

SESSION 2010

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES
Option A : PHYSIQUE**

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

L'ensemble de l'épreuve étudiée, sur deux exemples, la stabilité des systèmes dynamiques. Les deux parties sont indépendantes.

Tout résultat fourni par l'énoncé pourra être utilisé pour la suite.

Un document annexe comprenant trois pages est à rendre avec la copie.

Les données numériques et le formulaire concernant les opérateurs relatifs à l'ensemble du problème sont rassemblés ci-dessous. D'autres données spécifiques sont fournies tout au long de l'énoncé.

Données numériques :

Constante des gaz parfaits : $\mathcal{R} = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$;

Masse molaire de l'air : $\mathcal{M}_a = 29 \text{ g.mol}^{-1}$;

Accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

Formulaire :

Dans les relations suivantes, U et \vec{a} représentent respectivement un champ scalaire et un champ vectoriel.

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{a})) = \overline{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta \vec{a} ;$$

$$\overline{\text{rot}}(U\vec{a}) = U\overline{\text{rot}}(\vec{a}) + \overline{\text{grad}}(U) \wedge \vec{a} ;$$

$$\overline{\text{rot}}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \text{div}(\vec{b}) - (\vec{a} \cdot \overline{\text{grad}})(\vec{b}) - \vec{b} \text{div}(\vec{a}) + (\vec{b} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{a} ;$$

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{grad}}(U)) = \vec{0} ;$$

$$\text{div}(\overline{\text{rot}}(\vec{a})) = 0 .$$

Première partie : La thermoconvection

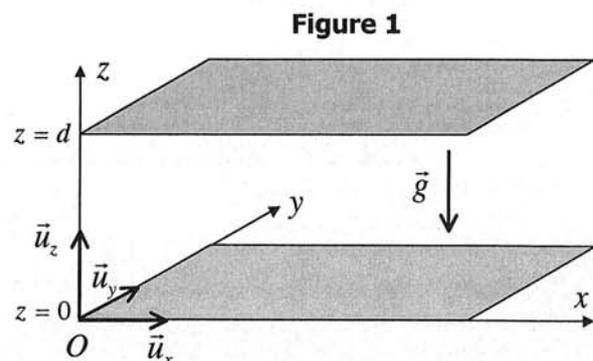
Ce phénomène s'observe dans un fluide où une inhomogénéité de température engendre un mouvement de convection. L'étude de l'écoulement qui en résulte s'effectue en prenant en compte le couplage entre les variations spatiales de la température et le champ des vitesses au sein du fluide dans les lois de la mécanique des fluides.

1) Citer deux personnages scientifiques ayant contribué de façon notable à l'élaboration des théories de la mécanique des fluides. Décrire sommairement leur principale contribution.

Description - notations :

L'espace est décrit à l'aide du repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Un fluide, pouvant être a priori un gaz ou un liquide, occupe l'espace entre les deux plans horizontaux d'équation $z = 0$ et $z = d$, parfaitement conducteurs du point de vue



thermique et qui imposent les températures $T_0 + T_1$ en $z = 0$ et T_0 en $z = d$ (Figure 1).

Le champ de pesanteur, uniforme, est selon la verticale $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. On adopte les notations suivantes :

- Constante des gaz parfaits : \mathcal{R} ;
- Masse volumique du fluide : $\rho(M, t)$;
- Capacité thermique massique à pression constante : c_p ;
- Capacité thermique massique à volume constant : c_v ;
- Conductivité thermique du fluide : K ;
- Température au sein du fluide : $T(M, t)$;
- Pression au sein du fluide : $P(M, t)$.

Les grandeurs c_p , c_v et K sont supposées constantes. Les grandeurs intensives sont des champs scalaires définis en variables d'Euler (M, t) où M est un point de l'espace et t l'instant considéré.

2) Rappeler la définition précise de c_p et c_v . Quelle est leur unité dans le système international ?

Dans le cas d'un gaz parfait, établir, l'expression de Mayer reliant $c_p - c_v$ à \mathcal{R}/\mathcal{M} , où \mathcal{M} désigne la masse molaire du gaz. En déduire les expressions de c_p et c_v pour un gaz parfait diatomique en fonction de \mathcal{R}/\mathcal{M} .

3) Soit $\vec{j}_{th}(M, t)$ le vecteur densité volumique de courant thermique. Enoncer la loi de Fourier reliant $\vec{j}_{th}(M, t)$ à la température $T(M, t)$, puis donner les unités de K et j_{th} dans le système international. Cette loi est une loi « isotrope, au premier ordre ». Justifier ces appellations et expliquer quelles en sont les conséquences. Commenter le signe qui apparaît dans cette loi.

4) Classer par ordre croissant la conductivité thermique des matériaux « bons conducteurs thermiques » et celle des matériaux « bons isolants thermiques ». Proposer un ordre de grandeur de la conductivité thermique des métaux et de celle des gaz sous température ambiante de l'ordre de 20 °C. Donner un exemple d'un corps solide et bon isolant thermique.

Fluide en l'absence de convection

On étudie dans un premier temps le profil de température au sein du fluide en l'absence de convection, c'est à dire lorsque le champ des vitesses est nul. Le champ de température $T(M, t)$ peut varier avec le temps. Les évolutions considérées sont quasistatiques.

Le fluide est un gaz

Le fluide est un gaz parfait de masse molaire \mathcal{M} .

5) Dans cet état d'équilibre mécanique, le champ de pression est relié à la masse volumique par la loi de la statique des fluides. Enoncer cette loi.

6) On raisonne sur un élément infiniment petit de fluide de taille mésoscopique situé au point M , dont le volume est noté \mathcal{V} . La variation de température au cours du temps engendre une variation de la pression P et de la masse volumique ρ , donc du volume \mathcal{V} . Etablir la relation existant entre

$\frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{1}{T} \frac{dT}{dt}$ et $\frac{1}{P} \frac{dP}{dt}$. En considérant d comme échelle de longueur typique d'inhomogénéité spatiale, montrer qu'en ordre de grandeur $\frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \left(1 - \frac{\mathcal{M}gd}{\mathcal{R}T}\right) \approx \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}$. On se placera par la suite dans le cas où $\mathcal{M}gd \ll \mathcal{R}T$, commenter ce choix.

7) Montrer que le premier principe de la thermodynamique appliqué à cet élément évoluant entre les instants t et $t + dt$ conduit à l'égalité $c_v \frac{\partial T}{\partial t} \vartheta = -\frac{1}{\rho} \text{div}(\vec{j}_{th}) \vartheta - \frac{P}{\rho} \frac{d\vartheta}{dt}$.

8) En utilisant les propriétés du gaz parfait et les hypothèses en ordre de grandeur, établir l'équation différentielle satisfaite par la température : $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T$ (équation (1)). Définir la diffusivité du gaz notée D et donner son unité dans le système international. On rappelle que ΔT désigne le Laplacien scalaire du champ $T(M, t)$.

9) Soit τ_{th} le temps caractéristique de durée du régime transitoire. En ordre de grandeur, quelle relation existe-t-il entre τ_{th} , d , ρ , c_p et K .

