

SESSION 2010

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES
Option C : PHYSIQUE APPLIQUÉE**

**COMPOSITION
D'ÉLECTRONIQUE ET D'ÉLECTROTECHNIQUE**

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

EXERCICE 1

Epreuve d'électronique

Préambule

Le sujet se décompose en **3 grandes parties**, de longueur et de difficultés non égales, qui **peuvent être traitées de façon totalement indépendantes**, et dans un ordre quelconque. De plus, au sein de chaque partie, de nombreuses questions indépendantes des autres pourront être traitées séparément. De ce fait, les candidats sont invités à parcourir le sujet en entier avant de commencer la rédaction de leur copie.

De plus, le candidat devra s'efforcer de respecter les notations proposées dans l'énoncé et sur les schémas.

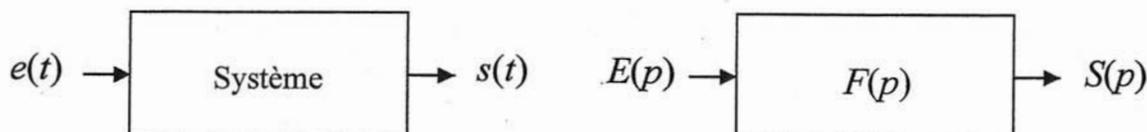
Notations

La représentation temporelle d'un signal déterministe sera notée $X(t)$, utilisant l'indication explicite de la variable t qui représente le temps. La représentation minuscule $x(t)$ sera employée pour une petite variation de $X(t)$ autour d'un point de fonctionnement X_0 : $X(t) = X_0 + x(t)$.

Exemples : composante continue I_0 , composante continue V_0 et composante alternative $i(t)$, composante alternative $v(t)$

Pour de tels signaux $x(t)$ on admettra l'hypothèse linéaire permettant d'utiliser la transformée de Laplace monolatérale (habituelle), que l'on notera $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$, utilisant une lettre majuscule et l'indication explicite de la variable complexe p . De plus, sa transformée de Fourier dans le domaine fréquentiel sera notée $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ et $\underline{X}(j\omega)$ représente l'amplitude complexe de ce signal $x(t)$, pour des variations sinusoïdales de pulsation $\omega = 2\pi f$.

Tous les modèles utilisés sont supposés continus, linéaires, invariants (sauf mention contraire) par translation dans le temps, et représentent des systèmes causaux. Tous peuvent être initialement définis par une fonction de transfert isomorphe $F(p)$, définissant la relation liant l'entrée unique ($e(t)$ ou $E(p)$) à la sortie unique ($s(t)$ ou $S(p)$), conformément au schéma fonctionnel ci-dessous.



Dans le cas des signaux sinusoïdaux, la fonction de transfert isochrone sera alors définie par $F(j\omega)$.

Sauf mention contraire, les variations $x(t)$ sont envisagées à partir d'un point de fonctionnement X_0 initial stable. A ce titre les conditions initiales à l'instant $t = 0$ sont alors considérées comme nulles.

Les temps s'expriment en secondes à partir de l'origine des temps $t = 0$.

En temps discret, les échantillons seront notés $s(nT_e)$ ou s_n .

Présentation

Cette épreuve va traiter du **filtrage** sous différents aspects.

En effet, le filtrage, qui consiste à isoler une bande de fréquences d'un signal de forme complexe, est l'une des fonctions les plus utilisées dans les ensembles électroniques, par exemple dans les systèmes de télécommunication, d'acquisition et de traitement de signaux. Le filtrage a pour but d'extraire une partie de l'information liée au signal étudié. Il peut s'agir d'éliminer, d'affaiblir des fréquences parasites indésirables, ou d'isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquence utiles.

Le sujet se décompose en **3 parties** qui peuvent être traitées de façon totalement indépendante (bien lire néanmoins les **définitions données dans cette introduction**), et les points principalement développés seront les suivants :

- analyse d'un **gabarit de filtre** utilisé en téléphonie classique et **synthèse de sa fonction de transfert** (Partie A)
- mise en œuvre du filtre dans **deux technologies, active puis passive**, dans le cadre de cette application en téléphonie (Partie B)
- étude d'un **filtre numérique** pour application au décodage DTMF (Partie C)

Il existe plusieurs types de réponses de filtres: passe-bas, passe-haut, passe-bande ou réjecteur de bande. Mais en général, la synthèse s'effectue à partir d'un filtre gabarit passe-bas prototype et les autres types s'en déduisent grâce à des transformations fréquentielles.

Un **filtre électrique** opère une modification d'un signal électrique d'entrée, par exemple une tension $v_e(t)$, vers un signal électrique de sortie, soit une tension $v_s(t)$. A la modification du signal temporel $v_e(t)$ correspond une modification du spectre $\underline{V}_e(j\omega)$ pour produire un nouveau spectre $\underline{V}_s(j\omega)$ associé au signal $v_s(t)$, figure 1.

