abord fragile (non conservation des quantités à cet âge) et se consolide grâce à la variation des contextes et par un travail réflexif sur les écrits proposés (Meljac 1979, Margolinas, Wozniak 2012). (Briand 1993) a montré que certaines difficultés dans des activités de dénombrement étaient imputables à la difficulté de passer d'un ensemble fini d'éléments à la détermination d'un ordre total sur cet ensemble, ce qu'il a appelé « énumération » or, l'apprentissage de connaissance ne figure pas dans l'enseignement et son existence culturelle même est faiblement reconnue.

Pratiques enseignantes : les recherches portant sur les pratiques des enseignants en mathématiques convergent toutes vers l'idée que ces pratiques sont complexes, qu'elles dépendent de paramètres multiples et variés (personnels, sociaux, institutionnels, cognitifs) et qu'il existe des régularités et des variabilités inter et intra-individus (Robert, Rogalski 2002). Le choix des contenus mathématiques que font les enseignants sont liés d'une part à la nature même des savoirs en jeu, mais d'autre part aux impératifs de gestion de classe, à des considérations liées aux programmes, à leurs représentations (sur la discipline, les apprentissages, le rôle de l'école, etc.) et à leurs connaissances mathématiques. Plusieurs résultats, même s'ils peuvent sembler minimes, méritent d'être pris en compte pour élaborer des programmes : les enseignants aux prises avec les contraintes institutionnelles disposent de marges de manoeuvre qui leur permettent de se réapproprier les programmes ou les instructions officielles (Roditi, 2005). Il faudrait donc peut-être anticiper, dans les programmes, ces marges de manœuvre possibles en distinguant des scénarii et différents niveaux d'exploitation. En formation, il est possible de faire évoluer/enrichir les pratiques des enseignants en entrant par des « petit tout » (Robert 2007, Chesné 2014) qui peuvent être des productions d'élèves, des extraits de manuels, mais aussi des points spécifiques de programmes.

Algèbre : La mise en œuvre en classe du Socle commun et la gestion de l'hétérogénéité demandent aux enseignants de différencier de plus en plus leur enseignement, sans pour autant que des ressources leur soient fournies pour les accompagner. Le développement du logiciel « Pépite » (Grugeon, 1997), construit à partir d'une analyse didactique et épistémologique, pour l'enseignement de l'algèbre à l'articulation 3ème-collège est prometteur : non seulement il permet un diagnostic des connaissances des élèves, mais il permet aussi à l'enseignant de mettre en œuvre un enseignement différencié sur ce domaine (Pilet, 2013) et de façon plus générale de faire évoluer ses pratiques (thèse de Bedja en cours).

4. Quels sont selon vous les points positifs et négatifs que vous voyez dans les programmes de 2008 de l'école primaire et du collège ?

Pour cette question, je ne répondrai qu'à propos des programmes de l'école primaire. En ce qui concerne les contenus de ces programmes, je suis totalement en accord avec l'analyse qui avait été faite par mes collègues Marie-Lise Peltier, Danielle Vergnes et Joël Briand (Chercheurs en DDM, Formateurs de PE et auteurs de manuels). Je la joins donc en annexe de ce document. De manière plus générale, je dirai que :

Les programmes de 2008 ne sont pas assez détaillés et explicites pour permettre à l'enseignant de construire des progressions cohérentes du point de vue des savoirs et des niveaux d'apprentissage relatifs à ces savoirs. Certaines compétences ne pouvaient être acquises relativement à la maturité cognitive des élèves de l'école primaire (d'ailleurs, le BO du 5 juin 2014 en a supprimé quelques-unes telles que la connaissance du périmètre d'un cercle ou des formules d'aires). Ils comportent parfois des incohérences entre les compétences relatives à un niveau de classe et celles du niveau suivant.

Les programmes 2008 ont été largement interprétés comme un encouragement à l'acquisition précoce de mécanismes opératoires, au détriment sans doute d'autres aspects de l'enseignement des mathématiques au cycle 2. Ainsi, le renforcement de l'apprentissage d'automatismes, l'alourdissement des contenus à enseigner (parfois proposés aux élèves de façon prématurée), la diminution de la place accordée à la réflexion et à l'initiative des élèves ont été critiqués et ont pu laisser penser que faire des mathématiques (et donc les enseigner) relevait davantage de l'acquisition/l'enseignement de strictes connaissances ou mécanismes, au détriment de la réflexion inhérente à toute activité mathématique. J'ai d'ailleurs fait cette constatation personnellement (et avec beaucoup de dépit) lors des expérimentations que j'ai menées en 2012 et 2013 auprès de plus de 200 élèves. Les élèves semblaient penser (j'étais auprès d'eux lors de la passation de ces tests pour essayer de comprendre comment ils s'y prenaient pour répondre et quelles stratégies ils utilisaient) que pour répondre aux différentes questions, il fallait soit « faire une opération », soit SAVOIR la réponse sans réfléchir.