Application numérique :

Calculer la diffusivité de l'air à 300 K, sous une pression de 1 bar, sachant que sa conductivité thermique vaut $K = 0,027$ USI et en considérant l'air comme un gaz parfait diatomique.

Calculer τ_{th} pour $d = 1$ cm.

Le fluide est un liquide.

Le fluide est un liquide incompressible, pour lequel on confond énergie interne et enthalpie, qui ne dépendent que de la température.

10) Que peut-on dire alors de c_p et c_v ? Montrer par une démarche analogue à celle utilisée pour les gaz que la température satisfait aussi à l'équation (1).

11) On désigne toujours par τ_{th} le temps caractéristique de durée du régime transitoire.

Application numérique :

Pour une huile silicone, $K = 0,1$ USI, $c_p \approx 2.10^3$ USI, $\rho \approx 10^3$ kg.m⁻³. Calculer τ_{th} pour $d = 1$ cm.

Profil de température en régime permanent

12) Au bout d'une durée de l'ordre de τ_{th} , le régime permanent est atteint (que ce soit dans le cas du gaz ou du liquide) et le profil de température devient indépendant du temps. Etablir l'expression de $T_p(x, y, z)$, température en régime permanent, compatible avec les conditions limites imposées par les plans $z = 0$ et $z = d$. Tracer l'allure du profil de température $T_1 > 0$.

Etude de la convection

Pour étudier les processus mécaniques au sein du fluide, on adopte le modèle du fluide Newtonien et on désigne par η sa viscosité dynamique et μ sa viscosité cinématique. Le champ des vitesses Eulérien est noté $\vec{v}(M,t)$ et la dérivée particulaire du champ scalaire $f(M,t)$ s'écrit

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) f.$$

Influence de la température

Lorsque la température varie, au voisinage de T_0 , la masse volumique et la pression varient. Soient α le coefficient de dilatation isobare et χ le coefficient de compressibilité isotherme du fluide.

13) a- Définir α et χ à l'état (T_0, P_0) , donner leur unité. Au voisinage du point (T_0, P_0) , la masse volumique s'écrit, au premier ordre, $\rho(T, P) = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0) + \chi(P - P_0))$. Dans le cas d'un gaz parfait, calculer α et χ .

b- En l'absence de convection alors que le profil de température est $T_p(M)$, comparer dans le cas d'un gaz parfait, la variation relative locale de ρ due à la température notée ε_r^T et celle due à la pression notée ε_r^P , et montrer que $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \varepsilon_r^T + \varepsilon_r^P$ où, en ordre de grandeur, $\left| \frac{\varepsilon_r^P}{\varepsilon_r^T} \right| \approx \frac{T_0}{P_0} \frac{\rho_0 g d}{|T_1|}$.

Application numérique :

$T_1 = 1$ K et $d = 1$ cm. Calculer pour l'air $\left| \frac{\varepsilon_r^P}{\varepsilon_r^T} \right|$.

c- Dans les mêmes circonstances qu'au 13-b), montrer que pour un liquide l'ordre de grandeur est $\left| \frac{\varepsilon_r^P}{\varepsilon_r^T} \right| \approx \frac{\chi}{\alpha} \frac{\rho_0 g d}{|T_1|}$.

Application numérique :

Pour l'eau, avec $T_1 = 1$ K et $d = 1$ cm, $\alpha \approx 3.10^{-4}$ USI, $\chi \approx 4,5.10^{-10}$ USI. Calculer $\left| \frac{\varepsilon_r^P}{\varepsilon_r^T} \right|$.

Dans toute la suite on négligera l'influence de la pression sur la masse volumique et on adoptera la relation : $\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0))$. Justifier cette approximation que le fluide soit un liquide ou un gaz.

14) a- Quelle relation existe-t-il entre η , μ et ρ ?

b- Quelles sont les unités de η et μ dans le système international ?

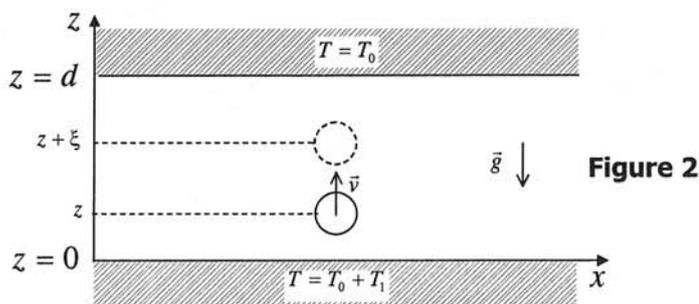
c- Comparer ces grandeurs dans le cas d'un liquide et d'un gaz.

d- Comment varie η avec la température dans le cas d'un liquide ou d'un gaz ?

e- Proposer une méthode de mesure de η (envisager au choix, le cas d'un liquide ou d'un gaz).

Approche qualitative du démarrage de la convection

Dans toute la suite de cette partie, le fluide est un liquide.



L'étude se place dans le cas où $T_1 > 0$.

Considérons une particule sphérique de rayon r , de taille mésoscopique, située initialement à l'altitude z au repos et en équilibre thermique avec son environnement, qui suite à une perturbation locale, acquiert une vitesse verticale \vec{v} et se retrouve à l'altitude $z + \xi$ (Figure 2) où $\xi \ll d$. La différence de température des plans $z = 0$ et $z = d$ engendre un profil de température non homogène. La masse volumique du fluide présente alors une variation régie par la relation $\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0))$.

Soit θ la diminution de température entre z et $z + \xi$ du fluide environnant la particule.

15) On considère pour cette approche que le temps de relaxation mécanique de la particule est faible devant son temps de relaxation thermique τ_{th} . Justifier que ce dernier temps soit de la forme

$\tau_{th} = A \frac{r^2}{D}$, où A est une constante géométrique sans dimension et D la diffusivité thermique. Que peut-on dire de la température de la particule à l'altitude $z + \xi$ si cette altitude est atteinte au bout d'un temps τ faible devant τ_{th} ?

On supposera pour simplifier que la conclusion précédente reste encore valable dans le cas limite $\tau = \tau_{th}$. On se place donc pour la suite dans le cas limite où $\tau = \tau_{th}$.

16) Les hypothèses précédentes permettent de considérer que l'ascension de z à $z + \xi$ s'effectue à la vitesse pratiquement constante v . Quelle est la relation entre v , ξ et τ_{th} ?

Exprimer l'ordre de grandeur de la diminution de température θ du fluide environnant la particule entre z et $z + \xi$ en fonction de T_1 , d et ξ .

17) Enumérer sans les expliciter les forces que subit la particule en $z + \xi$. Expliquer qualitativement pourquoi le profil de température favorise l'ascension de la particule.

18) Pour établir un ordre de grandeur de T_1 à partir duquel la convection s'installe, il faut comparer les contributions du mécanisme de poussée selon la verticale ascendante et de celui de freinage lié aux forces de viscosité.

Justifier simplement que l'ordre de grandeur de la force volumique due à la viscosité est $\eta \frac{v}{d^2}$ puis que celui de la force volumique de poussée verticale est $\alpha g \rho_0 \theta$.