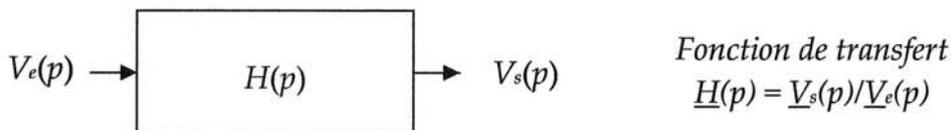


Figure 1. Filtre électrique

On étudie le comportement d'un filtre en atténuation, par l'intermédiaire de sa **fonction d'atténuation** A_{dB} exprimée en amplitude en **décibels** (dB) ou aussi A_l en **linéaire**, et en phase ϕ en degrés (ou rad), selon :

$$A_l = |A(j\omega)| = \left| \frac{V_e(j\omega)}{V_s(j\omega)} \right| \text{ et } A_{dB} = 20 \text{Log} A_l$$

ϕ = déphasage de V_e par rapport à V_s

Ces grandeurs A_{dB} et A_l sont reliées à la fonction de transfert $H(p)$ du filtre par :

$$A(j\omega) = H^{-1}(j\omega)$$

L'affaiblissement caractérise donc la transmission de l'énergie du signal :

- Le domaine de fréquences pour lesquelles A est faible est la bande passante
- Le domaine de fréquences pour lesquelles A est importante est la bande atténuée

On définit ainsi un **gabarit passe-bas en atténuation**, figure 2, avec comme grandeurs caractéristiques :

A_{min} = atténuation minimale en bande atténuée

A_{max} = atténuation maximale en bande passante

$x = \omega/\omega_p$ pulsation normalisée par rapport à la coupure $\omega_p = 2\pi f_p$

k = sélectivité en fréquence du filtre

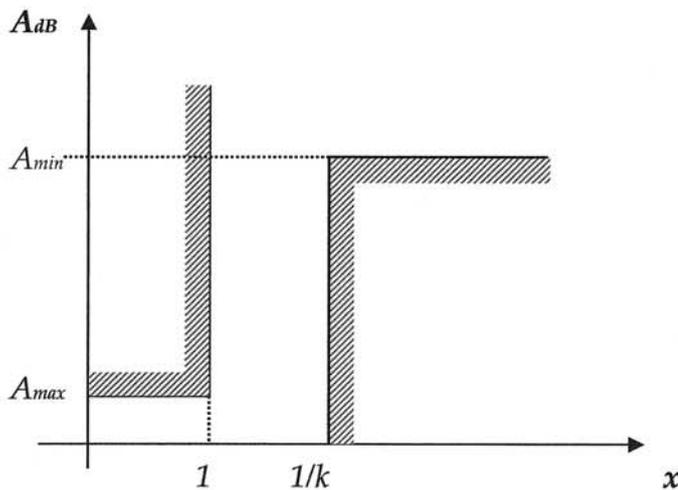


Figure 2. Gabarit d'un filtre prototype passe-bas normalisé spécifié en atténuation

L'ensemble des questions sera numéroté de façon systématique et successive Q1 à Q84 sur la totalité du sujet. Le candidat devra être très attentif à respecter cette numérotation.

A – Première partie

Analyse d'un gabarit de filtre utilisé en téléphonie classique et synthèse de sa fonction de transfert

Cette partie s'intéresse à la synthèse d'un filtre pour une ligne téléphonique classique. Il s'agit d'une application dans laquelle il est nécessaire de réduire la bande passante du signal de parole à une bande acceptable d'un point de vue de la qualité audio tout en limitant l'encombrement spectral.

Le signal vocal est ainsi typiquement limité à la bande 500Hz – 3,4kHz.

Le filtre passe-bande doit satisfaire les spécifications suivantes, représentées également sur le gabarit en atténuation de la figure 3:

- fréquence centrale $f_0 = 1,3\text{kHz}$
- bande passante fixée à $-1\text{dB} = 2,9\text{kHz}$
- fréquences définissant la bande passante : f_1 et f_2
- fréquences définissant la bande atténuée : f_3 et f_4
- atténuation hors bande = 30dB

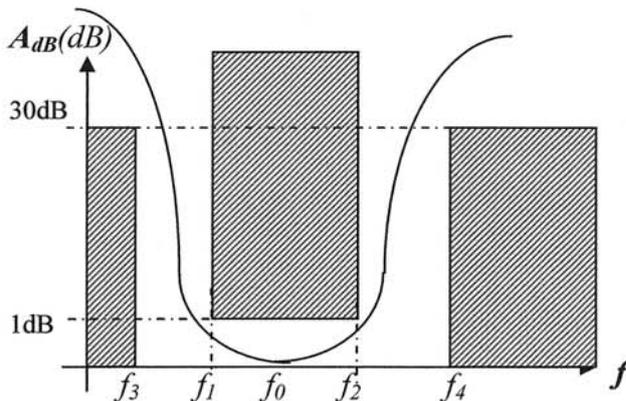


Figure 3. Gabarit en atténuation du filtre téléphonique étudié

Dans la suite, on travaillera sur le prototype passe-bas normalisé équivalent, qui servira ensuite par transposition à déterminer le filtre passe-bande souhaité.

A.1. Analyse du gabarit initial

Q1. Justifier en quelques mots que le gabarit de la figure 3 correspond effectivement à un comportement de type passe-bande.

Q2. Expliquer pourquoi le choix de la fréquence basse 500Hz est adapté à l'application en téléphonie.

Q3. Expliquer aussi pourquoi le choix de la fréquence haute 3,4kHz est adapté à cette application en téléphonie.

Q4. D'après les spécifications ci-dessus et les définitions données en introduction, donner les valeurs numériques de A_{min} et A_{max} (à la lecture de la figure 3).

Q5. Sachant que $f_1 = 500\text{Hz}$ et $f_2 = 3400\text{Hz}$, calculer la bande relative du filtre, notée B .

Q6. A votre avis, s'agit-il d'un filtre large bande ou bande étroite ?