Concernant la résolution de problèmes, les programmes de 2008 reconnaissent l'importance de ce domaine dans les apprentissages mathématiques, mais pas de manière aussi convaincue (convaincante ?) que ne l'étaient les programmes de 2002. Les compétences relevant de la résolution de problèmes sont listées en lien avec les opérations, mais absolument pas en lien avec des finalités plus constructives du point de vue de l'apprentissages mathématiques en général comme : développer une posture de recherche, mobiliser des connaissances diverses pour résoudre des tâches complexes, mais aussi et c'est fondamental, participer à la construction du sens de la numération et des différentes opérations arithmétiques (voir contribution COPIRELEM).

L'introduction de la notion de probabilité dès le cycle 2 (voir programmes étrangers) me semble fondamental pour ne pas cantonner les mathématiques à une approche déterministe. De même que l'introduction d'éléments de statistique en cycle 3 de manière à permettre, notamment aux futurs adultes, une lecture critique de informations statistiques données par les médias.

5. Pourriez-vous décrire explicitement et concrètement quelques situations exemplaires d'évaluation, qu'il serait possible de relier aux contenus essentiels proposés dans les programmes ?

D'un point de vue totalement personnel, je préconiserais que soient utilisés les QCM à tous les niveaux de l'apprentissage (aussi bien en diagnostique, qu'en formatif et en sommatif) et pas uniquement pour évaluer des connaissances, mais aussi en situation de résolution de problèmes. La recherche que j'ai menée avec Nadine Grapin nous a montré l'intérêt d'utiliser les QCM pour développer les capacités d'auto-évaluation et de rétroactions des élèves autour d'un résultat. Bien évidemment, cette modalité spécifique d'évaluation se saurait être celle qui évalue tous les apprentissages (on n'évalue pas l'activité de recherche ou des tâches complexes par des QCM !) et exclusivement, mais elle pourrait encourager les enseignants à s'emparer de la question fondamentale de l'évaluation des apprentissages mathématiques à l'école primaire ou au collège, à diversifier ses modalités en fonction des finalités visées.
Dans le même ordre idée, l'évaluation par contrat de confiance (EPCC, Antibi 2014) pourrait permettre d'une part de mieux évaluer les élèves (au niveau des apprentissages et au niveau de la « bienveillance ») et d'autre part de mieux appréhender les exigences du socle commun. Il faudra néanmoins veiller au danger d'utiliser des évaluations standardisées pour définir une « norme » et de conduire ainsi un nombre non négligeable d'enseignants à « formater » les élèves pour qu'ils réussissent ce type d'exercices.

6. Quels sont les liens possibles avec les autres disciplines dans le cadre du projet de socle commun de connaissances, de compétences et de culture (1) ? (Vous pouvez là aussi illustrer votre propos à travers une ou deux situations qui vous paraîtraient particulièrement pertinentes).

Les liens possibles avec les autres disciplines sont nombreux et pas très exploités.

Pour répondre à cette question, je prendrai l'exemple de deux « disciplines » qui me semblent particulièrement intéressantes dans le cadre du projet de socle commun de connaissances, de compétences et de culture car dans ces deux cas, les mathématiques sont des outils au service d'une autre discipline et sont également travaillées en tant qu'objet mathématique : les arts et les sciences.

Concernant les sciences, je reprendrai le propos de Cécile de Hosson (PU en Physique et directrice du Laboratoire de Didactique andré Revuz à Paris-Diderot) que j'ai interpellée autour de cette question : « *La démarche d'investigation a été introduite dans les programmes français, d'abord en primaire (2002, sous l'impulsion du PRESTE) puis dans ceux de collège (2006). Aujourd'hui, l'enseignement des sciences (des classes primaires au lycée) est placé sous l'autorité de ce paradigme pédagogique, paradigme qui, dans les programmes actuels de collège, concerne tout à la fois les mathématiques, les sciences de la nature et la technologie. Au-delà des difficultés réelles de mises en œuvre maintes fois soulignées par les recherches en didactique, au-delà également du manque criant de résultats fiables (et de consensus) montrant la plus-value de ces démarches sur la motivation et l'apprentissage, la question qui pourrait être investie par l'Institution aujourd'hui pourrait être celle de la place des mathématiques dans la mise en place de démarches de recherche en sciences, en physique en particulier. En effet, les plaidoyers en faveur de l'enseignement des sciences par investigation valorisent l'idée (discutable, elle aussi, voir à ce sujet Pellissier & Venturini, 2011) qu'un élève placé en situation d'investigation va pouvoir vivre certaines étapes de la démarche scientifique et que, ce faisant, il va reprendre goût aux sciences puisqu'il aura approché la vraie nature du travail du scientifique, la vraie nature de la science en création. Admettons que l'hypothèse soit exact (c'est sur cette hypothèse qu'à été écrit le rapport dit « Rocard » sous l'autorité de la Commission Européenne en 2007). Dans ce cas, il convient, me semble-t-il de revenir à ce qu'est le travail de création scientifique, de revenir aux fondements épistémologiques des disciplines scientifiques. Si l'on veut que les élèves approchent tôt la nature de la science qu'ils fréquent à l'école, il convient de ne pas la dénaturer. Enseigner la physique, c'est enseigner qu'elle est intrinsèquement reliée aux mathématiques et cela peut se faire tôt y compris par des démarches ouvertes/de recherche.*
La recherche que nous avons conduite au LDAR sur le rebond des boules (Martinez & al. 2014), montre que le caractère prédictif des lois de la physique, exprimées sous leur forme mathématique a quelque chose de particulièrement enthousiasmant ! Et l'enthousiasme est d'autant plus grand que les lois sont établies par les acteurs (élèves) eux-mêmes.
Donc, donner l'opportunité aux élèves d'utiliser les mathématiques pour « faire de la physique » c'est leur donner la chance d'approcher la nature de la physique. Cela n'a rien d'incompatible avec les démarches d'investigation. L'exemple du rebond des boules est assez remarquable de ce point de vue, mais cela nécessite de trouver des situations ouvertes (des balles rebondissent, quels savoirs peut-on construire à partir de cette situation ?), se laissant approcher par l'intuition, par la formulation d'hypothèses susceptibles d'être formulées mathématiquement (plus les balles sont lourdes, moins les balles rebondissent, toutes les balles effectuent le même nombre de rebonds pendant la même durée, le rapport des hauteurs successives est constant, etc.), par la formulation de prédiction, par la vérification expérimentale, etc. »