19) On pose le facteur d'échelle ε tel que $r = \varepsilon d$ et on définit le nombre adimensionnel de Rayleigh $R_a = \frac{\alpha T_1 d^3 g}{D\mu}$. Par un raisonnement qualitatif, montrer qu'une convection stable ne s'établit que si le nombre de Rayleigh atteint une certaine valeur critique à expliciter.

Application numérique :

En prenant $\varepsilon \approx 0,1$ et $A \approx 0,05$, évaluer l'ordre de grandeur du nombre de Rayleigh critique R_a^c .

L'étude expérimentale montre que R_a^c est pratiquement indépendant de la taille du dispositif et du fluide Newtonien utilisé et vaut $R_a^c \approx 1,7 \cdot 10^3$.

Ainsi, lorsqu'on chauffe par le bas une couche horizontale de fluide en équilibre, on observe au delà d'une certaine différence de température entre le bas et le haut, un phénomène d'instabilité qui se manifeste par la naissance d'un mouvement de convection du fluide. L'observation par Bénard de cellules de convection apparaissant dans des minces couches liquides chauffées par le bas a été étudiée par Rayleigh qui a proposé une première modélisation.

20) A l'aide des résultats précédents, quelle est l'influence de l'épaisseur de la couche de fluide d sur la différence de température à imposer pour que la convection s'installe.

Mise en équation du problème

On effectue maintenant l'étude du démarrage de la convection dans le cadre de l'approximation de Boussinesq selon laquelle :

- L'influence de la variation de température au voisinage de T_0 se manifeste sur la masse volumique par la relation $\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0))$ et la variation de masse volumique n'est prise en compte dans l'équation mécanique qu'au niveau de l'action de pesanteur.
- L'influence de la pression sur le volume du fluide est négligée et on considère le fluide incompressible d'un point de vue mécanique.
- Dans le bilan d'énergie appliqué à un élément mésoscopique de fluide, on néglige les effets de viscosité.
- On négligera enfin l'influence de la température sur la viscosité η et la diffusivité D du fluide.

21) Ecrire l'équation locale d'incompressibilité faisant intervenir le champ des vitesses.

Dans le cadre des hypothèses précédentes, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right) = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)) \vec{g} - \overrightarrow{grad}(P) + \eta \Delta \vec{v}$$

Que traduit cette équation ? Donner la signification de chacun des termes de cette équation.

22) Justifier simplement que le bilan d'énergie appliqué à un élément mésoscopique de fluide conduit à l'équation $\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})T = D\Delta T$.

Equations linéarisées

23) On désigne par $T_{eq}(M)$, $P_{eq}(M)$ la solution du système d'équations précédent lorsque $\vec{v} = \vec{0}$ et que le régime est permanent. On pose $\beta = -\frac{dT_{eq}}{dz}$, exprimer β en fonction des données du problème.

24) Au démarrage de la convection, on considère que les grandeurs sont faiblement perturbées par rapport au régime permanent sans convection. On pose ainsi :

$$T(M, t) = T_{eq}(M) + \theta(M, t) \text{ et } P(M, t) = P_{eq}(M) + p(M, t)$$

où $\theta(M, t)$, $p(M, t)$ et $\vec{v}(M, t)$, ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles, sont des perturbations du premier ordre.

La notation θ est ici indépendante de celle introduite dans les questions 15 à 20.

En ne conservant que les termes d'ordre égal à 1 au plus, montrer que l'équation de Navier-Stokes et l'équation de conservation de l'énergie s'écrivent :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\alpha \theta \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{grad}(p) + \mu \Delta \vec{v} \text{ (équation (2))}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta v_z = D\Delta \theta \text{ (équation (3))},$$

où $v_z = \vec{v} \cdot \vec{u}_z$. Quel est le terme responsable de la thermoconvection ?

Equations réduites du problème

Pour chaque grandeur, on utilise une échelle typique correspondante afin de définir les variables réduites.

Soient τ , d , P_1 , T_1 et V_1 les paramètres caractéristiques du problème permettant de définir le temps réduit $t^* = t/\tau$, les coordonnées spatiales réduites $x^* = x/d$, $y^* = y/d$ et $z^* = z/d$, la pression réduite $p^* = p/P_1$, la température réduite $\theta^* = \theta/T_1$ et la vitesse réduite $v^* = v/V_1$.

25) On prendra :

- a- pour temps caractéristique τ , l'échelle de temps du processus de diffusion thermique. Exprimer τ en fonction des données du problème.
- b- pour vitesse caractéristique V_1 , la vitesse de convection associée à l'échelle spatiale d et à l'échelle de temps τ . Donner la relation entre V_1 , d et τ .
- c- pour pression caractéristique, $P_1 = \rho_0 V_1^2$. Que représente P_1 ?
- d- pour température caractéristique T_1 , l'écart de température entre les plans $z = 0$ et $z = d$. Rappeler la relation entre T_1 , β et d .

26) Par ailleurs, l'évolution du fluide fait intervenir deux processus de diffusion, l'un thermique de temps caractéristique τ , l'autre mécanique dû à la diffusion microscopique de quantité de mouvement, de temps caractéristique τ' . Soit le nombre adimensionnel de Prandtl égal à $P_r = \tau/\tau'$. Montrer qu'il s'écrit aussi $P_r = \mu/D$. Déterminer, suivant l'ordre de grandeur du nombre de Prandtl, quel est celui des deux processus de diffusion qui est prépondérant.

Proposer un ordre de grandeur de ce nombre pour les gaz. Peut-on faire de même dans le cas des liquides ?

27) Définir le nombre de Reynolds associé à l'écoulement. Quels sont les processus comparés par l'ordre de grandeur de ce nombre ? Quel est, dans le cadre de l'étude du démarrage de la convection, le processus dominant ? La forme de l'équation de Navier-Stokes adoptée prend-elle en compte la conclusion précédente ?

28) Effectuer les changements de variables permettant de ne faire intervenir que les variables réduites dans les équations (2) et (3). Mettre alors les équations linéarisées et réduites du problème sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} = -\overline{\text{grad}}(p^*) + \gamma P_r \theta^* \vec{u}_z + P_r \bar{\Delta} \vec{v}^* \quad (\text{équation (4)})$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} - v_z^* = \Delta \theta^* \quad (\text{équation (5)})$$

où les opérateurs sont calculés avec les variables réduites comme, par exemple, $\overline{\text{grad}}(p^*) = \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \vec{u}_x + \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \vec{u}_y + \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \vec{u}_z$ et où γ est une constante à exprimer en fonction du nombre de Rayleigh R_a .

29) A l'aide de l'équation (4), déterminer les processus comparés par l'ordre de grandeur du nombre de Rayleigh. Justifier alors que le démarrage de la convection nécessite un nombre de Rayleigh minimal.

Résolution

Tous les opérateurs, spatiaux et temporels, sont calculés avec les coordonnées réduites. Tous les nouveaux paramètres définis dans cette partie sont, même s'ils ne sont pas munis de l'annotation « * », des grandeurs réduites et donc adimensionnelles. Soit $\vec{\Omega} = \overline{\text{rot}}(\vec{v}^*)$ le vecteur tourbillon.

