

### **PARTIE III**

## **Spectroscopie par résonance magnétique nucléaire (RMN)**

Dans toute la suite,  $(R_0)$  désigne le référentiel du laboratoire, assimilé à un référentiel galiléen.  $(Ox, Oy, Oz)$  est un système d'axes orthogonaux, fixes dans  $(R_0)$ ; la base associée, orthonormée directe, est notée  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

On ne prendra pas en compte l'effet du champ de pesanteur .

Dans  $(R_0)$  chaque noyau possède, du fait de son spin, un moment cinétique intrinsèque noté ici  $\vec{\sigma}$ , et peut être assimilé à un dipôle magnétique de moment magnétique noté  $\vec{M}$ .

Pour chaque noyau, les moments cinétique  $\vec{\sigma}$  et magnétique  $\vec{M}$  sont liés par la relation  $\vec{M} = \gamma \vec{\sigma}$ , dans laquelle  $\gamma$  désigne le rapport gyromagnétique du type de noyau étudié.

Les seuls noyaux étudiés dans ce problème sont les noyaux  $^1\text{H}$ , constitués d'un unique proton.

Dans ce cas, le rapport gyromagnétique vaut  $\gamma = 2,675 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$ .

### **III-A Obtention d'un signal RMN dans un circuit d'antenne**

On considère un grand nombre  $N$  de protons soumis à un champ magnétique intense  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$  supposé uniforme et permanent dans  $(R_0)$ .

En l'absence de précision contraire, les interactions entre noyaux ne seront pas prises en compte; en particulier, on négligera dans une première approche le champ magnétique qu'ils créent.

III-A.1) a) En quoi l'utilisation de bobines supraconductrices permet la création de champs magnétiques très intenses ?

b) Quel est l'ordre de grandeur de la valeur maximale de  $B_0$  qu'on produit actuellement dans les appareils de résonance magnétique nucléaire (RMN) ?

### III-A.2 Effet gyroscopique

On soumet un proton de moment magnétique  $\vec{M} = \gamma \vec{\sigma}$ , placé en O, à un champ magnétique uniforme et permanent dans  $(R_o)$  :  $\vec{B}_o = B_o \vec{u}_z$  ( $B_o > 0$ ) .

III-A.2.1) Si on assimile ce dipôle magnétique à une petite boucle fermée de courant, que peut-on dire de la résultante des forces magnétiques subies par ce dipôle ?

III-A.2.2) On rappelle l'expression de l'énergie potentielle du dipôle dans le champ  $\vec{B}_o$  :  $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_o$  . En déduire quels doivent être la direction et le sens de  $\vec{M}$  pour qu'il y ait équilibre stable .

**Dans la suite , la direction de  $\vec{M}$  est supposée a priori quelconque .**

On rappelle l'expression du moment des actions exercées par un champ magnétique  $\vec{B}$  sur un dipôle :  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$  .

Par ailleurs, le théorème du moment cinétique stipule que :  $\left( \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right)_{R_o} = \vec{\Gamma}$  .

III-A.2.3) a) Montrer que  $\|\vec{M}\|$  est une constante.

b) Montrer que  $M_z = \vec{M} \cdot \vec{u}_z$  est une constante .

c) En déduire la constance de l'angle  $\theta$  entre  $\vec{M}$  et  $\vec{B}_o$  ( $\theta$  est compris entre 0 et  $\pi$ ).

d) Montrer que l'extrémité du vecteur  $\vec{M}$  décrit un cercle d'axe Oz, et déterminer le rayon de ce cercle en fonction de  $\|\vec{M}\|$  et de l'angle  $\theta$  .

III-A.2.4) Montrer que le vecteur-rotation  $\vec{\omega}_o$  associé à la précession de  $\vec{M}$  autour du champ  $\vec{B}_o$  (donc au mouvement circulaire introduit ci-dessus) a pour expression littérale :  $\vec{\omega}_o = -\gamma \vec{B}_o$  ; on pourra, au besoin, écrire le système différentiel vérifié par les deux composantes  $M_x = \vec{M} \cdot \vec{u}_x$  et  $M_y = \vec{M} \cdot \vec{u}_y$ , en déduire, par combinaison, l'équation différentielle vérifiée par la quantité  $\underline{M} = M_x + j M_y$  (avec  $j^2 = -1$ ) et montrer enfin que  $\underline{M}$  peut s'écrire sous la forme  $A e^{j(-\omega_o t + \alpha)}$ , A et  $\alpha$  étant deux constantes réelles d'intégration (avec  $A > 0$ ).

Dans toute la suite, on posera  $\vec{\omega}_o = -\omega_o \vec{u}_z$ , où  $\omega_o = \gamma B_o$  est une constante positive, nommée vitesse angulaire (ou pulsation) de précession.

III-A.2.5) Calculer la valeur de la fréquence de précession des protons  $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$  lorsque  $B_o = 4,70$  T.

### III-A.3 Etude du phénomène d'aimantation paramagnétique associée aux noyaux

On rappelle que la composante  $\sigma_z$  du moment cinétique du moment cinétique  $\vec{\sigma}$  de spin du proton ne peut prendre que les valeurs  $\pm \frac{\hbar}{2}$ ,  $\hbar$  étant la constante de Planck réduite :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} .$$

Cette composante  $\sigma_z$  et la composante  $M_z$  du moment magnétique du proton sont liées par la relation :  $M_z = \gamma \sigma_z$  .

L'étude porte sur un ensemble de protons identiques discernables, d'interactions mutuelles très faibles, soumis au champ  $\vec{B}_o = B_o \vec{u}_z$  et peuplant, selon la loi statistique de Maxwell-Boltzmann correspondant à la température T, les 2 états correspondant aux deux valeurs possibles de  $\sigma_z$  .

On rappelle à nouveau l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique dans le champ  $\vec{B}_o$  :  $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_o$  .

III-A.3.1) Exprimer l'écart d'énergie entre les deux états de spins ; que remarque-t-on sur la pulsation d'une transition radiative entre ces deux états ?

On note N le nombre **total, très grand**, de protons étudiés,  $N^+$  (respectivement  $N^-$ ) celui des protons de  $\sigma_z$  égal à  $\frac{\hbar}{2}$  (respectivement  $-\frac{\hbar}{2}$ ).

III-A.3.2) Déterminer le quotient  $\frac{N^+}{N^-}$  en fonction des quantités  $B_o, \gamma, T$  , de  $\hbar$ , et de la constante de Boltzmann  $k_B$  .

III-A.3.3) En déduire les expressions de  $N^+$  et de  $N^-$  en fonction de N et de  $x' = \beta \gamma \hbar B_o$ , avec  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  . Tester la pertinence de ces deux expressions dans deux cas-limites.