On souhaite réaliser un filtre symétrique, soit tel que $f_1.f_2 = f_3.f_4 = f_0^2$, et de sélectivité $k (<1)$ définie par $k = \frac{f_2 - f_1}{f_4 - f_3}$ valant ici $k = 0,2$.

Q7. Déterminer les valeurs numériques de f_3 et f_4 .

Q8. Expliquer le terme de sélectivité par rapport à sa définition (*Indication : regarder le comportement pour $k \sim 0$ et $k \sim 1$*).

Q9. On peut retrouver ce gabarit passe-bande à partir d'un gabarit prototype passe-bas normalisé (type figure 2) de mêmes caractéristiques k , A_{min} et A_{max} . Connaissez vous comment choisir la fréquence de coupure f_p (correspondant à $x = 1$) pour que l'équivalence des gabarits soit correcte (*Attention, aucune démonstration n'est demandée*) ?

A.2. Synthèse d'un filtre de type Butterworth passe-bas

On souhaite synthétiser un filtre de Butterworth d'ordre n à partir du gabarit prototype passe-bas équivalent, figure 2.

La fonction d'affaiblissement linéaire d'un filtre de Butterworth est donnée en pulsation normalisée par :

$$A_l^2 = 1 + \varepsilon^2(x)^{2n}, \text{ avec } x = \omega/\omega_p \text{ pulsation normalisée}$$

Q10. Exprimer le coefficient ε en fonction des paramètres du gabarit (*Indication : ε se trouve à partir du point $\omega = \omega_p$*).

Q11. Donner la valeur numérique du coefficient ε pour $A_{max} = 1\text{dB}$.

Q12. Que dire de A_{dB} pour $x = 1/k$ (pour satisfaire le gabarit)?

Q13. Démontrer alors que la relation sur l'ordre n du filtre est la suivante :

$$n \geq \frac{\text{Log}(10^{A_{min}/10} - 1) - \text{Log}(10^{A_{max}/10} - 1)}{2\text{Log}(1/k)}$$

Pour déterminer le filtre, on pose $H(s) = \frac{1}{E(s)}$ avec $E(s)$ polynôme de Butterworth fonction de la variable complexe de Laplace réduite $s = p/\omega_p = jx$.

Q14. Pour le gabarit spécifié par $A_{max} = 1\text{dB}$, $A_{min} = 30\text{dB}$ et $k = 0,2$, justifier que le polynôme $E(s)$ peut s'écrire sous la forme $E(s) = E_0 \cdot (s-s_1) \cdot (s-s_2) \cdot (s-s_3)$, avec s_i racines du polynôme $E(s)$. (Indication : calculer l'ordre du filtre)

Q15. A quoi correspondent aussi les s_i ?

On cherche à déterminer les racines s_i du polynôme de Butterworth $E(s)$ pour ce filtre, ce qui revient à résoudre l'équation $A_1^2 = 1 + \varepsilon^2(x)^{2n} = 0$, avec n la valeur de l'indice trouvé précédemment (Q14).

Q16. Démontrer que les racines s_i peuvent s'exprimer sous la forme suivante : $s_i = \delta \cdot e^{j(k\pi/3)}$ avec $\delta = (1/\varepsilon)^{1/3}$ et k entier relatif.

Q17. Placer graphiquement ces solutions sur le cercle de rayon δ et donner explicitement les racines s_1, s_2, s_3 qu'il faut choisir pour garantir la stabilité du filtre.

Q18. Calculer ensuite la valeur du coefficient E_0 (Indication : se placer au point $s = 0$).

Q19. A partir des résultats précédents, développer l'expression du polynôme $E(s)$ sous une forme $E(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3$, et donner les expressions des coefficients a_0, a_1, a_2 , et a_3 en fonction de ε, δ et $\cos(\pi/3)$.

Q20. Justifier enfin d'après la question Q19 et les valeurs numériques issues du gabarit que le polynôme de Butterworth $E(s)$ répondant au cahier des charges est le suivant : $E(s) = 1 + 1,567 s + 1,252 s^2 + 0,509 s^3$.

B – Deuxième partie

Mise en œuvre du filtre en technologie active puis en technologie passive, dans le cadre de l'application en téléphonie.

Remarque : certaines valeurs numériques proposées dans cette partie ont été choisies proches de celles calculées dans la partie A, mais différentes, de façon à laisser les parties totalement indépendantes.

B.1. Mise en œuvre sous la forme d'un filtre actif simple

On choisit de réaliser un filtre prototype passe-bas de fréquence de coupure $f_p = 1,3\text{kHz}$, avec une technologie active à base d'amplificateurs opérationnels considérés idéaux, comme celui de la figure 4 (A, B et C sont les nœuds du circuit).

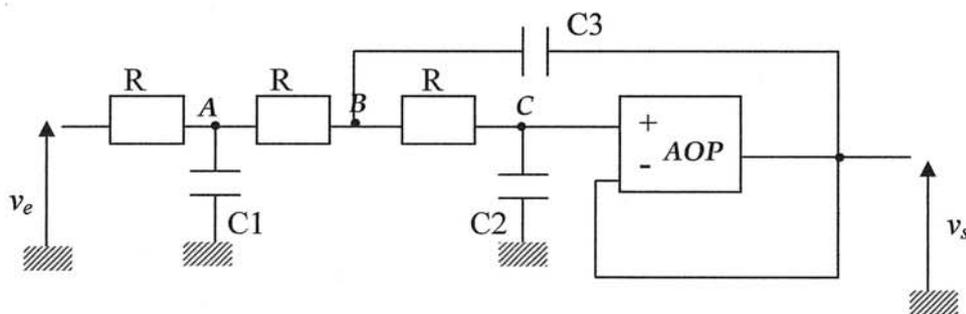


Figure 4. Structure de filtre actif proposé pour le passe-bas prototype

Q21. Justifier en se basant sur le comportement asymptotique des composants que la structure de la figure 3 correspond bien à un filtre passe-bas (sans aucun calcul).