30) En utilisant le système d'équations (4) et (5) ainsi que l'équation d'incompressibilité écrite sous forme réduite, montrer que $\vec{\Omega}$ est solution de :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t^*} = R_a P_r \overline{\text{grad}}(\theta^*) \wedge \vec{u}_z + P_r \bar{\Delta} \vec{\Omega} \quad (\text{équation (6)})$$

En appliquant le rotationnel aux deux membres de l'équation (6), établir l'équation reliant θ^* et \vec{v}^* :

$$\frac{\partial \bar{\Delta} \vec{v}^*}{\partial t^*} = R_a P_r \left(\Delta \theta^* \vec{u}_z - \overline{\text{grad}} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} \right) \right) + P_r \bar{\Delta} (\bar{\Delta} \vec{v}^*) \quad (\text{équation (7)})$$

31) On étudie maintenant la composante verticale de la vitesse v_z^* qui intervient déjà dans l'équation (5). Etablir à partir de l'équation (7), la deuxième équation satisfaite par θ^* et v_z^* que l'on nommera équation (8).

Recherche des modes propres

On cherche la solution de v_z^* et θ^* sous forme de combinaison linéaire de modes propres qui

s'écrivent :

$$\begin{cases} v_z^p(x^*, y^*, z^*, t^*) = \Psi(z^*) f(x^*, y^*) \exp(\sigma t^*) \\ \theta^p(x^*, y^*, z^*, t^*) = \Theta(z^*) f(x^*, y^*) \exp(\sigma t^*) \end{cases}$$

où f est solution de l'équation $\Delta f + a^2 f = 0$, la constante a étant à déterminer et σ étant un nombre complexe.

32) Que représentent les parties réelle et imaginaire de σ ? A quelle valeur de σ correspond le régime permanent ? Soit σ' la partie réelle de σ . Que se passe-t-il lorsque $\sigma' > 0$ et $\sigma' < 0$?

33) On étudie le régime permanent. Ecrire les équations (5) et (8) en régime permanent.

34) Pour résoudre ce système différentiel, on cherche les solutions propres sous la forme :

$$\begin{aligned} v_z^q(x^*, y^*, z^*) &= \Psi_0 f(x^*, y^*) \exp(qz^*) \\ \theta^q(x^*, y^*, z^*) &= \Theta_0 f(x^*, y^*) \exp(qz^*) \end{aligned}$$

où Ψ_0 et Θ_0 sont des constantes et q un nombre complexe à déterminer afin que les solutions soient compatibles avec le système. Montrer que ce système impose :

$$\begin{cases} -a^2 R_a \Theta_0 + (q^4 - 2a^2 q^2 + a^4) \Psi_0 = 0 \\ (q^2 - a^2) \Theta_0 + \Psi_0 = 0 \end{cases}$$

En déduire que les solutions propres non nulles sont compatibles avec le système des deux équations (5) et (8) à la condition que q , a et R_a soient solutions d'une équation (9) à déterminer.

Les valeurs de q , a et R_a , vérifiant l'équation (9) doivent, de plus, être telles que la solution formée d'une combinaison linéaire des modes propres, satisfait les conditions aux limites.

35) On suppose que les plans isothermes en $z^* = 0$ et $z^* = 1$ sont des surfaces rigides. Ecrire des conditions limites satisfaites par v_z^* et θ^* . Montrer que la propriété d'incompressibilité du fluide

permet d'obtenir la condition limite $\frac{\partial v_z^*}{\partial z^*}(z^* = 1) = 0$.

L'équation (9) fournit six expressions possibles de q en fonction de R_a et a que l'on ne cherchera pas à expliciter. Les conditions aux limites imposées à la solution déduite des modes propres servent à déterminer les valeurs de a , R_a et q possibles pour un régime permanent.

36) La résolution numérique des conditions précédentes permet d'obtenir le nombre de Rayleigh minimal (nommé nombre de Rayleigh critique) $R_a^c \approx 1707,7$ et la valeur de a correspondante

$a_c \approx 3,1$ associés à un mouvement de convection permanent. Il apparaît alors une seule couche de rouleaux de convection d'axes parallèles à la grande dimension horizontale.

Application numérique :

Pour une huile silicone, $\mu = 10^{-4}$ USI ; $D = 10^{-7}$ USI, $d = 1$ cm, $\alpha = 10^{-3}$ K⁻¹.

Calculer T_1^c , l'écart de température minimal engendrant le démarrage de la convection permanente.

Analyse des résultats

On se place désormais dans le cas bidimensionnel où le fluide présente une longueur selon (O, \vec{u}_y) , infiniment grande devant celle selon (O, \vec{u}_x) . Un logiciel de simulation permet alors de tracer dans le plan $(0, x^*, z^*)$, les lignes de courant et les isothermes pour le nombre de Rayleigh critique R_a^c . Ces courbes, tracées dans une échelle arbitraire pour x^* , sont représentées en Figure 3.

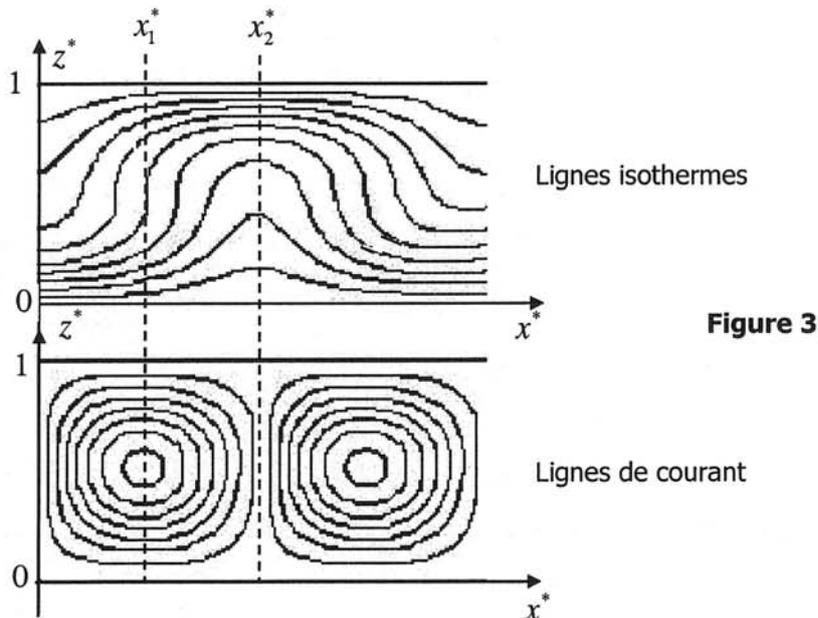


Figure 3

L'écart de température entre deux isothermes consécutives est constant et les abscisses des deux courbes de la Figure 3 sont identiques et verticalement alignées.