Concernant les arts, j'évoquerai le lien particulier des mathématiques et de l'art contemporain : la démarche que je préconise se situe en dehors du champ classique de la didactique des mathématiques car le détour par l'art contemporain vise à enrichir la capacité des élèves à se représenter les objets mathématiques étudiés à l'école primaire, à s'en créer des images mentales opérationnelles en amont de toute activité mathématique. Cette approche vise également à agir sur le rapport aux mathématiques des enseignants afin d'enrichir leurs pratiques professionnelles.

Voici trois exemples de confrontation, me semble-t-il, fructueuse :

Le parallélisme de droites

Une notion géométrique délicate à travailler avec des élèves de cycle 3 est celle du parallélisme de droites. Je qualifie cette notion de délicate parce qu'elle est difficile à étayer d'un point de vue mathématique, à ce niveau d'enseignement. Évoquer « des droites qui ne se rencontrent pas » ou « les rails des chemins de fer » pour parler de parallélisme est certes acceptable mathématiquement parlant, mais cela ne permet pas toujours aux élèves d'en avoir une image mentale qu'ils peuvent opérationnaliser et cela peut se heurter à l'obstacle de la représentation des droites sur une feuille de papier, forcément réduite[1]. Un artiste contemporain comme François Morellet[2], peut à l'aide de sa série de « trames » amener les enseignants et les élèves à mieux percevoir la notion de parallélisme. En effet, cet artiste qui utilise de nombreux concepts mathématiques pour concevoir ses œuvres, a produit dans les années 60-70, une série d'œuvres constituées d'un nombre variable de droites (trames) agencées suivant le hasard ou suivant une organisation liée à une série de mesures d'angles choisie par l'artiste. Ces contraintes produisent donc, soit une œuvre où l'espace de la toile est envahi par des lignes sans régularité visuelle apparente, soit une œuvre où la contrainte des séries de mesures d'angles génère des séries de droites parallèles qui occupent l'espace de façon organisée, visuellement harmonieuse. A l'école, le lien entre la contrainte angulaire et le parallélisme de droites n'est pas toujours conscientisé car l'utilisation de l'équerre et de la règle pour tracer des droites parallèles se fait souvent mécaniquement, sans vraiment comprendre le jeu des angles correspondants produits par l'utilisation de ces outils. Remettre du sens dans les gestes mathématiques automatisés de l'école est aussi une des missions de cette confrontation entre les mathématiques et l'art contemporain.

Le nombre π

Avec ses séries de π (piquant, ironicon, roccoco), François Morellet nous donne une autre occasion de bénéficier de ce détour enrichissant par l'art contemporain. En effet, pour les mathématiciens π est un nombre irrationnel transcendant mais, pour le commun des mortels, π correspond au rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre. Comment aider les uns et les autres à avoir une représentation de ce nombre qui soit plus imagée que les caractéristiques énoncées ci-dessus ? François Morellet apporte une réponse visuelle, mathématiquement correcte à ce problème de représentation du nombre π. Grâce à son procédé de mise en correspondance entre les décimales de π et une mesure d'angle, combiné à l'agencement de segments de même longueur suivant ce procédé, il donne à voir le nombre π dans toute sa singularité (partie décimale sans régularité, quasi infinie). Il permet ainsi de donner une image mentale à un nombre qui a de tous temps passionné les hommes et qui est généralement enseigné de manière très formelle.

Vous trouverez une illustration de ces deux concepts sur le site du centre Georges Pompidou : http://www.cndp.fr/parcours-exposition/parcours/au-centre-pompidou/francois-morellet/

Les objets géométriques : concept & représentation

Dans les années 50-60, les artistes s'inscrivant dans les courants de l'abstraction géométrique[3] ou de l'Op Art[4] ont utilisé de nombreuses formes géométriques, diverses et variées pour évacuer la subjectivité de l'artiste dans leur création ou générer des effets cinétiques et ainsi faire naitre le