Q22. Justifier également par un raisonnement simple l'ordre de ce filtre (toujours sans aucun calcul).

Q23. Calculer la fonction de transfert $H(p) = V_s(p)/V_e(p)$ puis l'exprimer sous la forme

$$H(p) = \frac{1}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3}.$$

Q24. Donner les expressions des coefficients a_1 , a_2 et a_3 en fonction des éléments du circuit (R, C1, C2 et C3).

On définit généralement des composants normalisés selon $\rho = R/R_u$ et $\gamma = C/C_u$, où R_u et C_u sont des composants servant de référence liés par la relation $R_u C_u \omega_p = 1$.

On cherche donc à exprimer la fonction de transfert $H(p)$ sous sa forme normalisée $H(s)$ avec s variable complexe de Laplace réduite définie par $s = p/\omega_p = jx$ et $x = \omega/\omega_p$ pulsation normalisée ($\omega_p = 2\pi f_p$).

Q25. Justifier l'homogénéité de la relation $R_u C_u \omega_p = 1$.

Q26. Effectuer cette normalisation de façon à déterminer la fonction de transfert normalisée $H(s)$ en fonction des composants normalisés ρ et γ_i , $i = 1, 2, 3$.

Q27. Poser le système d'équations permettant de déterminer les valeurs des composants normalisés ρ et γ_i , $i = 1, 2, 3$ dans le cas où $H(s)$ soit le filtre de Butterworth de la première partie, c'est-à-dire $H(s) = \frac{1}{E(s)}$, avec $E(s) = 1 + 1,57 s + 1,25 s^2 + 0,50 s^3$.

Q28. On fixe $\gamma_1 = 1,1$ pour faciliter la résolution du système précédent. En déduire les valeurs des autres coefficients γ_2 et γ_3 . (*On gardera des valeurs numériques approchées à 2 décimales au maximum*).

On choisit toutes les résistances du montage $R = R_u = 600\Omega$.

Q29. En déduire la valeur des capacités de référence C_u correspondantes, associées à ces résistances R_u servant de référence.

Q30. Calculer alors les valeurs réelles des composants R et C_i , $i = 1, 2, 3$ pour ce filtre.

Q31. A votre avis, quel est le rôle principal de l'amplificateur opérationnel dans ce montage ?

Q32. Dans le cas d'une application différente à 130kHz au lieu de 1,3kHz, quels seraient les principaux changements à apporter au montage ? (*Valeurs des composants, choix des amplificateurs...*).

B.2. Mise en œuvre sous la forme d'un filtre passif

En pratique le filtre recherché pour l'application en téléphonie classique est un filtre passe-bande centré sur $f_0 = 1,3$ kHz, et non un passe-bas. On cherche donc dans cette sous partie à déterminer une solution de filtre en technologie passive (de type filtre L-C en échelle) qui réponde facilement à cette contrainte.

On a déjà expliqué en introduction que la synthèse s'effectue généralement à partir d'un filtre gabarit passe-bas prototype et que les autres types s'en déduisent grâce à des transformations fréquentielles.

Dans le cas de la transposition passe-bas vers passe-bande, la transformation est la suivante :

$$p \rightarrow \frac{1}{B} \left(p + \frac{1}{p} \right) \text{ avec } p \text{ variable de Laplace,}$$

ou bien

$$s \rightarrow \frac{1}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right) \text{ avec } s \text{ variable de Laplace réduite } (s = p/\omega_p = jx)$$

et

B bande passante relative du filtre passe-bande, avec $B = 2,2$.

On commence tout d'abord par analyser les puissances mises en jeu au niveau du filtre passif.

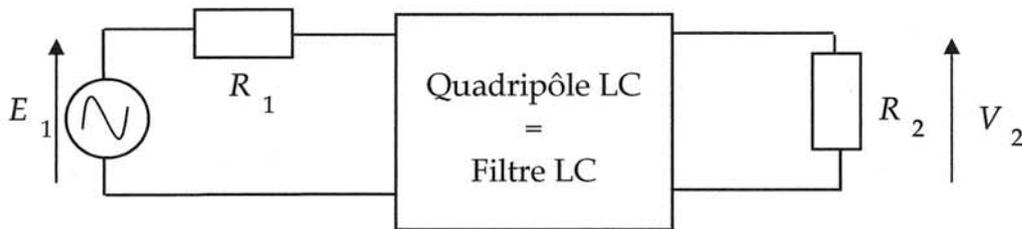


Figure 5. Schéma du filtre L-C entre ses résistances terminales

Q33. A partir du schéma général du filtre L-C de la figure 5, faisant apparaître en entrée un générateur de tension E_1 d'impédance interne R_1 et en sortie une charge R_2 , calculer la puissance maximale P_{1max} disponible en entrée.

On définit la fonction de transmission en puissance T par le rapport de la puissance P_2 effectivement fournie à la charge à P_{1max} : $T = P_2 / P_{1max}$.

Q34. Donner l'expression de cette fonction T en fonction des éléments du schéma de la figure 5, soit $T(E_1, V_2, R_1, R_2)$.