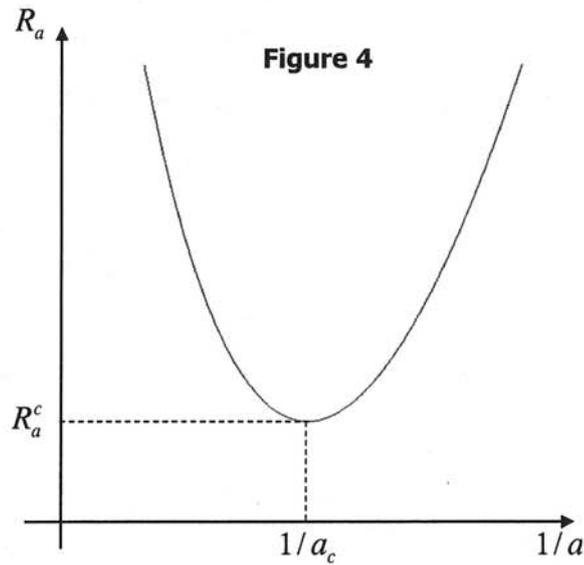
Détermination du sens de rotation du fluide dans les deux rouleaux représentés

37) Donner l'écart de température entre deux isothermes consécutives en échelle réduite. Que vaut v_z^* dans le plan $x^* = x_1^*$? Représenter sur le même graphe les trois courbes des variations de $\frac{T - T_0}{T_1}$ en fonction de z^* pour $x^* = 0$, $x^* = x_1^*$ et $x^* = x_2^*$. En déduire le sens de rotation du fluide dans le rouleau centré en $x^* = x_1^*$ puis dans celui centré sur $x^* = 3x_1^*$.

38) La courbe des variations du nombre de Rayleigh R_a en fonction de $1/a$ pour observer une convection en régime permanent est représentée en Figure 4.

a- Quelle particularité de la Figure 3 est liée au paramètre $1/a$?

b- En analysant la Figure 4, représenter, en prenant pour référence l'échelle arbitraire de la Figure 3 associée au nombre de Rayleigh critique R_a^c , les deux allures possibles des lignes de courant de convection permanente lorsque R_a augmente à partir de R_a^c .



c- Comment se comporte le système pour les points du plan de la Figure 4 n'appartenant pas à la courbe représentée ?

d- Attribuer à chacun des domaines séparés par la courbe, le signe de la constante σ' .

39) Peut-on étudier le cas où $\sigma' > 0$ à l'aide des équations (2) et (3) ? Quel phénomène doit-on prendre en compte pour cette étude ? On argumentera la réponse.

Deuxième partie : Etude d'une bifurcation en mécanique

Description et notations

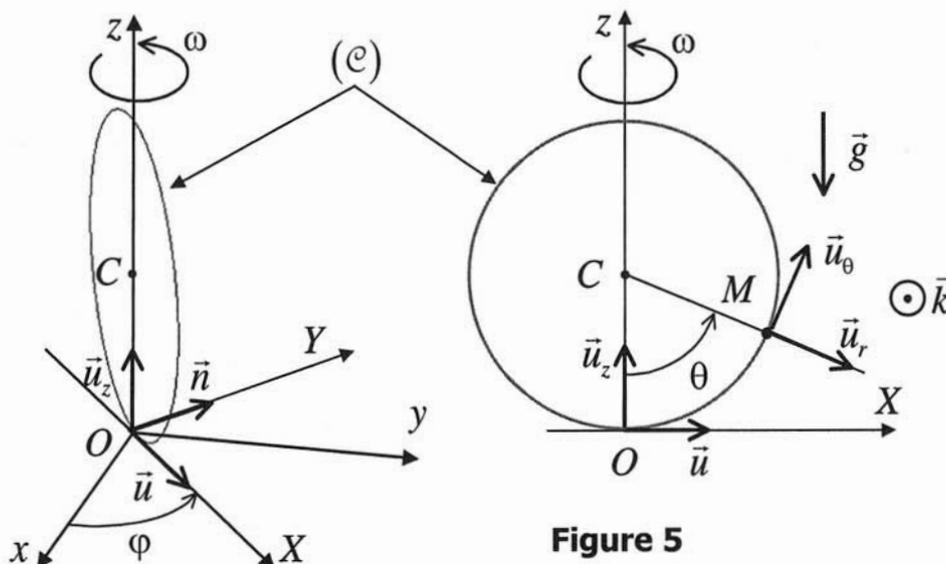


Figure 5

Toutes les notations de cette partie sont indépendantes de celles de la partie précédente.

Au référentiel terrestre, on associe le repère d'espace $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ de coordonnées cartésiennes, où \vec{u}_z est dirigé selon la verticale ascendante.

Un mobile, assimilé à un point matériel M de masse m , est astreint à se déplacer sur un support solide, circulaire, de centre C , de rayon a , nommé (c) . L'axe de symétrie de (c) , passant par les deux points O et C , est immobile et un dispositif moteur, non représenté et non étudié, impose à (c) , par rapport au référentiel terrestre, un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe fixe (O, \vec{u}_z) à la vitesse angulaire ω .

La position du plan du support circulaire (c) , représenté sur la figure de droite, coïncide avec le plan (O, \vec{u}, \vec{u}_z) (Figure 5). Elle est repérée par l'angle $\varphi = \omega t$.

Pour paramétrer la position du point M sur (c) , on utilise le repère de coordonnées cylindriques $(C, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, où θ est orienté par \vec{k} et représente l'angle $(\overline{CO}, \overline{CM})$ (Figure 5).

En outre, le champ de pesanteur uniforme vaut $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ et pour les applications numériques uniquement, on prendra $a = 1$ m.

40) Toute l'étude qui suit est menée dans le cadre de la mécanique de Newtonienne. Quel a été l'apport d'Isaac Newton au domaine de la mécanique ?

- 41)** Dans tout le problème, le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.
- a- Définir la notion de référentiel galiléen.
 - b- Citer une expérience mettant en défaut le caractère galiléen du référentiel terrestre.
- 42)** Le référentiel lié à (\mathcal{C}) est nommé $\mathcal{R}_{(\mathcal{C})}$. Donner le vecteur rotation $\vec{\omega}$ de $\mathcal{R}_{(\mathcal{C})}$ par rapport au référentiel terrestre. Le référentiel $\mathcal{R}_{(\mathcal{C})}$ est-il galiléen ?

Dans toute la suite du problème, l'étude du mouvement du point matériel M est menée dans le référentiel $\mathcal{R}_{(\mathcal{C})}$.

- 43)** La liaison entre le point matériel et le support (\mathcal{C}) est bilatérale (expliquer ce terme) et idéale (sans frottement). Soit $\vec{R} = R_r \vec{u}_r + R_\theta \vec{u}_\theta + R_k \vec{k}$, les composantes de la résultante de l'action de liaison exercée par le support sur M . Quelle(s) conclusion(s) peut-on déduire de la nature de la liaison sur les composantes de \vec{R} ?

Equation du mouvement

- 44)** a- De façon générale, énoncer le principe fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen, et définir chaque terme qui y apparaît (on s'abstiendra de détailler la forme mathématique de chacun des termes).
- b- Définir le point coïncident puis, par une phrase, définir l'accélération d'entraînement.
 - c- Donner l'expression générale de l'accélération de Coriolis.
- 45)** Appliquer à M le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}_{(\mathcal{C})}$. En déduire l'équation différentielle satisfaite par θ que l'on mettra sous la forme :

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin(\theta)(1 - \alpha \cos(\theta)) \quad (\text{équation (10)})$$

On posera $\omega_0^2 = \frac{g}{a}$ et $\alpha = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. Que représente ω_0 ?