**Dans toute la suite**,  $\vec{M}$  désigne la somme des moments magnétiques des N protons, et  $\vec{M}_o$  désigne désormais sa valeur à l'équilibre thermodynamique à la température T, en présence du champ magnétique  $\vec{B}_o = B_o \vec{u}_z$  .

III-A.3.4) Montrer que  $\vec{M}_b = N\gamma \frac{\hbar}{2} \tanh\left(\frac{x'}{2}\right) \vec{u}_z$ , où la notation « tanh » désigne la fonction tangente hyperbolique.

III-A.3.5) a) On donne  $T = 300$  K et  $B_0 = 4,70$  T. Evaluer numériquement la quantité  $x'$ .  
 b) Commenter ce résultat, et en déduire une expression simplifiée de  $\vec{M}_b$  en fonction de  $N, \gamma, \hbar, x'$  et de  $\vec{u}_z$ , puis de  $N, \gamma, \hbar, B_0, k_B, T$  et  $\vec{u}_z$ ; on rappelle que, lorsque  $|\varepsilon| \ll 1$ ,  $\tanh(\varepsilon) \sim \varepsilon$ .

**Dans toute la suite, seule cette expression simplifiée de  $\vec{M}_b$  sera utilisée.**

III-A.3.6) a) Comment  $\vec{M}_b$  dépend-il de  $\gamma$ ?  
 b) Comment  $\vec{M}_b$  dépend-il de  $B_0$ ?  
 c) Comment  $\vec{M}_b$  dépend-il de la température  $T$ ?  
 d) Commenter physiquement ces deux dernières réponses.

III-A.3.7)  $\vec{M}_b$  est-il affecté par la précession décrite précédemment –dans la partie « effet gyroscopique »- autour du champ permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ ? Justifier.

**III-A.4 Prise en compte de la relaxation dans l'étude de la résonance magnétique**

On note  $\vec{M}_b$  sous la forme  $\vec{M}_b = M_b \vec{u}_z$ .

Partant de l'équilibre thermodynamique précédent, et grâce à une impulsion qui sera étudiée dans la partie III.C, on fait « basculer » rapidement le moment total  $\vec{M}$  sur une direction du plan xoy; on admet que, lors de ce basculement, la norme de  $\vec{M}$  est conservée.

On suppose pour simplifier l'étude ultérieure, qu'à la date  $t = 0$ , juste après l'impulsion, le moment  $\vec{M}$  vaut:  $\vec{M}(t=0) = -M_b \vec{u}_y$ , valeur qu'on veillera à ne pas confondre avec  $\vec{M}_b = M_b \vec{u}_z$ .

Lorsque  $\vec{M}(t)$  diffère, à un instant  $t$ , de la valeur d'équilibre  $\vec{M}_b = M_b \vec{u}_z$ ,  $\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_R$  est la somme de deux contributions :

- l'une déjà mentionnée qui vaut, après l'impulsion,  $\vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}$  avec  $\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0 = -\omega_0 \vec{u}_z$ ;
- l'autre, due aux phénomènes de relaxation, dont l'expression est :

$$\frac{\vec{M}_b - M_z \vec{u}_z}{T_1} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2};$$

$M_z \vec{u}_z$  et  $\vec{M}_\perp$  représentent ici les composantes de  $\vec{M}$  respectivement

parallèle et orthogonale à l'axe Oz, tandis que  $T_1$  et  $T_2$  désignent les constantes de temps des relaxations respectivement longitudinale et transversale.

III-A.4.1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{M}_z(t)$ .

III-A.4.2) Résoudre cette équation différentielle, sachant qu'à la date  $t = 0$ , juste après l'impulsion, le moment  $\vec{M}$  vaut :  $-\mathcal{M}_b \vec{u}_y$ .

III-A.4.3) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la composante  $\vec{M}_\perp$  s'écrit :

$$\left( \frac{d\vec{M}_\perp}{dt} \right)_{R_0} = -(\omega_0 \vec{u}_z \wedge \vec{M}_\perp) - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}.$$

III-A.4.4) On pose :  $\vec{M}_\perp = \vec{M}_\perp(t) e^{+j\frac{t}{T_2}}$ . Montrer que  $\left( \frac{d\vec{M}_\perp}{dt} \right)_{R_0} = -(\omega_0 \vec{u}_z \wedge \vec{M}_\perp)$ .

III-A.4.5) a) Ecrire le système différentiel vérifié par les deux composantes  $M_{1x} = \vec{M}_1 \cdot \vec{u}_x$  et  $M_{1y} = \vec{M}_1 \cdot \vec{u}_y$ .

b) En déduire, par combinaison, l'équation différentielle vérifiée par la quantité  $\underline{M}_1 = M_{1x} + j M_{1y}$  (avec  $j^2 = -1$ ).

c) En tenant compte des conditions initiales, montrer que  $\underline{M}_1 = -j \mathcal{M}_b e^{j(-\omega_0 t)}$ .

d) En déduire  $\underline{M}_1$  et montrer que  $M_x = -\mathcal{M}_b \sin(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{T_2}}$ .

On suppose que tous les protons de l'échantillon étudié se trouvent sur l'axe d'une bobine (souvent nommée « antenne ») fixe dans  $(R_0)$ . L'axe orienté de la bobine est supposé confondu avec l'axe Ox. Cette bobine est un des éléments d'un circuit série (dit « de détection »), également fixe dans  $(R_0)$ , et dont l'étude est détaillée plus loin, à la question III.A.5).

On admet que, dans ces conditions, le flux du champ magnétique créé par les N protons à travers l'ensemble des spires orientées de la bobine est donné par la relation :  $\Phi_{prot \rightarrow bob} = k \cdot M_x$ , dans laquelle  $k$  est une constante positive dont la valeur ne dépend que de la géométrie de l'échantillon étudié, de celle de la bobine, et de leur disposition relative.

Dans toute la suite, la constante  $k$  est supposée connue.

III-A.4.6) On admet que les dimensions du circuit de détection sont inférieures au décimètre. La fréquence de précession  $f_0$  étant voisine de 200 MHz, les conditions de validité de l'approximation des états quasi-stationnaire sont-elles remplies pour ce circuit ?

III-A.4.7) On rappelle que  $M_x = -M_b \sin(\omega_o t) e^{-\frac{t}{T_2}}$ . Du fait de la variation de  $M_x$  au cours du temps,  $\Phi_{prot \rightarrow bob} = k \cdot M_x$  dépend du temps et une force électromotrice apparaît dans le circuit orienté de la bobine. A quel phénomène physique correspond cette force électromotrice, notée  $e(t)$  dans la suite ?

III-A.4.8) Déterminer  $e(t)$  en fonction de  $k$ ,  $M_b$ ,  $\omega_o$ ,  $T_2$  et de  $t$ .

En pratique,  $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$  est de l'ordre de la centaine de mégahertz, et  $T_2$  est de l'ordre de la seconde.