Q35. Donner aussi l'expression de cette fonction T en fonction du module de la fonction de transfert du filtre $|H(j\omega)|$ défini par $|H(j\omega)| = |V_2(j\omega)| / |E_1(j\omega)|$.

Q36. En déduire une relation entre $|H(j\omega)|$ et les éléments R_1, R_2, E_1, V_2 .

Q37. A quoi correspond le cas $P_{1max} = P_2$?

Quelle est alors la valeur numérique de l'affaiblissement A_{dB} ? (Rappel : A_{dB} a été défini en introduction par $A_{dB} = 20 \text{Log} A_1$ et $A(j\omega) = H^{-1}(j\omega)$).

On s'intéresse à présent au filtre passif L-C passe-bas prototype de la figure 6a, ou en composants normalisés (sans dimension) de la figure 6b.

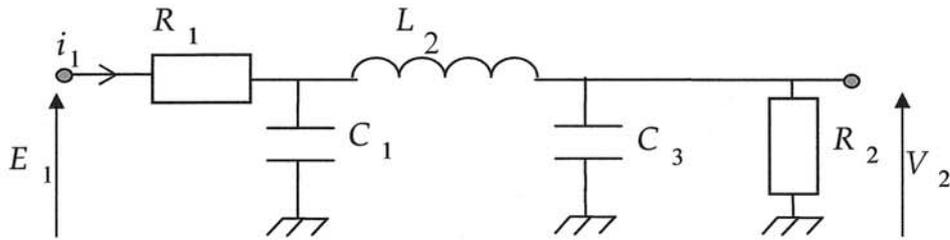


Figure 6a. *Filtre passif L-C passe-bas*

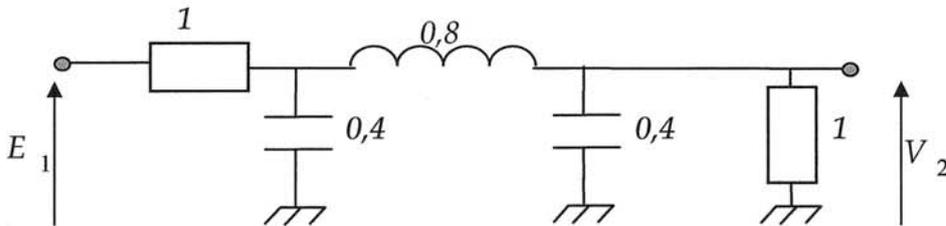


Figure 6b. *Filtre passif L-C passe-bas en composants normalisés*

Q38. En se basant sur le comportement asymptotique des composants L et C en fonction de la fréquence, justifier que le schéma proposé figure 6 correspond bien à un comportement de type passe-bas.

Q39. Proposer une autre structure équivalente de filtre passif, mais commençant par une inductance et non une capacité (faire un schéma). De quelle propriété s'agit-il ?

Q40. D'après la figure 6a, donner l'expression littérale de l'impédance d'entrée Z_1 de ce filtre, sous sa forme complexe $Z_1(p)$ ou $Z_1(j\omega)$.

Q41. Que devient cette expression dans le cas d'un filtre non chargé ?

Q42. Que devient cette expression dans le cas des très hautes fréquences ?

Q43. Dans le cas précédent des très hautes fréquences, que dire de la fonction de transmission en puissance T (définie en Q34) ?

On souhaite maintenant effectuer la transposition vers le filtre passe-bande :

$$p \rightarrow \frac{1}{B} \left(p + \frac{1}{p} \right) \text{ avec } p \text{ variable de Laplace, } B \text{ bande passante relative} = 2,2.$$

Q44. Déterminer en quoi se transforme une inductance L, en précisant le schéma électrique équivalent (*Indication : L, C, ou association de composants L et C en série ou en parallèle*) et en donnant les expressions littérales des nouveaux composants obtenus.

Q45. Même question pour la transformation d'une capacité C.

Q46. A partir des relations précédentes (Q44 et Q45), effectuer la transposition du filtre de la figure 6b en donnant les valeurs numériques normalisées des nouveaux composants obtenus après transposition.

On s'intéresse maintenant à l'étape de dénormalisation afin de déterminer les valeurs réelles des composants passifs à mettre en œuvre en pratique. On choisit des résistances de référence $R_u = 600\Omega$ servant de résistances terminales du filtre, et toujours une fréquence centrale $f_0 = 1,3\text{kHz}$.

On donne les relations de dénormalisation suivantes :

$$R_u C_u \omega = 1 \text{ et } \omega L_u = R_u, \text{ avec } \omega = 2\pi f_0$$

Q47. Justifier l'homogénéité de ces relations.

Q48. Donner les valeurs numériques de l'inductance de référence L_u et de la capacité de référence C_u correspondantes.

Q49. Calculer ensuite les valeurs numériques réelles des composants du filtre passe-bande obtenu après transposition (Q46) suite à cette étape de dénormalisation.

Q50. Donner enfin la valeur numérique de l'impédance d'entrée Z_1 déterminée en Q40 en très basses fréquences ($f \ll f_0$) puis en très hautes fréquences ($f \gg f_0$).

B3. Intégration du filtre passif dans la ligne téléphonique

Le filtre L-C passif de la partie B2 sera installé en pratique en sortie de la ligne téléphonique de longueur l et d'impédance caractéristique $Z_0 = 600\Omega$. Cette ligne est donc chargée par le filtre qui présente une impédance de charge Z_T , comme illustré sur la figure 7.