- 46)** A l'aide des équations déduites du principe fondamental de la dynamique, expliquer qualitativement pourquoi il est nécessaire, lorsque le point M est en mouvement, de prévoir un système de régulation de vitesse agissant sur le moteur qui entraîne le support circulaire (\mathcal{C}) afin que celui-ci tourne à la vitesse constante ω .

- 47)** A l'instant $t = 0$, on désigne par θ_0 la position angulaire et $\dot{\theta}_0$ la vitesse angulaire du point M . Après l'avoir énoncé, appliquer le théorème de l'énergie cinétique à M , dans le référentiel $\mathcal{R}_{(\mathcal{C})}$ et établir l'intégrale première du mouvement (équation (11)).

Le système est-il conservatif ? Cette équation est-elle indépendante de l'équation (10) ? Commenter.

Etude des positions d'équilibre et mouvement autour de ces positions

48) Énoncer la condition d'équilibre du point M dans le référentiel $\mathcal{R}_{(e)}$.

Déterminer l'ensemble des valeurs θ_e de θ des positions angulaires associées aux états d'équilibre.

On distinguera deux cas selon les valeurs du paramètre α et on fera apparaître une valeur critique α_c de α frontière entre ces deux cas.

49) a- Déterminer l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ du point en prenant pour convention $E_p(\theta = 0) = 0$.

b- Représenter l'allure de ses variations en fonction de θ pour les trois cas $\alpha < \alpha_c$, $\alpha = \alpha_c$ et $\alpha > \alpha_c$.

c- En déduire la stabilité des états d'équilibre selon les valeurs de α .

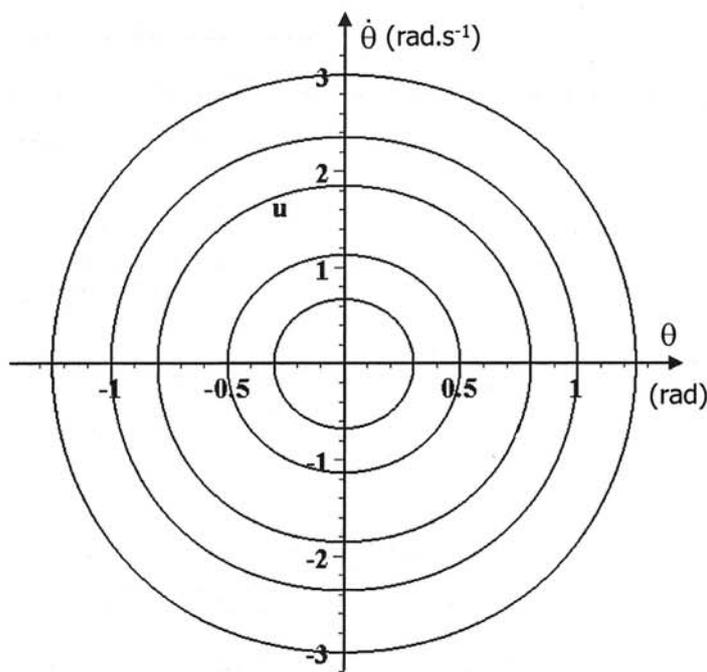
50) Tracer l'allure du diagramme de bifurcation, variations des valeurs de θ_e en fonction de α , uniquement pour les positions d'équilibre stables.

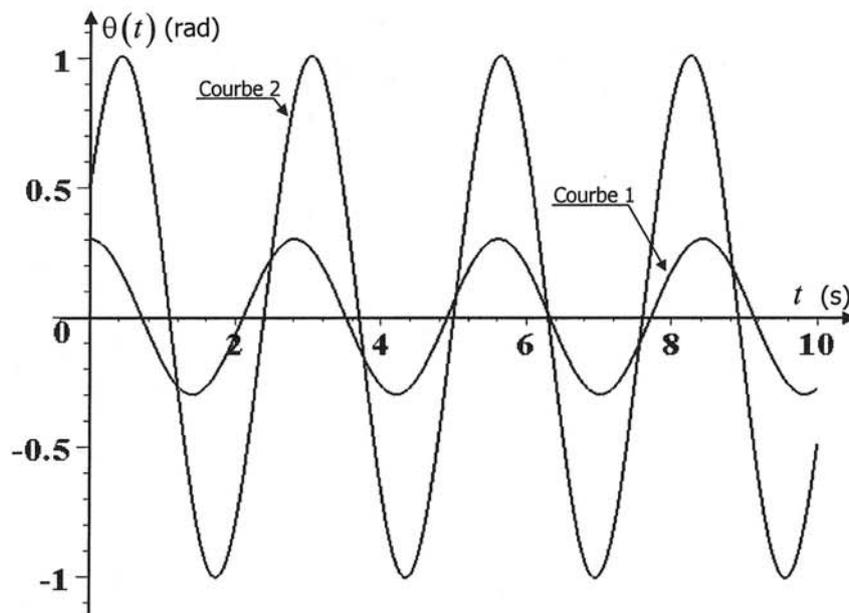
Le diagramme précédent fait apparaître une bifurcation fourche. Le point de ce diagramme tel que $\alpha = \alpha_c$ se nomme le point critique.

Etude de cas

Premier cas

Figure 6





La Figure 6 se compose d'une part d'un extrait du portrait de phase, d'autre part de deux chronogrammes des variations de θ en fonction du temps. Toutes les courbes sont tracées pour la même valeur de α .

51) Le portrait de phase représente des variations de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de la position angulaire θ pour diverses conditions initiales, chaque condition initiale engendre une trajectoire de phase.

a- Lorsque le temps augmente, dans quel sens sont parcourues les trajectoires de phase ? On fera apparaître l'orientation correspondante sur un schéma sommaire.

b- A quelle(s) propriété(s) est (sont) liée(s) le caractère fermé des courbes représentant les trajectoires de phases ?

c- Comment évolue l'énergie mécanique du point matériel lorsque ce dernier parcourt une trajectoire de phase ? Quelle propriété retrouve-t-on ?

52) a- A quel intervalle appartient la valeur de α ayant servi à tracer les courbes ?

Le portrait de phase de la Figure 6 a été recopié sur un document annexe à rendre avec la copie.

b- Parmi les trajectoires de phase représentées en Figure 6, sélectionner celles correspondant aux deux chronogrammes, Courbe 1 et Courbe 2, et les surligner sur la figure à rendre.

c- Déterminer les conditions initiales pour chacune des deux courbes. La période des deux chronogrammes est-elle identique ?

d- Expliquer ce qu'est un oscillateur isochrone.

53) Déterminer T_i , la période des oscillations isochrones en fonction de α et $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

En supposant que la Courbe 1 entre dans le cadre des oscillations isochrones, hypothèse que l'on justifiera qualitativement, estimer par une mesure graphique la valeur de α .

On adoptera dans la suite la valeur de α arrondie au demi entier le plus proche.

Tournez la page S.V.P.

54) Mesurer graphiquement T_2 , période de la Courbe 2. Peut-on considérer que l'on est dans le cadre des oscillations isochrones ?