III-A.4.9) Montrer que dans ces conditions, on peut considérer que  $e(t)$  obéit à la relation :

$$e(t) = k M_b \omega_o \cos(\omega_o t) e^{-\frac{t}{T_2}} ; \text{ cette relation sera retenue dans toute la suite. }$$

III-A.4.10) a) Dédurre de ce résultat, en remplaçant  $\omega_o$  par sa valeur et  $M_b$  par son expression simplifiée trouvée à la question III-A.3.5, la façon dont l'amplitude de  $e(t)$  dépend de la valeur de  $B_o$  et de celle de  $\gamma$ .

b) Quel est l'intérêt d'opérer avec des valeurs importantes de  $B_o$  ?

### III-A.5 Etude du circuit de l'antenne

La bobine de détection, d'auto-inductance  $L$  et de résistance  $r$ , fait partie d'un circuit de filtrage des données, modélisé ici par un circuit de type « RLC série ».

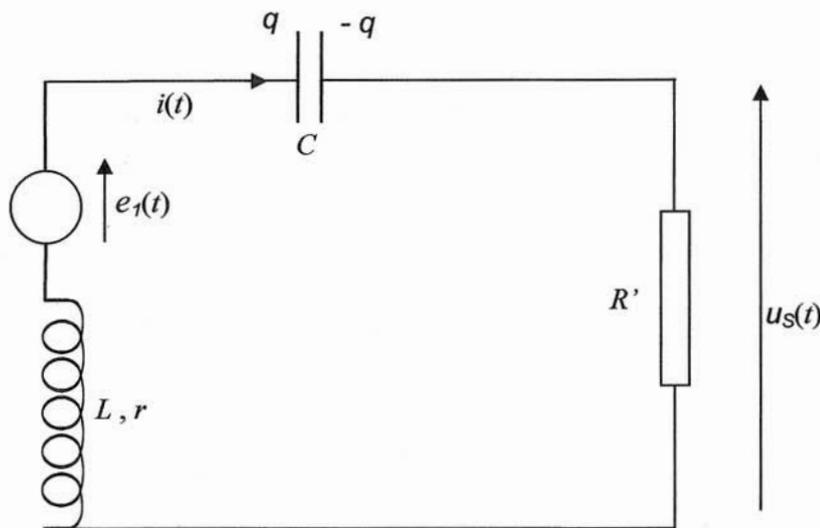


Figure III-1

La capacité du condensateur est choisie de telle sorte que  $LC \omega_o^2 = 1$ ,  $\omega_o$  désignant toujours la vitesse angulaire de précession des protons.

On note  $R = (r + R')$  la résistance totale du circuit série et on pose :  $a = \frac{R'}{R} = \frac{R'}{(r + R')}$ .

$R'$  représente la résistance d'entrée d'un « détecteur en quadrature », qui sera étudié dans la partie III.B.

Enfin, on suppose que le quotient  $Q = \frac{L\omega_o}{R}$  est égal à 100.

III-A.5.1) On nomme souvent ce facteur  $Q$  facteur de surtension à la résonance en intensité ; justifier cette expression.

III-A.5.2) a) Sachant que  $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$  vaut 200 MHz et que  $R$  est de l'ordre de l'ohm, calculer

les valeurs de  $L$  et de  $C$ .

b) Commenter ces résultats.

Dans un premier temps, on étudie la réponse de ce filtre, en régime permanent sinusoïdal, à une excitation notée  $e_1(t) = E \cdot \cos(\omega t)$ ,  $\omega$  étant une pulsation quelconque. La tension de sortie est  $u_s$ .

III-A.5.3) Quelle est la nature de ce filtre ? On justifiera simplement la réponse, sans calcul, par une étude des comportements limites aux basses et hautes fréquences.

III-A.5.4) Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{e_1}$  en fonction de  $R'$ ,  $r$ ,  $L$ ,  $C$  et  $\omega$ .

III-A.5.5) Montrer que  $\underline{H}(j\omega) = \frac{a}{1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}$  avec :  $u = \frac{\omega}{\omega_o}$  et  $a = \frac{R'}{(r + R')}$

III-A.5.6) a) Quelle est la signification physique de  $H = |\underline{H}|$  ? Quelle est, lorsqu'on fait varier  $\omega$ , la valeur maximale de  $H = |\underline{H}|$ , notée  $H_{max}$  dans la suite ?

b) Déterminer l'écart  $\Delta\omega$  entre les deux pulsations (dites « de coupure ») telles que  $H = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ .

c) On caractérise l'acuité de ce filtre par le quotient  $Q' = \frac{\omega_o}{\Delta\omega}$ , nommé facteur de qualité du filtre. Montrer que  $Q' = Q$ .

### III-A.6 Mise en forme du signal RMN

Dans la suite de cette partie,  $e_1(t) = e(t)$ , force électromotrice induite par la précession des protons.

III-A.6.1) Quel vous semble être l'intérêt du filtre de la partie III-A.5 dans le cas précis de la détection de la RMN?

La forme -précédemment établie- du signal réel d'entrée  $e(t)$  correspond à des composantes de Fourier qu'on suppose -pour simplifier- centrées sur la pulsation  $\omega_o$ , et localisées dans une bande de  $\frac{1}{2}$  largeur en pulsation égale à  $\frac{3}{T_2}$ .

III-A.6.2) Déterminer l'ordre de grandeur des valeurs de  $\left(u - \frac{1}{u}\right) = \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}$  aux extrémités de cette bande, sachant que  $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$  est de l'ordre de la centaine de mégahertz, et  $T_2$  est de l'ordre de la seconde.

III-A.6.3) La fonction  $g(u) = \left(u - \frac{1}{u}\right)$  étant croissante, que peut-on dire de la valeur de  $\underline{H}(j\omega) = \frac{a}{1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}$  pour toute pulsation présente dans le spectre de  $e(t)$  ?

III-A.6.4) Montrer que :  $u_S(t) = a \cdot e(t)$ , avec  $a = \frac{R'}{(r + R')}$ , en régime établi.

III-A.6.5) a) Montrer que, de façon générale, la charge  $q(t)$  et l'intensité du courant  $i = \frac{dq}{dt}$  définies sur la figure III-1 vérifient l'équation différentielle :  $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e(t)$  ;  
 b) en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$ .  
 c) Montrer que le terme transitoire de  $i(t)$  vérifie l'équation différentielle linéaire homogène :  $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_o^2 i = 0$ .

III-A.6.6) En tenant compte du fait que  $Q = 100$ , montrer que la solution générale de cette équation homogène peut être présentée sous la forme :

$$i(t) = e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}} \left[ A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t) \right].$$

III-A.6.7) Pour tout  $t < 0$ ,  $e(t)$  était nulle et le condensateur totalement déchargé. En déduire, en les justifiant soigneusement, les valeurs à l'instant  $t = 0^+$  de  $i(t)$  et de sa dérivée.