[1] Par convention, on représente une droite par un segment de droite dans un micro-espace ce qui amène souvent les élèves à penser que la droite évoquée se restreint à cette représentation réduite et génère des difficultés à imaginer que la droite peut se « prolonger » de part et d'autre des extrémités de sa représentation. Ainsi, 2 droites non parallèles mais dont les représentations sur une feuille de papier ne se croisent pas peuvent correspondre à la définition de « droites qui ne se rencontrent jamais ».
[2] Né à Cholet en 1926. Cet artiste utilise de nombreux concepts mathématiques pour créer ses œuvres.
[3] Réduction de la composition picturale à des formes géométriques claires et à un rythme de la surface picturale déterminé par la couleur.
[4] Abréviation de « optical art ». L'op art s'intéresse aux effets dynamiques des couleurs et des mouvements.

mouvement dans leurs œuvres. De même, les artistes du courant de l'art minimal[5], comme Sol Lewitt ou Donald Judd utilisent un vocabulaire graphique très réduit laissant une place importante, si ce n'est exclusive, aux objets mathématiques tels que la ligne horizontale, verticale ou diagonale, le carré et le cube dont ils exploitent toutes les combinaisons possibles.
L'intérêt de ces artistes est qu'ils donnent à voir, dans un cadre différent et sous différents angles, ces objets mathématiques rencontrés pour la première fois à l'école primaire. Ils les font vivre dans un univers qui n'est pas celui dans lequel on les rencontre habituellement et c'est ce qui peut permettre d'enrichir la vision de ces objets.

7. Auriez-vous des recommandations à faire sur la forme et l'écriture des futurs programmes ?

Il me semble avant tout primordial de proposer des programmes ambitieux, qui permettent à la fois de mettre en évidence les savoirs fondamentaux, en les distinguant des savoirs plus techniques ou mécaniques. De ce fait, ils aideront les enseignants à mieux évaluer leurs élèves. Ils devront également aider les enseignants à construire des progressions cohérentes et adaptées aux différents moments des apprentissages et à leurs élèves, dans leur diversité.

Leur écriture doit permettre à la fois aux parents de repérer les apprentissages de leurs enfants (dans une version synthétique et compréhensible), mais aussi et surtout aux enseignants repérer les apprentissages fondamentaux des apprentissages plus secondaires, en explicitant les enjeux et les fondements de ces apprentissages en lien avec le socle commun de connaissances, compétences et culture (dans une version plus développée et pourquoi pas enrichie de « documents d'accompagnement » complémentaires). Ils devront être sans ambiguïté sur les attendus, mais aussi sur les notions mathématiques convoquées (règle de trois en primaire - racine carrée en 4ème (jusqu'où aller ?) - valeur approchée à l'école primaire...).

Ces programmes devront avant tout être pérennes, pour éviter l'insécurité des enseignants et renforcer la confiance des parents et des élèves.

Bibliographie

Antibi A. (2014) Pour des élèves heureux en travaillant ou les bienfaits de l'évaluation par contrat de confiance, Edition Math'Adore.

Briand Joël (1993) L'énumération dans le mesurage des collections : un dysfonctionnement dans la transposition didactique. Thèse université Bordeaux.

Chambris Christine (2008) Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse Université Paris 7.

Charles-Pézard Monique, Butlen Denis et Masselot Pascale. (2012) Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ? La Pensée Sauvage.

Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot.

[5] Tendance de l'art contemporain qui réduit le contenu et la forme de l'œuvre d'art à un vocabulaire formel simple et restreint. Un principe important en est la répétition des structures fondamentales, de l'œuvre, généralement géométrique.

Coulange L. (2012), Débuter en collège ZEP : quelles pratiques enseignantes ? Un zoom sur deux professeurs de mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 32.3, 361-408, La Pensée Sauvage.

Gobert S. (2013) construire des significations, dans et par le langage, in: Bronner et Al. (coord) (2013) Questions vives en didactique des mathématiques: problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. Grenoble: la pensée sauvage

Houdement Catherine (2011) Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n°16.

Houdement Catherine (2009) Une place pour les problèmes pour chercher. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n°14, 31-60.

Margolinas Claire & Floriane Wozniak (2012) Le Nombre à l'École Maternelle : Approche didactique. De Boeck.

Mounier, E. (2010). Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes. Paris : Université Paris-Diderot.

Mounier Eric (2012) Les signes de la numération écrite chiffrée et parlée en France : une analyse mathématique à usage didactique, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, volume 17, p. 27-58*

Peltier-Barbier Marie-Lise, Butlen Denis, Masselot Pascale, Ngono Bernadette, Pézard Monique, Robert Aline, Vergnes Danielle (2004) Dur d'enseigner en ZEP. La Pensée Sauvage.

Rebière Maryse (2011) S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pourquoi faire ? In Bronner & alii. Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage XVIe école d'été de didactique des mathématiques La Pensée Sauvage pp. 219-232.

Robert, A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 139-190.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2, 4, 505-528.

Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques*, *27*,
3, 271- 311.

Sayac, N., Grapin, N. (2013). Facteurs de compétence et de complexité en mathématique : un outil au service de la formation des enseignants. Actes du 25ème colloque de l'ADMEE-Europe, Fribourg.

Sayac, N., Grapin, N. (accepté). Évaluer par QCM en fin d'école : stratégies et degrés de certitude. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, ULP, IREM Strasbourg.

Tempier Frédérick (2013) La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Thèse Université Paris 7.