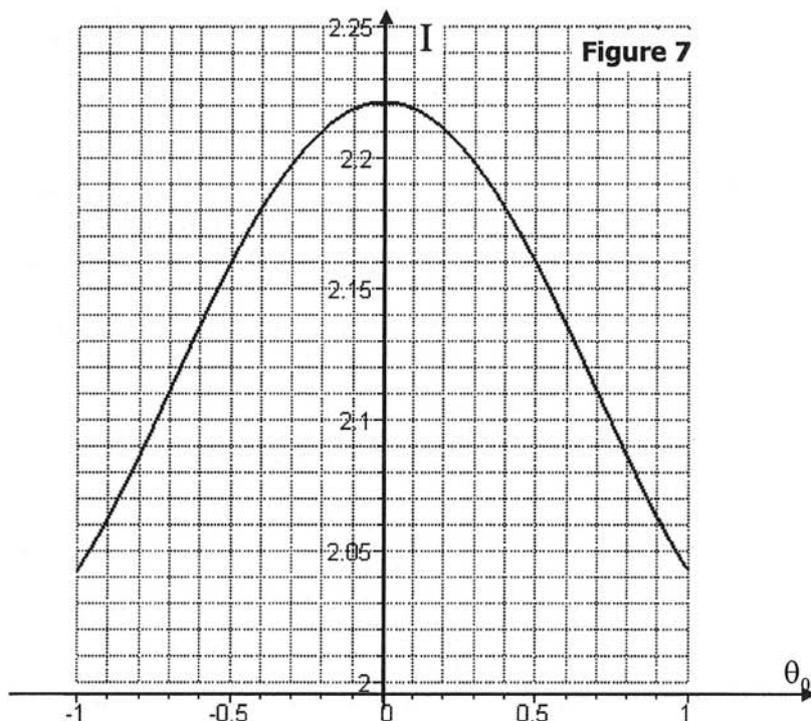
Exprimer alors la période T des oscillations autour de 0 sous forme d'une intégrale faisant intervenir θ , θ_0 , T_0 et α , où θ_0 représente l'angle initial lorsque la vitesse angulaire initiale est nulle.

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

La courbe de la Figure 7, représente les valeurs de l'intégrale I , définie par :

$$I = \int_{u_0}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(u-u_0)\left(2-\frac{1}{2}(u+u_0)\right)}}$$

où $u_0 = \cos(\theta_0)$, en fonction de θ_0 .



55) a- Lorsque α prend la valeur qui a servi pour les courbes des figures 6 et 7, établir la relation entre T , T_0 et l'intégrale I .

b- Expliquer pourquoi la courbe de la figure 7 présente la droite $\theta_0 = 0$ comme axe de symétrie.

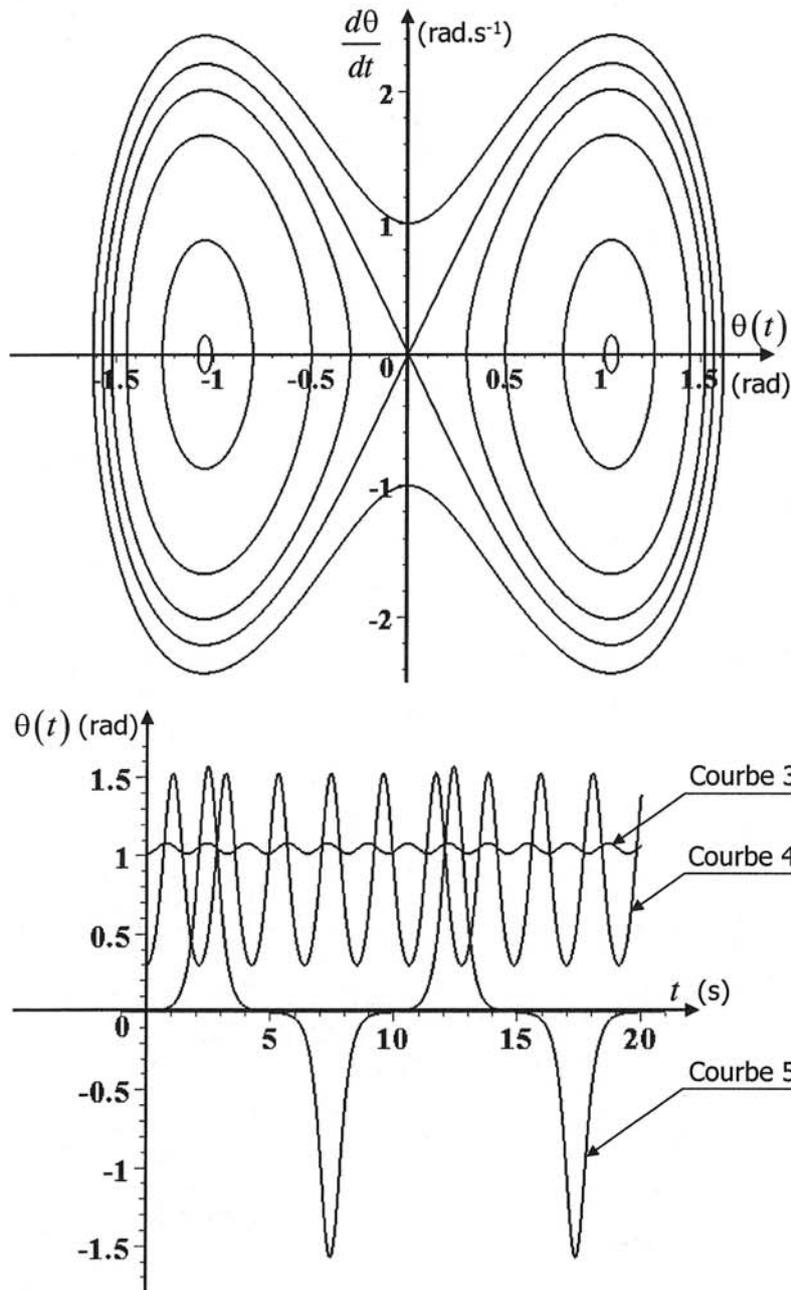
c- Commenter la valeur obtenue pour $\theta_0 = 0$.

d- Calculer les valeurs des périodes des courbes 1 et 2 grâce aux valeurs de l'intégrale I lues sur la courbe de la Figure 7 puis les comparer à celles mesurées sur les chronogrammes de la Figure 6.

56) A l'aide de la Figure 7, déterminer la plage des valeurs des amplitudes d'oscillations pour observer des oscillations isochrones à 1% près. L'hypothèse de la question 53 était-elle valable ?

Deuxième cas

Figure 8



La Figure 8 se compose d'une part d'un extrait du portrait de phase, d'autre part de trois chronogrammes des variations de θ en fonction du temps. Toutes les courbes sont tracées pour la même valeur de α , différente de celle adoptée pour le premier cas.

57) a- Déterminer l'intervalle auquel appartient α .

Le portrait de phase de la Figure 8 a été recopié sur un document annexe à rendre avec la copie.

b- Pour chaque chronogramme, attribuer la trajectoire de phase correspondante en la surlignant sur la figure à rendre et en l'orientant selon la même convention que celle de la

Tournez la page S.V.P.

question 51.

c- Déterminer les conditions initiales pour chacune des trois courbes.

d- Déterminer la valeur de α sachant qu'elle est entière.