La résolution -non demandée ici- de l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  indique, si l'on tient compte du fait que  $Q = 100$ , que pour tout  $t > 0$  :

$$u_S(t) = a k M_o \omega_o \cos(\omega_o t) \cdot \left[ e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}} \right].$$

III-A.6.8) a) Chercher à quelle condition sur la date  $t$  le quotient de  $e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}}$  par  $e^{-\frac{t}{T_2}}$  est inférieur à  $10^{-2}$ .

b) Montrer que, pour un enregistrement de durée supérieure à  $T_2$ , on peut

considérer que  $u_S(t) = ak M_o \omega_o \cos(\omega_o t) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$  pendant quasiment toute la durée de l'enregistrement ; on rappelle que  $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$  est de l'ordre de la centaine de mégahertz, et que  $T_2$  est de l'ordre de la seconde.

Dans toute la suite, on supposera que, pendant toute la durée de l'enregistrement, la

tension  $u_S$  est donné par la relation simplifiée :  $u_S(t) = ak M_o \omega_o \cos(\omega_o t) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} = ae(t)$ ,

pour un groupe de protons de fréquence de précession  $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$ .

En pratique, les protons de l'échantillon peuvent présenter plusieurs valeurs, notées  $f_i$ , de la fréquence de précession, en fonction des différents groupements chimiques auxquels ils appartiennent (le champ local ressenti par les protons de chaque groupement dépend du coefficient d'écran de ce groupement) ; **dans toute la suite, la fréquence  $f_o$  de résonance du filtre est choisie au centre (environ 200 MHz) de la fenêtre spectrale à explorer , dont la demi-largeur est ici supposée de l'ordre du kHz.**

III-A.6.9) On note  $e_i(t)$  et  $u_{S_i}(t)$  les contributions respectives à  $e(t)$  et  $u_S(t)$  d'un groupe de protons, numéro  $i$ , de fréquence de précession  $f_i$ . Expliquer simplement pourquoi la relation  $u_{S_i}(t) = a \cdot e_i(t)$  est également vérifiée.

On en déduit immédiatement que  $u_S(t) = ae(t)$ .

III-A.6.10) On souhaite estimer la loi  $u_S(t)$  en effectuant un nombre élevé  $N'$  d'enregistrements de la tension expérimentale  $u_{S_{\text{exp}}}(t)$  aux bornes de la résistance  $R'$  ; pour chaque date  $t$  de mesure, le signal relevé lors de l'enregistrement numéro  $k$  ( $k = 1$  à  $N'$ ) a pour valeur :  $u_{S_{\text{exp } k}}(t) = u_S(t) + b_k(t)$ , et est stocké dans un fichier informatique ; tous les termes de bruit  $b_k(t)$  étant ici des signaux aléatoires centrés (de valeurs moyennes nulles, donc) de même variance notée  $\sigma_b^2$ , et statistiquement indépendants.

a) Déterminer, pour chaque date  $t$ , la valeur moyenne et la variance  $\sigma_{bN'}^2$  de la somme de tous les  $b_k(t)$ .

b) On pose  $u_{S_{\text{exp total}}}(t) = \sum_{k=1}^{N'} u_{S_{\text{exp } k}}(t)$  ; déterminer la valeur moyenne de  $u_{S_{\text{exp total}}}(t)$  à l'instant  $t$  en fonction de  $u_S(t)$ .

c) On définit ici le rapport signal sur bruit, à  $t = 0$ , comme le rapport entre  $\frac{N' ak}{\sqrt{2}} M_o \omega_o$ , valeur efficace initiale de  $u_{S_{\text{exp total}}}(t)$  et l'écart type  $\sigma_{bN'}$  de la somme de tous les  $b_k(t)$ . Quelle est l'influence de  $N'$  sur ce rapport ?

d) Commenter.

Dans la suite de l'étude, on s'intéresse uniquement, sauf mention contraire, à un groupe de  $N_i$  protons correspondant tous à une même valeur  $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$  de la fréquence de précession,

et on pose  $u_{Si}(t) = U_i \cos(\omega_i t) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$ , avec  $U_i = K B_0^2 N_i$ .

K étant une constante –qu'on ne demande pas de déterminer- dont on suppose, pour simplifier, la valeur commune à tous les groupes de protons (les valeurs des termes  $\cos(\omega_i t)$  sont, bien sûr, supposés distinctes, contenant la date t).

### III-B . Traitement du signal $u_R(t)$ ; obtention d'un spectre RMN par le procédé de détection synchrone en quadrature

A l'aide de multiplieurs -non décrits ici- et de deux signaux sinusoïdaux en quadrature, de fréquence égale à celle, notée  $f_0$ , de résonance du filtre, on obtient les deux tensions :

$$u_1 = u_{Si}(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad u_2 = u_{Si}(t) \cdot \sin(\omega_0 t) .$$

On traite d'abord le cas simplifié où  $u_{Si}(t) = U_i \cos(\omega_i t)$  .

Les deux signaux  $u_1$  et  $u_2$  sont traités par deux filtres linéaires passe-bas identiques de fréquence de coupure  $f_C$ .

On rappelle les deux relations trigonométriques :

$$2 \cos(a) \cdot \cos(b) = \cos(a + b) + \cos(a - b) \quad \text{et} \quad 2 \sin(a) \cdot \cos(b) = \sin(a + b) + \sin(a - b) .$$

III-B.1) Pourquoi doit-on utiliser ces relations pour étudier l'effet sur  $u_1$  et  $u_2$  des deux filtres linéaires passe-bas ?

III-B.2) On rappelle que  $(f_i - f_0) = \frac{\omega_i - \omega_0}{2\pi}$  a une valeur absolue de l'ordre du kHz.

A quelle condition sur la valeur de  $f_C$  les deux signaux en sortie des filtres passe-bas auront-ils pour valeurs :  $u_{D1} = \frac{U_i}{2} \cos[(\omega_i - \omega_0)t]$  et  $u_{D2} = -\frac{U_i}{2} \sin[(\omega_i - \omega_0)t]$  . Dans toute la suite, on suppose cette condition réalisée.

III-B.3) On pose :  $\underline{u_D} = u_{D1} - j u_{D2}$  ; déterminer  $\underline{u_D}$  , à partir des expressions précédentes de  $u_{D1}$  et de  $u_{D2}$  .