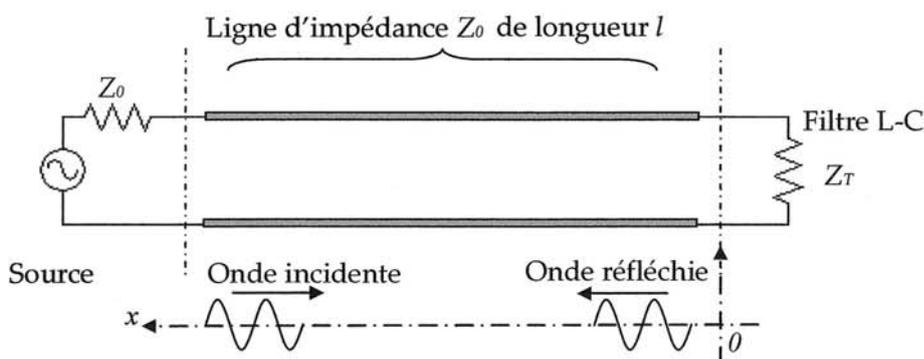


Figure 7. Ligne téléphonique chargée par le filtre

On va s'intéresser au calcul de l'impédance d'entrée de la ligne, notée Z_e . On étudiera trois cas simples: ligne adaptée ($Z_T = Z_0$), ligne en court-circuit ($Z_T = 0$), ligne en circuit ouvert ($Z_T = \infty$), puis le cas réel de la ligne chargée par le filtre LC.

Q51. Justifier que la tension $v(x,t)$ en un point d'abscisse x peut s'écrire sous la forme suivante (avec $k = \omega/v_c$) : $v(x,t) = V_i \cdot \cos(\omega t + kx) + V_r \cdot \cos(\omega t - kx)$.

Q52. Expliquer ce que représentent les grandeurs V_i , V_r , k , et v_c .

Q53. En déduire l'expression littérale du courant $i(x,t)$ en un point d'abscisse x .

Q54. Compléter le **Tableau du document réponse DR1** fourni en Annexe afin d'obtenir le module Z_e de l'impédance d'entrée de la ligne en fonction de Z_0 , f , l et v_c .

Q55. En pratique, compte tenu des résultats de la partie B2 (Q40 et Q50), quelle sera finalement l'influence du filtre ?

C – Troisième partie
Etude d'un filtre numérique de décodage DTMF

Le signal généré par un téléphone à clavier numérique quand on numérote sur celui-ci est un son composé de 2 fréquences (Dual Tone Multi Frequency : DTMF).

Chaque chiffre est codé par la superposition de deux sinusoides de fréquences données par le tableau 1 ci-dessous. Par exemple lorsque l'on appuie sur la touche 5, on génère la somme de 2 sinus à 770 et 1336 Hz.

Fréquences	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz
697 Hz	1	2	3
770 Hz	4	5	6
852 Hz	7	8	9
941 Hz	*	0	#

Tableau 1. Table de codage DTMF

Pour décoder un tel signal DTMF, il faut être capable de trouver pour chaque touche les 2 fréquences présentes dans le signal. Pour cela on se propose d'utiliser un banc de filtres numériques passe-bande centrés sur les fréquences d'intérêt, figure 8.

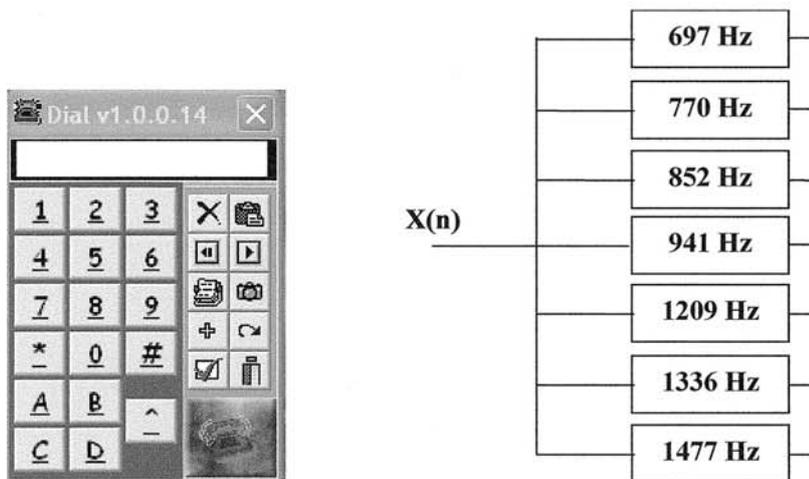


Figure 8. Banc de filtres utilisés pour décoder un signal DTMF

Q56. Compte tenu du tableau 1, que pensez vous du choix des fréquences pour cette application ?

L'objectif de cette partie est de synthétiser l'équation de récurrence d'un filtre numérique passe bande répondant au gabarit suivant :

- Fréquence d'échantillonnage $f_e = 10$ kHz ;
- Fréquence centrale $f_0 = 1$ kHz ;
- Gain unitaire à la fréquence centrale ;
- Coefficient de qualité $Q = 10$.

Remarque : On a choisi $f_0 = 1$ kHz au lieu de l'une des valeurs numériques du tableau 1 de façon à obtenir des calculs numériques plus simples dans cette troisième partie.

C.1. Etude préliminaire

On va au préalable étudier la **fonction de transfert en z d'un intégrateur numérique** à partir de la méthode des trapèzes. La fréquence d'échantillonnage est notée f_e et la période d'échantillonnage $T_e = 1/f_e$.