Annexe

Commentaires sur les programmes de mathématiques de 2008 (réponse à la consultation nationale) : Marie-Lise Peltier Joël Briand, Danielle Vergnes

I-A propos de la rubrique « nombres et calculs » :

Construire de façon conjointe la numération et les premières opérations selon des algorithmes évolutifs permettant le pontage entre calcul réfléchi et calcul automatisé, associer nombre et grandeur, devraient être les lignes principales de construction des futurs programmes dans le domaine du numérique.

Avant tout, il serait fondamental, au cycle 2, d'expliciter dans les programmes, le décalage indispensable entre le champ numérique dans lequel les élèves vont travailler sur les nombres, leur organisation, leurs désignations écrites et orale, et le champ numérique dans lequel le professeur doit choisir les données de problèmes pour construire le sens des opérations et les procédures de calcul associées.

Ainsi par exemple au CP, pour comprendre la notion de groupement par 10 et l'écriture chiffrée des nombres qui lui est associée, il est indispensable que le nombre d'objets des collections convoquées soit supérieur à la trentaine. En revanche, pour comprendre les différentes situations conduisant à effectuer une addition (recherche d'un état final quand on a ajouté des objets à une collection, recherche d'un tout quand on connaît les parties, recherche d'un état initial quand on a enlevé des objets à une collection, etc.), les nombres doivent rester dans un champ numérique très peu étendu (souvent moins de 20) de manière à ce que les élèves ne soient pas gênés par le calcul effectif et puissent utiliser des procédures personnelles variées leur permettant de construire du sens aux opérations.

Une fois ces précautions prises, pour une construction conjointe de la numération et de l'addition, le cours préparatoire doit viser essentiellement une nouvelle lecture de mots tels que « 18 » qui doit être relu 10+8. Nous utilisons volontairement le terme « mot » car « 18 » a déjà une vie lorsque les élèves entre au CP. Ils savent souvent lire quelques mots numériques. Conjointement, l'addition prendra alors son sens : 17+18 c'est synonyme de 10+7+10 + 8 donc de 20+7+8 donc de 20+15 donc de 35. Si tous les élèves avaient ce savoir acquis en fin de CP, plutôt que de mécaniser prématurément une addition en colonne, nous réussirions cette entrée dans le calcul.

Remarque : si on a 13+18 on fera plutôt 13+10+8 car à l'issue de la maternelle 13 est plutôt conçu comme une entité globale. Ce calcul s'effectue par sauts en s'appuyant sur la droite des nombres.

L'addition en colonne amenée trop tôt peut-être un obstacle à la construction du sens (la retenue au dessus des deux nombres est un signe qui n'est pas de même nature que les deux nombres). Or il existe des procédés utilisés dans d'autres pays, procédés évolutifs, et plus en phase avec la numération en construction. Par exemple :

$$\begin{array}{r} 3\,7\\ +\ 2\,5\\ \hline 1\,2\\ +\ 5\,0\\ \hline 6\,2\end{array}$$

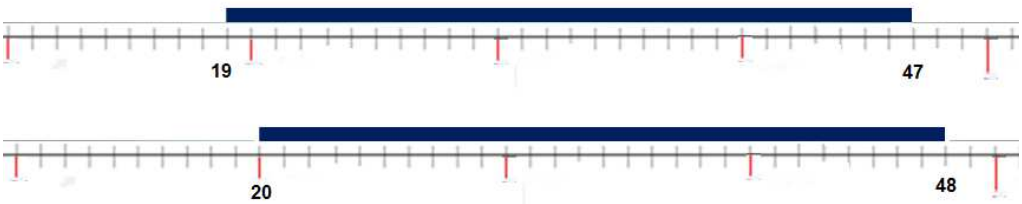
37+25= 12+50 = 62 écrit en ligne ou en colonne, ce qui permet de traiter l'addition en colonne… de gauche à droite ou de droite à gauche : 37 + 25 = 50 + 12 = 62. Qui pourra, plus tard, évoluer en :

$$\begin{array}{r} {}^{1}\\ 3\,7\\ +\ 2\,5\\ \hline 6\,2\end{array}$$

Ce qui nous amène à la place du calcul mental, du calcul réfléchi : on voit bien que la construction d'algorithmes évolutifs est en phase avec l'intégration permanente du calcul réfléchi.

Développer une culture de la construction d'algorithmes évolutifs.

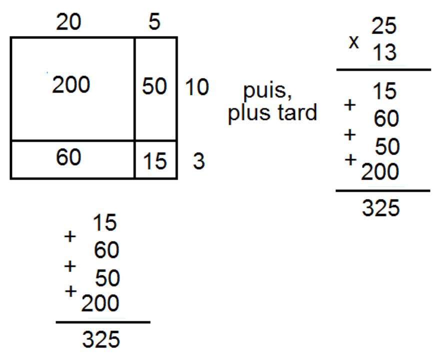
La soustraction posée en colonne ne devrait intervenir qu'après que les élèves aient les outils pour la comprendre. Un algorithme de la soustraction qui concilie consolidation de la numération et conservation des écarts (pour soustraire un nombre « rond ») est la soustraction dite « à la russe ». Cet algorithme peut perdurer au CE1 et être utilisé en calcul réfléchi à l'école et ailleurs.