En réalité,  $u_{Si}(t) = U_i \cos(\omega_i t) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$ . On admet que, dans ce cas,  $\underline{u_D}$  a pour expression :

$\underline{u_D} = \frac{U_i}{2} e^{j[(\omega_i - \omega_o)t]} e^{-\frac{t}{T_2}}$ . Un ordinateur permet de déterminer la quantité  $\underline{u_D}$  (avec

$j^2 = -1$ ), et d'évaluer sa transformée de Fourier :  $TF(\underline{u_D})(f) = \int_0^{\infty} \underline{u_D}(t) e^{-2j\pi f t} dt$  pour toute

valeur de  $f$  comprise entre  $-f_{\max}$  et  $+f_{\max}$  ( $f_{\max}$  étant légèrement supérieure à la demi-largeur -ici **supposée de l'ordre du kHz-** de la fenêtre spectrale à explorer). On pose :

$\omega_D = (\omega_i - \omega_o)$  et  $f_D = \frac{\omega_D}{2\pi}$  ; le décalage en fréquence  $f_D$  est positif pour une moitié de la

fenêtre spectrale à explorer, et négatif pour l'autre moitié.

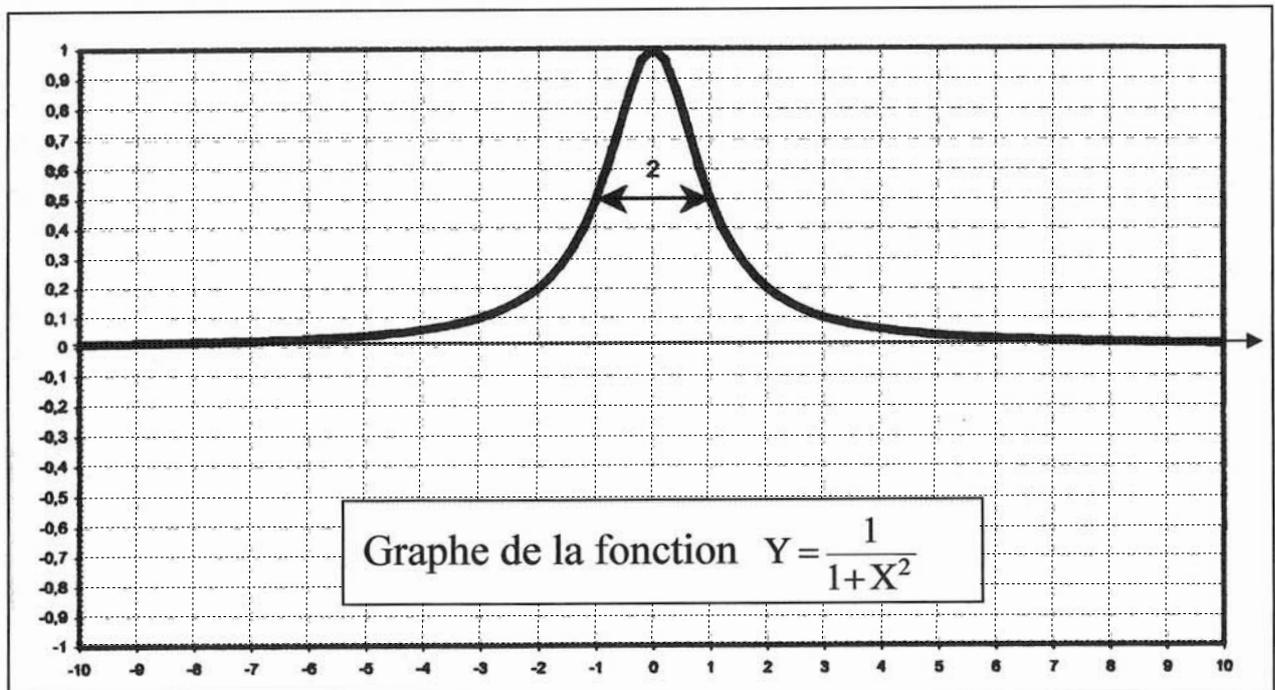
III-B.4) Montrer que :  $TF(\underline{u_D})(f) = \frac{U_i}{2} \cdot \frac{T_2}{1 + 2j\pi(f - f_D)T_2}$ .

On note respectivement  $u_{DFRe}(f)$  et  $u_{DFIm}(f)$  les parties réelle et imaginaire pure de la transformée de Fourier  $TF(\underline{u_D})(f)$ . On a donc :  $TF(\underline{u_D})(f) = u_{DFRe}(f) + j \cdot u_{DFIm}(f)$

III-B.5) Dans les conditions proposées ici, le signal exploité est  $u_{DFRe}(f)$ . Déterminer ce

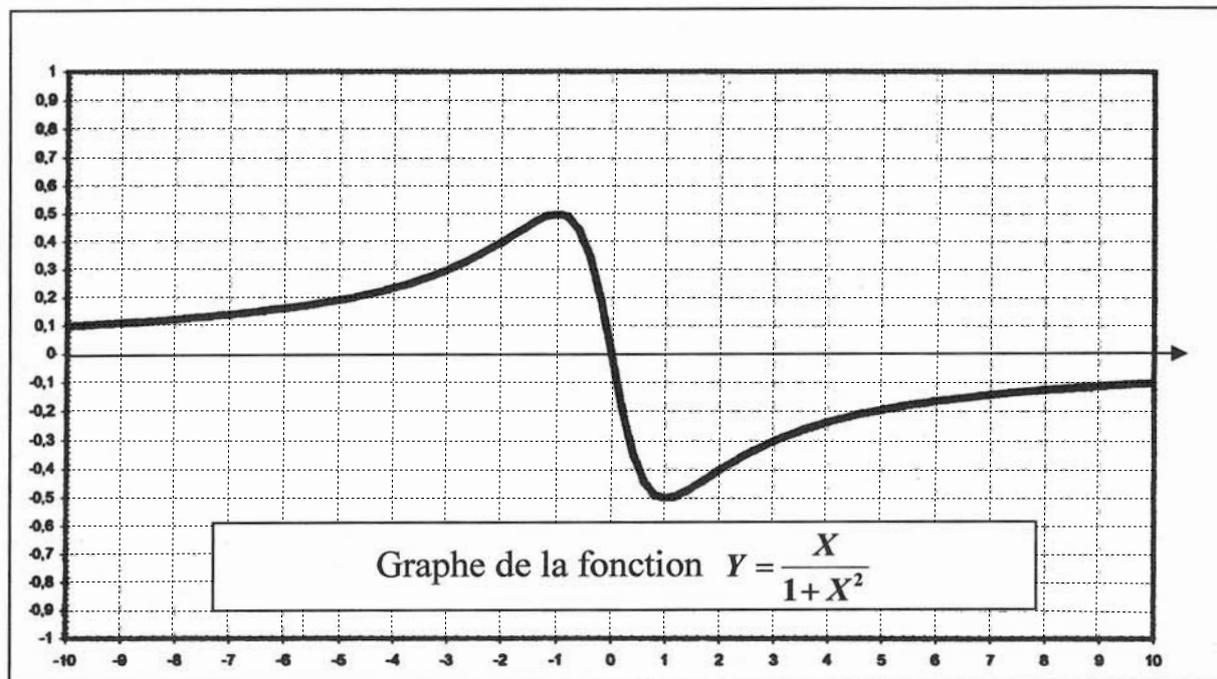
signal ; on rappelle la relation  $\frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2}$ .