Dans le cas d'un signal analogique $x(t)$ tel que celui représenté sur la figure 9, un intégrateur analogique réalise la fonction suivante : $y(t) = \int x(u).du$, et l'aire de la surface comprise entre la courbe $x(t)$ et l'axe des abscisses peut être approchée par la somme de l'aire de trapèzes élémentaires.

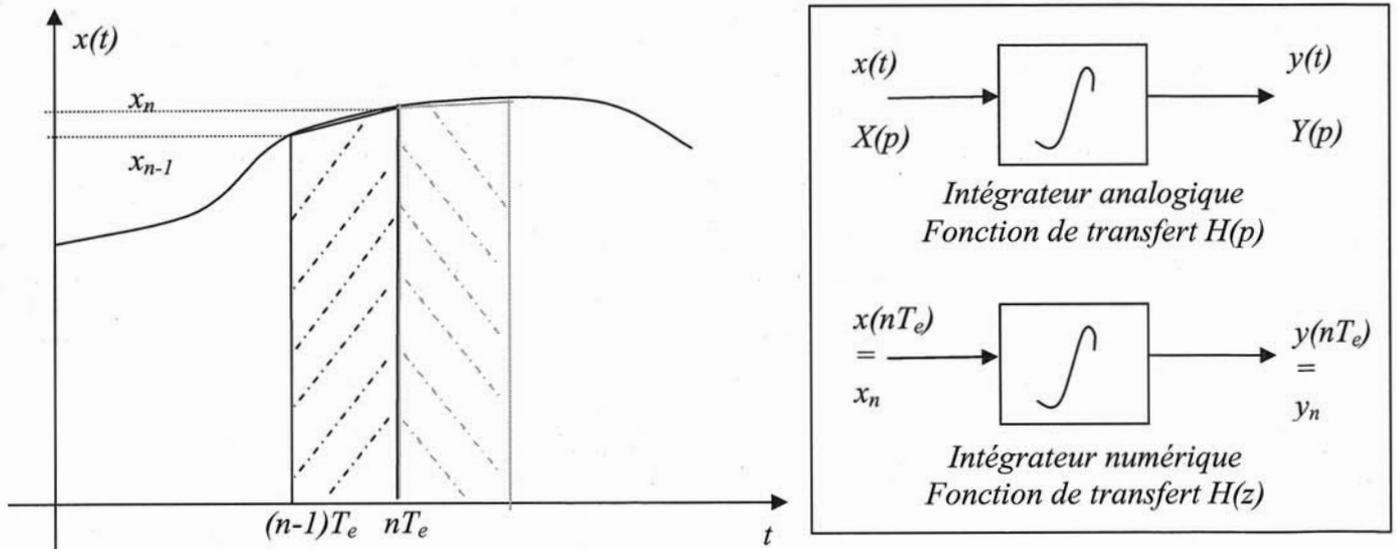


Figure 9. Illustration de l'intégration par la méthode des trapèzes

On note $y_n = y(nT_e)$ la sortie de l'intégrateur numérique à l'instant $t = nT_e$, pour une suite d'échantillons d'entrée $\{x_n = x(nT_e)\}$.

Q57. Montrer que l'équation aux différences de cet intégrateur s'écrit :

$$y_n = y_{n-1} + \frac{T_e}{2}(x_n + x_{n-1}).$$

Q58. Si l'on applique à l'entrée une séquence d'impulsions unitaires telles que $\{x_n\} = \{\delta_n\}$, où $\{\delta_n\}$ vaut 1 en $n = 0$ et 0 ailleurs, calculer les valeurs de la réponse impulsionnelle $\{h_n\}$ de cet intégrateur.

Q59. Représenter graphiquement cette réponse impulsionnelle.

Q60. Calculer ensuite $H(z)$ la transformée en z associée à cet intégrateur, à partir de l'équation aux différences.

Q61. Si l'on applique à l'entrée un échelon unitaire tel que $\{x_n\} = \{u_n\}$, où $\{u_n\}$ vaut 1 pour $n \geq 0$ et 0 ailleurs, déterminer l'expression de la réponse indicielle de cet intégrateur correspondant au signal discret en sortie $\{y_n\}$.

Q62. Calculer les premières valeurs des échantillons $\{y_n\}$ puis représenter graphiquement cette réponse indicielle (on choisira ici pour simplifier $T_e = 1$).

Q63. Quel résultat classique venez-vous de démontrer ?

C.2 Synthèse par équivalence de l'intégration

On considère maintenant un filtre analogique passe-bande d'ordre 2 donné sous sa forme canonique normalisée dans le domaine fréquentiel :

$$F_A(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \text{ avec } \omega = 2\pi f_0 \text{ et } f_0 = 1\text{kHz}, Q = 10$$

Q64. Exprimer $F(z)$ transformée en z associée à ce filtre à l'aide de la transformation suivante, avec $f_e = 10\text{kHz}$: $p = j\omega \leftrightarrow \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

Q65. Justifier en quelques mots cette transformation $p = j\omega \leftrightarrow \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

Q66. Donner ensuite l'expression de $F(z)$ sous la forme notée $F_N(z)$ telle que :

$F(z) = F_N(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$ en exprimant les coefficients a_0, a_1, a_2, b_1 et b_2 en fonction des éléments du filtre (ω, Q et T_e).

Q67. Calculer les valeurs numériques des coefficients précédents a_0, a_1, a_2, b_1 et b_2 .

Q68. Quelle serait la réponse en fréquence $F_N(j\omega)$ de ce filtre numérique $F_N(z)$? (Attention, on ne demande que la méthode et non le calcul).