En CE2, l'algorithme classique fondé sur la conservation des écarts, (cette fois en ajoutant systématiquement 10 en cas de retenue) pourra alors être construit.

$$\begin{array}{r} 47\\ -\ \ \\ 19\\ \hline \end{array} \text{ c'est } \begin{array}{r} 48\\ -\ \ \\ 20\\ \hline \end{array} \quad \text{puis, plus tard} \quad \begin{array}{r} 4\ {}^{10+}7\\ -\ \ \\ {}^{1+}1\ \ 9\\ \hline \end{array}$$

Pour que cette construction de la soustraction (algorithme « à la russe » puis classique) se fasse sans encombre, il est nécessaire que les élèves aient une bonne culture de la droite numérique. Cette conception du nombre -le nombre qui désigne une grandeur : une distance- est sous enseignée et fait défaut tout au long de la scolarité, en particulier lorsqu'il s'agira d'introduire les nombres décimaux. On sait que les phrases telles que « 39 est proche de 40 » n'ont de sens que si les élèves ont une image mentale de la droite numérique. Il faut donc combler cette lacune : cela peut commencer dès le CP (suite des nombres sur une piste, file numérique) et servir d'appui à la construction de l'addition (7 + 8 c'est 7 + 3 pour arriver à 10, puis 5 pour arriver à 15 : cette démarche est aisée sur une file numérique ponctuée des nombres 10, 20, 30, etc.) et de la soustraction en s'appuyant sur la conservation des écarts par glissement sur la droite, comme nous l'avons dit précédemment. **L'enseignement 2008 de la multiplication peut également gagner à s'appuyer sur l'élaboration d'algorithmes évolutifs :** en ce sens, commencer par la multiplication par un nombre de un chiffre est contestable dans la mesure où cela risque d'induire qu'il y aurait un rôle spécifique pour le multiplicande et le multiplicateur donc qu'il n'y aurait peut-être pas de commutativité. La multiplication par un nombre à un chiffre gagnerait à être systématisée au moment où elle va constituer un élément clé dans les différents algorithmes usuels. De plus les travaux des années 80 (G.Brousseau) avaient largement montré que la multiplication de deux nombres de deux chiffres élaborée à l'aide d'un algorithme évolutif fondé sur la découpage d'un rectangle quadrillé représentant leur produit et conduisant à terme à la multiplication dite « per gelosia » permettait une consolidation de la numération, la construction de la loi des zéros et ceci dès le CE1. Cette étude des plans de découpage permet également d'introduire la technique usuelle mais complètement décomposée.



On comprend alors la nécessité de s'entraîner, à ce moment-là, à la multiplication par un nombre de un chiffre puisque cela est utilisé dans la technique usuelle.

La construction d'un algorithme plus formel peut attendre la fin du CE2.

Pour la division, il en est de même : est-il plus difficile de diviser 150 par 50 ou par 5 ? On voit bien qu'une fois encore le nombre de chiffres du diviseur n'est pas un critère pertinent ! **La division s'appuie sur l'encadrement d'un nombre entre deux multiples consécutifs d'un autre nombre.** Pour que cette conception soit acquise, il est nécessaire que les élèves aient là aussi travaillé sur la droite numérique. Ce jeu d'encadrement se pratique aisément dès lors que les élèves ont l'habitude de placer des nombres sur une droite. Or, actuellement, la plupart des élèves sont tout étonnés de voir que les nombres 6x1, 6x2, 6x3, 6x4, 6x5, etc. placés sur une droite graduée… sont tous distants de 6, ce qui nous ramène à la construction de cette droite numérique tout au long du cycle 2. Avec ces acquis, placer 43 entre 6x7 et 6x8 devient aisé et donne du sens à la division de 43 par 6. Il y a donc beaucoup mieux à faire pour la division que de savoir utiliser « la potence » pour diviser par un nombre de un chiffre.

L'enseignement des nombres décimaux ne peut se construire que s'il montre une rupture avec les nombres entiers (l'ordre). Il est fondé sur l'idée que l'on veut approcher la mesure d'une longueur d'aussi près qu'on le souhaite. Encore une fois, la droite numérique va être un outil fondamental pour servir d'appui à cette construction. D'où la nécessité de prévoir l'élaboration de cet outil bien avant dans la scolarité afin de ne pas multiplier les difficultés à ce moment de la construction des décimaux.

Les formes de calculs

Les programmes du cycle 3 présentent les trois formes de calcul : calcul mental, calcul posé et calculatrice en s'appuyant sur le moyen utilisé pour calculer (effectué dans la tête, nécessitant un papier et un crayon, nécessitant un instrument de calcul). Cette classification, toute pertinente qu'elle soit, entraîne une confusion entre calcul posé et maîtrise de techniques opératoires. Il semblerait judicieux de remplacer « calcul posé » par « calcul écrit », et de mettre en avant non seulement les moyens utilisés pour calculer mais aussi les modes de fonctionnements cognitifs convoqués : calcul réfléchi et calcul automatisé.

Le calcul réfléchi nécessite analyse des données, recherche de stratégies adaptées à ces données, contrôle des étapes et du résultat, ce qui contribue à un enrichissement des connaissances sur les propriétés des nombres et des opérations. Il concerne le calcul exact tout autant que le calcul approché.