III-B.6) Montrer que le graphe de  $u_{DFRe}(f)$  est une courbe lorentzienne (souvent nommée raie d'absorption, et dont la **forme** est rappelée sur la figure III-2 ci-dessous) centrée en  $f = f_D$ .



**Figure III-2**

A titre d'information, on indique ci-dessous, figure III-3, l'allure qu'a, dans ces conditions, le graphe de  $u_{DFIm}(f)$  (signal de type « dispersion », moins exploitable que le signal lorentzien, car plus « large »).



**Figure III-3**

III-B.7) Etablir la relation entre la largeur à mi-hauteur de la Lorentzienne  $u_{DFRe}(f)$  et la constante de temps  $T_2$ .

En pratique, au début de l'acquisition (de date  $t = 0$ ), les différents groupes de protons ont déjà tourné, depuis le début de l'impulsion radiofréquence, autour de  $Oz$  d'angles de valeurs différentes, car proportionnelles à  $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ . On pose :  $f_{Di} = \frac{(\omega_i - \omega_0)}{2\pi}$ .

On admet que, dans ces conditions,  $\underline{u}_{Di} = \frac{U_i}{2} e^{j[(\omega_i - \omega_0)(t+\tau) + \alpha]} e^{-\frac{t}{T_2}}$  pour le groupe de protons n°i.

Le « retard » ici noté  $\tau$  est supposé de l'ordre de 100 microsecondes, donc très petit devant  $T_2$  ; au même titre que  $\alpha$ , ce retard est supposé de valeur commune à tous les groupes de protons étudiés. La valeur de  $\tau$  prend également en compte l'effet de la présence des filtres passe-bas.

III-B.8) Montrer simplement que la présence de  $\tau$  et de  $\alpha$  a pour effet de multiplier la transformée de Fourier  $TF(\underline{u}_{Di})(f)$  du groupe de protons n°i par la quantité  $e^{j[2\pi f_{Di}\tau + \alpha]}$ .

On note  $TF2(\underline{u}_{Di})(f)$  la nouvelle valeur de la transformée de Fourier de ce groupe de protons. La partie réelle de  $TF2(\underline{u}_{Di})(f)$  n'étant pas aisément exploitable, un traitement conjoint de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $TF2(\underline{u}_{Di})(f)$  s'impose.

III-B.9) Montrer que, compte tenu de l'inégalité forte  $\tau \ll T_2$ , l'ancienne valeur et la nouvelle valeur de la transformée de Fourier vérifient sensiblement la relation suivante :

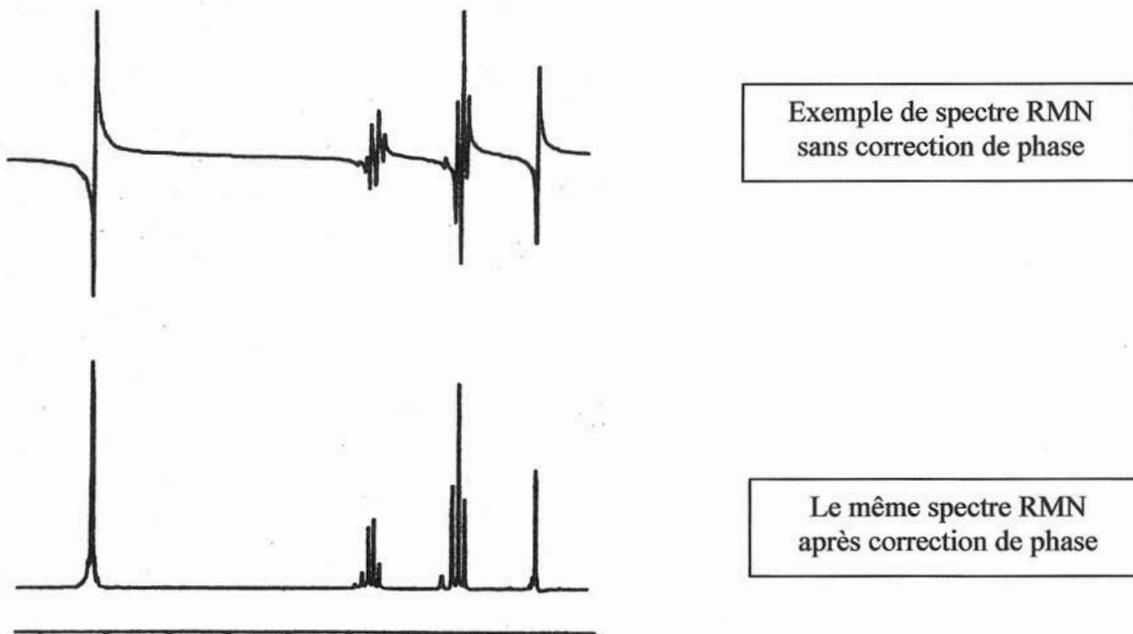
$$TF2(\underline{u}_{Di})(f) = TF(\underline{u}_{Di})(f) \cdot e^{j[2\pi f\tau + \alpha]}$$

Cette relation peut être étendue à l'ensemble du spectre sous la forme (plus pratique pour la suite de l'étude) :  $TF(\underline{u}_D)(f) = TF2(\underline{u}_D)(f) \cdot e^{-j[2\pi f\tau + \alpha]}$ .

On note respectivement  $u_{DF2Re}(f)$  et  $u_{DF2Im}(f)$  les parties réelle et imaginaire pure de la transformée de Fourier  $TF2(\underline{u}_D)(f)$ .

III-B.10) En exploitant cette dernière relation entre  $TF(\underline{u}_D)(f)$  et  $TF2(\underline{u}_D)(f)$ , montrer qu'on peut trouver deux quantités A et B – et les déterminer en fonction de  $\tau$  et de  $\alpha$  – telles que la combinaison  $\cos(Af + B) \cdot u_{DF2Re}(f) + \sin(Af + B) \cdot u_{DF2Im}(f)$  redonne une somme de signaux lorentziens semblables à celui trouvé à la question III-B.6.

Expérimentalement, cette opération -dite de correction de phase- s'effectue par essais successifs, jusqu'à l'obtention de l'allure caractéristique des lorentziennes, comme l'indique la figure III-4, ci-dessous.



**Figure III-4**

Dans toute la suite, on suppose que la correction de phase a été réalisée ; on dispose donc d'un spectrogramme constitué d'une somme de lorentziennes analogues à celle obtenue à la question III-B.6.