Q69. Donner aussi l'équation aux différences associée à ce filtre de fonction de transfert $F_N(z)$.

Q70. De quel type de filtre numérique s'agit-il (RII ou RIF)? Justifier votre réponse.

Q71. Que dire du comportement de ce filtre en $\omega = \omega_0$? (Indication : comparer par exemple $|F_A(j\omega_0)|$ et $|F_N(j\omega_0)|$).

C.3. Synthèse par transformée bilinéaire

On considère toujours le même filtre analogique passe-bande d'ordre 2 donné sous sa forme canonique normalisée dans le domaine fréquentiel:

$$F_A(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \text{ avec } \omega_0 = 2\pi f_0 \text{ et } f_0 = 1\text{kHz}, Q = 10$$

La transformée bilinéaire est donnée par: $p = j\omega \leftrightarrow k \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$. Le coefficient k représente un facteur d'échelle >0 .

Q72. Exprimer z en fonction de p à partir de la transformée bilinéaire.

Q73. En déduire l'expression de z en fonction de ω .

Q74. Calculer le module $|z|$ et l'argument $\arg(z)$.

Q75. Représenter dans le plan complexe le lieu des valeurs prises par la variable z pour ω variant de $-\infty$ à $+\infty$.

Q76. Si l'on appelle ω_A et ω_N les pulsations dans le domaine analogique et numérique respectivement, calculer les positions des points correspondant aux cas a) et b) suivants :

a) $\omega_A = 0, \omega_A \rightarrow -\infty$, puis $\omega_A \rightarrow +\infty$

b) $\omega_N = \pm \omega_e/2$, puis $\omega_N = \pm \omega_e/4$, avec $\omega_e = 2\pi f_e$

Q77. Trouver la relation qui existe entre ω_A et ω_N (*Indication : observer les expressions des arguments*).

Q78. On souhaite à présent faire coïncider les pulsations ω_A et ω_N à la fréquence centrale du filtre passe-bande : $\omega_A = \omega_N = \omega$. En déduire la valeur numérique du facteur d'échelle k .

Q79. Calculer les valeurs f_{1A} et f_{2A} des fréquences dans le domaine analogique qui correspondent à la bande passante à -3dB, sachant que $Q = 10$.

Q80. En déduire les valeurs des fréquences f_{1N} et f_{2N} associées dans le domaine numérique (*Indication : utiliser la relation établie en Q77*).

Q81. Comparer ensuite les valeurs du coefficient de qualité de ce filtre selon les deux approches.

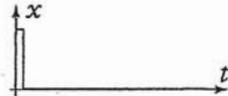
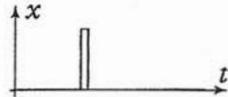
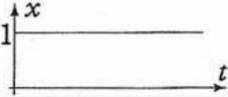
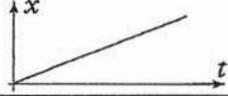
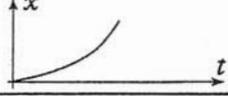
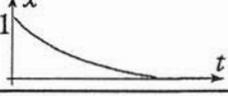
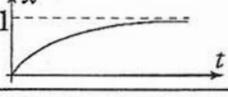
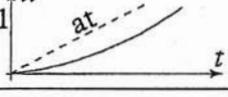
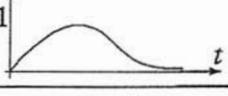
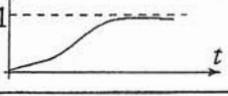
Q82. Exprimer maintenant la transformée en z notée $F(z)$ du filtre passe-bande d'ordre 2 en appliquant la transformée bilinéaire.

Q83. Mettre ensuite cette expression de $F(z)$ sous la forme: $F(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$, en calculant les valeurs numériques des coefficients a_0, a_1, a_2, b_1 et b_2 .

Q84. Comparer au résultat obtenu en Q66, et conclure.

EXERCICE 1 - ANNEXE

Table de transformées en p et en z

Variation temporelle	$x(t)$	$X(p)$	$X(z)$
	$\delta(t)$	1	1
	$\delta(t - kT_e)$	$e^{-kT_e p}$	z^{-k}
	$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
	$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
	$t^2 \cdot u(t)$	$\frac{2}{p^3}$	$\frac{T_e^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$
	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p + a}$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$
	$(1 - e^{-at}) \cdot u(t)$	$\frac{a}{p(p + a)}$	$\frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}$
	$(at - 1 + e^{-at}) \cdot u(t)$	$\frac{a^2}{p^2(p + a)}$	$\frac{aT_e z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}$
	$te^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(p + a)^2}$	$\frac{T_e \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$
	$[1 - (1 + at)e^{-at}] \cdot u(t)$	$\frac{a^2}{p(p + a)^2}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} - \frac{aT_e \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$

Notation : $\alpha = e^{-aT_e}$ où T_e est la période d'échantillonnage.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : _____ Session : _____

Concours : _____

Spécialité/option : _____ Repère de l'épreuve : _____

Intitulé de l'épreuve : _____

NOM : _____

Prénoms : _____ N° du candidat

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)
(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

EAE SPC 2

EXERCICE 1 – Document réponse DR1

	Ligne adaptée $Z_T = Z_0$	Court-circuit $Z_T = 0$	Circuit ouvert $Z_T = \infty$
Coefficient de réflexion $\Gamma = \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0}$			
Expression de $v(x,t)$			
Expression de $i(x,t)$			
Module de l'impédance vue de l'émetteur $Z = Z(x=l)$			

Tableau DR1 – Impédance de la ligne téléphonique

Ⓓ