Le calcul automatisé s'appuie quant à lui sur des faits numériques mémorisés et sur l'application de séries de procédures également mémorisées, et naturellement d'autant mieux mémorisées qu'elles auront été comprises. Le calcul automatisé concerne essentiellement le calcul exact.

Ces deux formes de calcul ont vocation à cohabiter tout au long de la vie, et seront utilisées en fonction des nombres ou du contexte : qui irait prendre un crayon et un papier pour évaluer l'heure d'arrivée lorsqu'il reste 330 km à parcourir et que l'on estime sa vitesse moyenne à 110km/h ?

II- A propos de la rubrique « géométrie »

Les programmes font à juste titre la distinction entre les concepts géométriques (alignement, orthogonalité, etc.), les objets géométriques supports à l'étude de ces concepts (segments, figures planes, solides, etc.) et l'utilisation d'instruments et de techniques. Cette distinction nous paraît à la fois pertinente et fondamentale.

Mais la géométrie n'est pas une « leçon de chose » au cours de laquelle les élèves apprendraient du vocabulaire et construiraient des savoir-faire techniques. C'est un domaine de construction de connaissances permettant de résoudre différents types de problèmes de l'espace et de l'espace graphique.

A l'école élémentaire au cycle 1 et début du cycle 2, il s'agit d'une géométrie concrète d'abord perceptive puis progressivement instrumentée concernant des objets physiques dont les propriétés sont perçues globalement. Ce sont les années où les élèves vont se constituer un champ d'expériences dans l'espace de dimension 3 et celui de dimension 2. Rappelons qu'au cycle 2, des allers-retours permanents entre l'espace et la géométrie sont indispensables pour permettre aux élèves de construire et maîtriser les concepts fondamentaux d'alignement, de distance, d'orthogonalité, etc. Les programmes pourraient inciter à utiliser de nombreux jeux de récréation pour installer dans l'action certains de ces concepts, puis à réfléchir aux moyens de représenter l'espace vécu sur une feuille de papier pour apprendre à anticiper avant de jouer.

Le vocabulaire accompagne les actions des élèves, avec ou sans instruments, leur permet d'évoquer ce qu'ils ont fait, et d'anticiper ce qu'ils pourraient faire. Ainsi ils peuvent par exemple apprendre à utiliser convenablement une règle et un crayon pour tracer des traits droits de différentes couleurs dans toutes les directions dans le cadre d'un travail en liaison avec les arts plastiques et la découverte d'artistes contemporains. Cette activité très simple contribue à la construction de la notion de trait droit puis de segment et des images mentales qui lui sont associées sans privilégier l'horizontale et la verticale.

Au cours du cycle 2 et au cycle 3, la géométrie devient spatio-graphique. Elle concerne à la fois des objets physiques et des objets graphiques que sont les dessins ou « figures ». La perception n'est plus globale mais instrumentée, les modes de validation s'appuient essentiellement sur l'usage des instruments puis progressivement au cours du CM, ces modes de validation vont faire appel à un « discours », mettant en place les premiers raisonnements déductifs.

Les mots « anticipation » et « prévision » devraient être constamment convoqués pour décrire les problèmes géométriques à proposer aux élèves. De même, l'aspect « spiralaire » de l'apprentissage devrait être en permanence mis en avant : prenons un exemple très simple concernant la notion d'angle droit et son évolution sur plusieurs années.

En fin de CP la plupart des élèves réussissent à reconnaître par une simple observation un carré ou un rectangle parmi plusieurs quadrilatères, compétence travaillée dès le cycle 1, ce qui signifie qu'ils « perçoivent » si les angles sont droits ou non.

En CE1 cette notion d'angle droit est reprise pour passer d'une perception globale à une perception instrumentée, par exemple à partir du double pliage d'une feuille de papier. A ce niveau, un exercice classique consiste à donner des figures planes aux élèves et à leur demander de repérer celles qui possèdent des angles droits en utilisant leur équerre (en papier, du commerce ou un gabarit sur transparent). Posons-nous la question simple suivante : les élèves travaillent-ils sur l'angle droit en faisant cet exercice ? Quelle différence, du point de vue cognitif, y aurait-il si on leur demandait de repérer non les angles droits mais des angles de 60° avec un gabarit ? Aucune naturellement puisque, dans les deux cas, le travail demandé consiste à regarder si la superposition de l'angle de l'instrument avec celui de la figure est réalisée ou non. Pour que cet exercice soit un travail sur l'angle droit, il est indispensable de demander tout d'abord aux élèves de chercher sans instrument les angles qui sont susceptibles d'être des angles droits, de manière à ce qu'ils convoquent non un savoir faire instrumenté, mais une image mentale de l'angle droit. Une fois les prévisions faites, les élèves vérifient leur prévision à l'aide de l'équerre. Cette phase a alors un double but : valider les prévisions et développer un savoir-faire (bien utiliser l'équerre).

Au CE2, si les élèves savent justifier qu'un quadrilatère est un carré en exhibant les angles droits et les égalités de longueurs, nombreux sont ceux qui, lorsqu'on leur demande d'en construire un sur une feuille unie, se contentent de tracer un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur. Plusieurs tentatives seront nécessaires pour que les élèves intègrent la nécessité de contrôler le tracé des angles droits. C'est à ce niveau que le concept ~~se construit~~ prend tout son sens en intégrant les acquis précédents et en faisant le lien avec la notion d'orthogonalité.