- III-B.11) a) On considère deux groupes de protons de populations comparables, de fréquences de précession notées  $f_i$  et  $f_i + \delta f$  très proches, et de même valeur de  $T_2$ . Déduire du résultat de la question III-B.7 l'ordre de grandeur de la valeur minimale  $\delta f_{\min}$  de  $\delta f$  pour qu'on puisse séparer les deux groupes de protons.
- b) Application numérique :  $T_2$  est de l'ordre de la seconde, et  $f_i = 200$  MHz, pour la valeur choisie de  $B_0$ . Calculer le pouvoir de résolution spectrale  $R = \frac{f_i}{\delta f_{\min}}$ .
- c) Commenter ce résultat.

On rappelle que le champ local  $B'_o$  ressenti par chaque proton d'un même groupe  $n^o$  a pour valeur  $B'_o = B_o \cdot (1 - \sigma_i)$ , où  $\sigma_i$  représente le coefficient d'écran du groupe  $n^o$ .

III-B.12) Déduire du résultat précédent, en fonction de  $B_o$ ,  $\gamma$  et  $T_2$  la valeur minimale de l'écart  $\delta\sigma$  entre les deux coefficients d'écran pour qu'on puisse séparer les deux groupes de protons, et l'intérêt qu'il peut y avoir à travailler avec des valeurs importantes de  $B_o$ .

Dans toute la suite, on se place de nouveau dans le cas  $B_o = 4,70$  T.

- III-B.13) a) Calculer  $\delta\sigma_{\min}$ .
- b) Commenter ce résultat, sachant que la fenêtre des valeurs de  $\sigma$  à explorer a une largeur de l'ordre de  $10$  ppm, soit  $10 \cdot 10^{-6}$ .

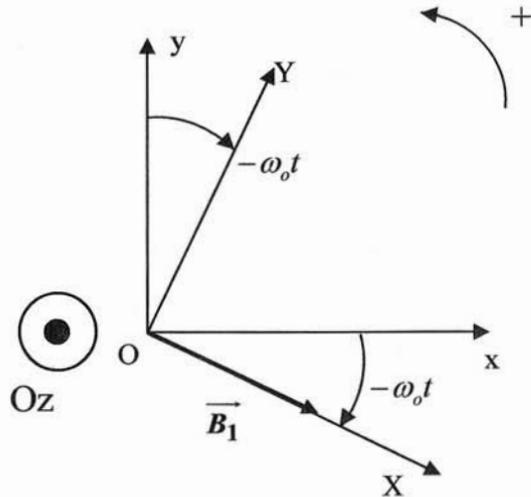
III-B.14) On rappelle que, pour le groupe de protons  $n^o$ ,  $U_i = K B_o^2 N_i$ ,  $K$  étant une constante –dont on ne demande pas le calcul– dont la valeur est commune à tous les groupes de protons. Montrer que, pour des pics nettement séparés, l'aire de chaque pic est proportionnelle au nombre  $N_i$  de protons concernés. On pourra utiliser le fait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

- III-B.15) a) Quelle condition supplémentaire doit-on imposer à la fréquence de coupure  $f_c$  des deux filtres passe-bas (mentionnés dans l'introduction de la question III-B) si la fenêtre spectrale à explorer a une demi-largeur de l'ordre du kHz ?
- b) Les deux conditions sur  $f_c$ , obtenues aux questions III-B.2 et III-B.15.a) sont-elles aisément conciliables ?

### III-C . Réalisation des impulsions radiofréquences

On superpose au champ magnétique permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$  un champ magnétique  $\vec{B}_1$  uniforme, perpendiculaire à Oz et tournant à la vitesse angulaire négative  $-\omega_0$  :  $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_X$  (voir figure ci-contre) ;  $B_1$  est constant et positif . On rappelle que la fréquence  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  est choisie au centre (environ 200 MHz) de la fenêtre spectrale à explorer , dont la demi-largeur est de l'ordre du kHz.



**Figure III-5**

On note  $(R_1)$  le référentiel lié aux axes OX, OY et Oz, ainsi animé par rapport à  $(R_0)$  d'un mouvement de rotation uniforme autour de Oz , à la vitesse angulaire constante et négative  $-\omega_0$  ; la base associée, orthonormée directe, est notée  $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_z)$ .

Dans ce référentiel  $(R_1)$ , le champ magnétique  $\vec{B}_1$  est donc uniforme et permanent. On suppose qu'à l'instant  $t = 0$  , les axes Ox et OX sont confondus .

Dans ce référentiel  $(R_1)$ , le champ magnétique  $\vec{B}_1$  est donc uniforme et permanent. On suppose qu'à l'instant  $t = 0$  , les axes Ox et OX sont confondus .

On s'intéresse d'abord à un groupe de  $N_i$  protons correspondant tous à une même valeur  $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$  ( avec  $\omega_i = \gamma B_0(1-\sigma_i)$  ) de la fréquence de précession autour de  $\vec{B}_0$  ; avant l'impulsion, leur moment magnétique total, colinéaire à  $\vec{B}_0$  vaut  $M_{0i} \vec{u}_z$  . On pose :

l'impulsion, leur moment magnétique total, colinéaire à  $\vec{B}_0$  vaut  $M_{0i} \vec{u}_z$  . On pose :  $\omega_D = (\omega_i - \omega_0)$  et  $\vec{\omega}_1 = -\gamma \vec{B}_1$  .

La durée des impulsions est supposée très faible devant les temps de relaxation  $T_1$  et  $T_2$ .

Dans ces conditions, on ne prend pas en compte, dans toute cette partie III-C, l'effet des phénomènes de relaxation.

III-C.1) Montrer que : 
$$\left( \frac{d\vec{M}_i}{dt} \right)_{R_0} = (\vec{\omega}_1 - \omega_i \vec{u}_z) \wedge \vec{M}_i .$$

On donne la relation : 
$$\left( \frac{d\vec{M}_i}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\vec{M}_i}{dt} \right)_{R_1} - \omega_0 \vec{u}_z \wedge \vec{M}_i .$$

III-C.2) En déduire l'expression de  $\left( \frac{d\vec{M}_i}{dt} \right)_{R_1}$  en fonction de  $(\vec{\omega}_1 - \omega_D \vec{u}_z)$  et de  $\vec{M}_i$ .

III-C.3) Montrer simplement que le vecteur  $(\vec{\omega}_1 - \omega_D \vec{u}_z)$  est fixe dans le référentiel  $(R_1)$ .

On souhaite que, dans  $(R_1)$ , le mouvement de précession de  $\vec{M}_i$  se fasse sensiblement autour de l'axe OX colinéaire à  $\vec{B}_1$  et de même direction que  $\vec{\omega}_1$ .

On impose ainsi  $\|\vec{\omega}_1\| \gg |\omega_D| = |\omega_i - \omega_o|$ .

III-C.4) La pulsation  $\omega_o$  étant choisie au centre de la fenêtre des pulsations  $\omega_i$  à explorer, montrer qu'on doit choisir  $\|\vec{B}_1\|$  suffisamment importante pour que la condition précédente soit réalisée pour tout groupe de protons.

On impose le critère  $\|\vec{\omega}_1\| = 10 \Delta\omega$ , la demi-largeur en fréquence  $\Delta f$  de la plage à explorer valant 2 kHz.

III-C.5) Sachant que  $\gamma = 2,675 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$ , calculer la valeur de  $\|\vec{B}_1\|$  correspondant à ce critère.

On choisit la durée  $t_p$  d'une impulsion de telle sorte que, pour tout groupe de protons de la fenêtre à explorer, le moment dipolaire total  $\vec{M}_i$  du groupe effectue, dans  $(R_1)$ , une rotation d'un quart de tour, et soit aligné avec OY à la fin de l'impulsion (impulsion dite «  $\frac{\pi}{2}$  »).

III-C.6) Déterminer, puis calculer  $t_p$ ,  $\|\vec{\omega}_1\|$  étant égale à  $10 \Delta\omega$ .

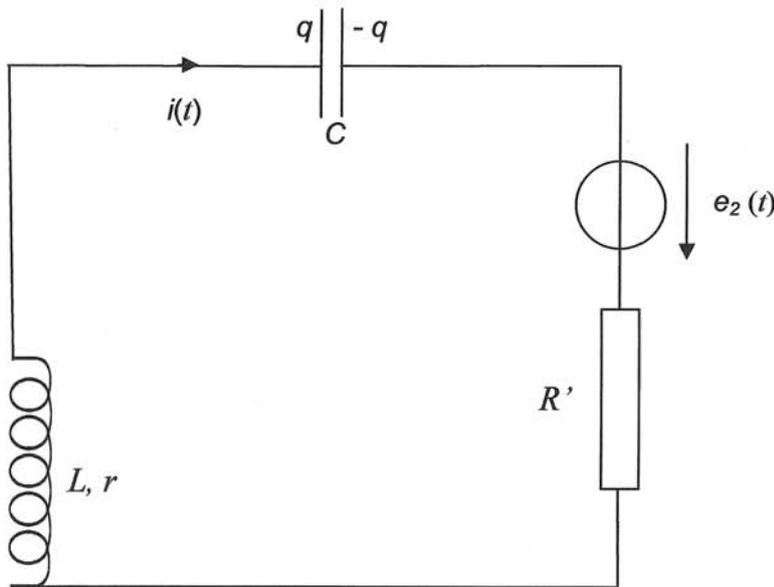
Dans le référentiel  $(R_o)$ , l'impulsion radiofréquence induit une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega_o$ , de durée  $t_p$ . Or, l'énergie d'interaction de chaque groupement avec le champ permanent augmente (elle passe d'une valeur négative à la valeur nulle).

L'impulsion sinusoïdale, de pulsation  $\omega_o$  et de durée  $t_p$  permet donc des absorptions de photons d'énergies différentes :  $E_{\text{photon}}$  vaut  $\hbar \omega_i$ , la pulsation  $\omega_i$  pouvant prendre, selon le groupement, plusieurs valeurs dans la fenêtre explorée de demi-largeur en pulsation  $\Delta\omega$ .

III-C.7) Interpréter avec soin ce phénomène, en s'appuyant sur l'expression littérale de  $t_p$  obtenue à la question III-C.6.

III-C.8) Le champ  $\vec{B}_1$  est remplacé par un champ  $\vec{B}_2$  alternatif, de direction fixe dans  $(R_o)$  :  $\vec{B}_2 = 2B_1 \cos(\omega_o t) \vec{u}_x$ , créé par la bobine du circuit antenne, d'axe Ox ; en montrant au préalable que  $\vec{B}_2$  peut être considéré comme la somme de deux champs, tournant dans  $(R_o)$  dans deux sens inverses, expliquer, sans calcul, pourquoi l'effet de  $\vec{B}_2$  sur  $\vec{M}$  est, dans  $(R_1)$ , sensiblement le même que celui de  $\vec{B}_1$ .

III-C.9) Pour créer le champ  $\vec{B}_2$  introduit à la question III-C.8, on utilise le circuit d'antenne, alimenté par un générateur externe de caractéristiques de Thévenin ( $e_2(t)$ ,  $R'$ ) (voir la figure III-6, ci-dessous). Quelle doit être la forme de la dépendance temporelle de l'intensité  $i(t)$  passant dans le circuit d'antenne ci-dessous, pendant la durée de l'impulsion (on ne demande pas la valeur de l'amplitude de cette intensité).



**Figure III-6**

Pendant la durée de l'impulsion, la fém induite par la précession des protons est négligeable, car le champ magnétique  $\vec{B}_2$  est beaucoup plus intense que celui créé par la précession des protons.

On suppose que la durée de l'impulsion est un multiple entier de la période  $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ ; on montre que, dans ces conditions, les effets des termes transitoires de  $i(t)$  au début et à la fin de l'impulsion se compensent.

III-C.10) On rappelle que  $LC \omega_o^2 = 1$ . Quelle doit être la forme de  $e_2(t)$  pendant l'impulsion, dans ces conditions ?

III-C.11) Quelle devrait être la forme de  $e_2(t)$  pour que le moment dipolaire total  $\vec{M}_i$  du groupe étudié effectue, dans  $(R_1)$ , une rotation autour de OY, cette fois (et non autour de OX comme précédemment) ?

III-C.12) Temps mort à la suite d'une impulsion

Dès la fin de chaque impulsion, il convient d'évacuer, avant le début de la détection, l'énergie magnétique associée à la répartition de champ  $\vec{B}_2$  : la précession des protons autour de  $\vec{B}_0$  doit être libre, la présence d'un « résidu » de  $\vec{B}_2$  fausserait la mesure et, de plus, saturerait

le détecteur en quadrature, car  $\overline{B_2}$  est d'un ordre de grandeur bien plus important que le champ magnétique créé par les protons en précession.

A cette fin, on évacue l'énergie par le même circuit résonnant,  $e_2(t)$  étant nulle. L'effet de la fém induite par la précession des protons reste négligeable, tant qu'une part significative de l'énergie associée à la répartition de champ  $\overline{B_2}$  reste présente.

a) Sachant que  $i(t) = I e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , on respecte, entre la fin de l'impulsion et le début de la détection, un temps mort égal à 15 fois la constante de temps du terme exponentiel. Calculer la durée de ce temps mort. On rappelle que  $f_0 = 200$  MHz et que  $Q = 100$ .

b) On souhaite diminuer ce temps mort ; une solution consiste à ce qu'une partie de la résistance  $R'$  (voir figure III-6) soit fonction croissante de la valeur efficace du courant qui traverse le circuit.

Expliquer en quoi ce procédé (dit auto-adaptatif) permet de diminuer le temps mort, sans faire varier  $f_0$ , ni la valeur de  $Q$  pendant la détection.

FIN DU SUJET