Remarque :

Dans les programmes de 2008, quelques ajouts par rapport aux programmes de 2002 méritent que l'on s'interroge. Par exemple, quel intérêt y-a-t-il à introduire la notion de hauteur d'un triangle en CM2 ? Si c'est pour pouvoir calculer l'aire du triangle en « appliquant » une formule, il est beaucoup plus utile et formateur pour comprendre le difficile concept d'aire de trouver l'aire d'un triangle déterminé en cherchant comment construire un rectangle lié à ce triangle qui permettrait le calcul. On peut se poser la même question à propos du calcul de volumes du parallélépipède rectangle ou de circonférence du cercle.

III- A propos de la rubrique « grandeurs et mesure » et de son lien avec la rubrique « nombres et calcul ».

La rédaction des programmes pourrait laisser penser qu'il s'agit de domaines disjoints, or d'un point de vue tout autant historique que didactique, les liens entre calcul et mesure de grandeurs sont étroits.

Le travail sur les nombres entiers est déjà un travail sur une grandeur : il s'agit d'une grandeur discrète attachée aux collections d'objets : leur nombre d'éléments.

Tout au long de la scolarité, ces liens étroits sont indispensables à exhiber de manière à assurer du sens aux différentes opérations : additionner, c'est bien sûr lié à la réunion de collections, mais aussi à la mise bout à bout de deux segments, au mélange de liquides, à la réunion de deux masses, etc.

De même, comment justifier l'introduction des nombres non entiers (fractions et décimaux) sans mettre en avant le fait que les nombres entiers ne suffisent pas pour approcher les mesures de diverses grandeurs ?

Parallèlement, il faut prendre soin de ne pas faire l'amalgame entre la droite numérique et la règle graduée en centimètre. La droite numérique est un mode de représentation des nombres, indépendamment des grandeurs qu'ils permettent de mesurer. A ce titre, le choix de l'unité pour graduer la droite est parfaitement arbitraire et bien sûr il est lié au champ numérique concerné : on ne peut pas choisir la même unité si l'on veut s'intéresser aux nombres entiers entre 1 et 20, aux nombres entiers entre 1000 et 10 000, aux fractions entre 0 et 1, etc.

Le travail sur les graduations pertinentes à choisir sur une droite en fonction du problème à résoudre fait intégralement partie du travail sur la proportionnalité.

IV- A propos de la rubrique « organisation et gestion de données » et de la « proportionnalité »

Contrairement aux autres parties du programme, cette rubrique ne renvoie pas à des contenus disciplinaires mais à des modes de représentation de données et à des outils de traitement de ces données, données pouvant relever de n'importe quel domaine de connaissances. On s'étonne donc que ce soit dans cette rubrique qu'apparaisse la notion de proportionnalité qui est en fait une notion phare du domaine multiplicatif.

Il est écrit dans les programmes en cycle 3 « La proportionnalité est abordée à partir des situations faisant intervenir les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, d'agrandissement ou de réduction de figures. ». Or, si on regarde attentivement cette question, une partie des problèmes qui donnent sens à la multiplication dès le Cycle 2 sont des problèmes relevant de la proportionnalité. Considérons le problème suivant :

« Un paquet de yaourts contient 6 yaourts, combien de yaourts y a-t-il dans 4 paquets ? ».

Un tel énoncé lie deux domaines de grandeurs : le nombre de paquets, le nombre de yaourts, et met en jeu 3 nombres (1 ; 6 et 4) pour en trouver un quatrième (24).

En fait, un très grand nombre de problèmes multiplicatifs relève de la proportionnalité et les procédures de résolution mises en œuvre par les élèves pour les résoudre relèvent très souvent des propriétés de linéarité. Donnons un exemple simple :

« 3 crayons coûtent 7€. Quel est le prix de 15 crayons ? ».

La procédure « naturelle » est de chercher le rapport scalaire entre les nombres 3 et 15 et d'utiliser ce rapport 5 pour trouver le prix des 15 crayons.

	nombre de crayons	prix en euros	
	3	7	
x5	15	?	x5

Il semble indispensable de rapatrier l'étude de la proportionnalité dans la rubrique « nombre et calcul » et ceci dès le cycle 2.

Les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, de rapport d'agrandissement et de réduction s'inscriront alors naturellement dans la progression en lien avec les objets auxquelles elles réfèrent : les conversions dans le cadre du travail sur les grandeurs dès le cycle 2, les rapports d'agrandissement et de réduction dans le cadre des reproductions de figures dès le CE2, l'utilisation des échelles dans celui de l'étude des plans et des cartes en liaison avec la géographie au cycle 3, les pourcentages dans le cadre de la résolution de problèmes de la vie quotidienne en cycle 3.

En conclusion, les programmes 2008 ont marqué un coup d'arrêt à la nécessaire évolution de l'enseignement des mathématiques à l'école. Il faut saisir l'opportunité qui se présente aujourd'hui pour dépasser une vision simplement techniciste des mathématiques et pour concilier l'acquisition des savoirs avec la construction d'une pensée rationnelle, réfléchie, et citoyenne.