58) **a-** Les oscillations des courbes 3, 4 et 5 de la Figure 8 correspondent-elles à des oscillations isochrones ?

b- Etablir la période théorique des oscillations isochrones T_i' , en fonction de T_0 et α puis calculer sa valeur numérique.

c- Comparer cette valeur aux périodes mesurées sur les chronogrammes et commenter.

59) On étudie maintenant le portrait de phase.

a- Déterminer les positions d'équilibre apparaissant sur le portrait de phase et établir la corrélation avec le diagramme de bifurcation défini en question 50.

b- Quelle est la position d'équilibre instable ? Comment se comportent les trajectoires de phases au voisinage cette position ?

c- Peut-on observer des oscillations périodiques autour de la position d'équilibre instable ?

d- Peut-on observer des oscillations périodiques harmoniques autour de la position d'équilibre instable ?

e- Comparer les spectres fréquentiels des signaux représentés en courbe 3, 4 et 5.

60) Déterminer numériquement l'énergie mécanique E_m de chaque mouvement du point M représenté sur les courbes 3, 4 et 5. On prendra $m = 1$ kg et on conservera la convention définie en question 49 pour l'énergie potentielle.

Comparer la période des deux mouvements dont l'énergie mécanique est très proche de 0 mais positive pour l'un et négative pour l'autre et calculer le rapport de ces deux périodes pour $E_m = 0^+$ et $E_m = 0^-$.

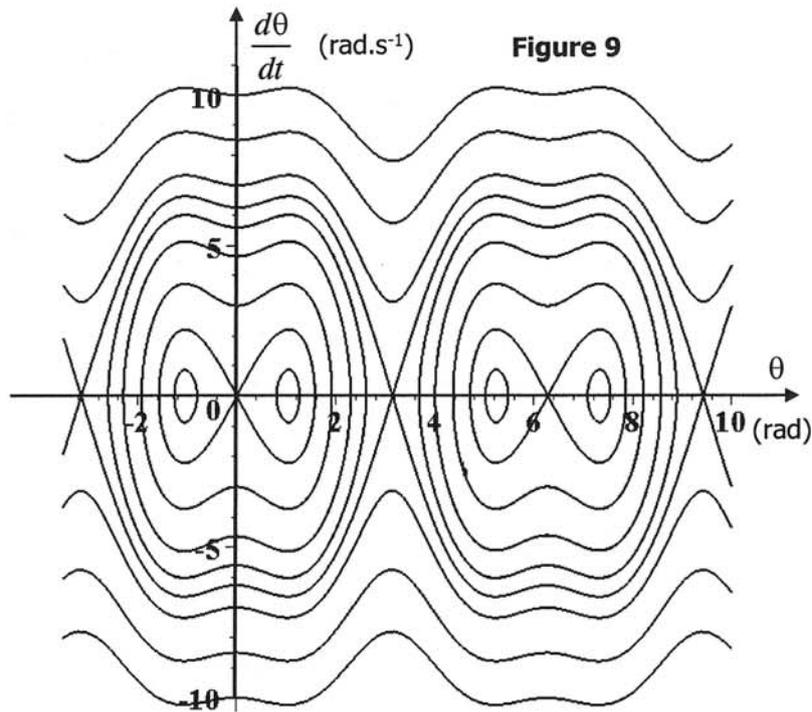
Dans ce cas, commenter le comportement du système étudié vis-à-vis des conditions initiales ?

61) Comportement du système autour du point critique dans le diagramme de bifurcation :

a- Montrer que les positions d'équilibre θ_e , au voisinage du point critique lorsque $\alpha \approx \alpha_c$ mais $\alpha > \alpha_c$, vérifient $\theta_e \approx \sqrt{2}\sqrt{\alpha - 1}$. En déduire l'expression approchée de θ_e au voisinage du point critique en fonction de ω et ω_0 .

b- Citer un exemple issu d'un autre domaine de la physique où on retrouve un résultat analogue.

62) Pour la même valeur de α que celle associée à la Figure 8 et déterminée à la question 57, la Figure 9 propose un portrait de phase plus complet.



a- Montrer qu'il existe deux valeurs de l'énergie mécanique E_1 et E_2 telles que $E_1 < E_2$, que l'on déterminera littéralement et numériquement, qui permettent de classer les mouvements du point M .

b- Le portrait de phase de la Figure 9 a été recopié sur un document annexe à rendre avec la copie. Pour chaque type de mouvement, surligner sur le document à rendre une trajectoire de phase représentative, l'orienter et décrire le mouvement correspondant.

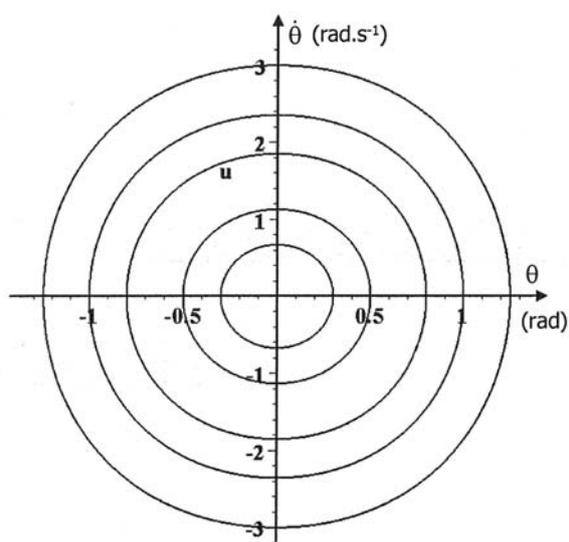
c- Déterminer la forme limite des trajectoires de phase dont la valeur absolue de l'ordonnée à l'origine devient infiniment grande.

63) On étudie, comme en question 60, l'effet du passage de $E_m = E_2^+$ à $E_m = E_2^-$. Dans les plans de phase recopiés sur le document à rendre, tracer les trajectoires de phase associées à $E_m = E_2^+$ et $E_m = E_2^-$ puis procéder à leur orientation.

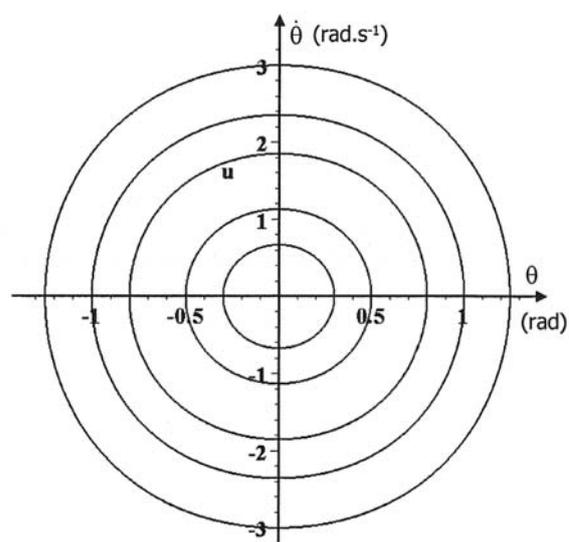
Décrire pour chaque cas le mouvement.

Peut-on différencier les deux cas par simple observation des mouvements ?

FIN D'ENONCE

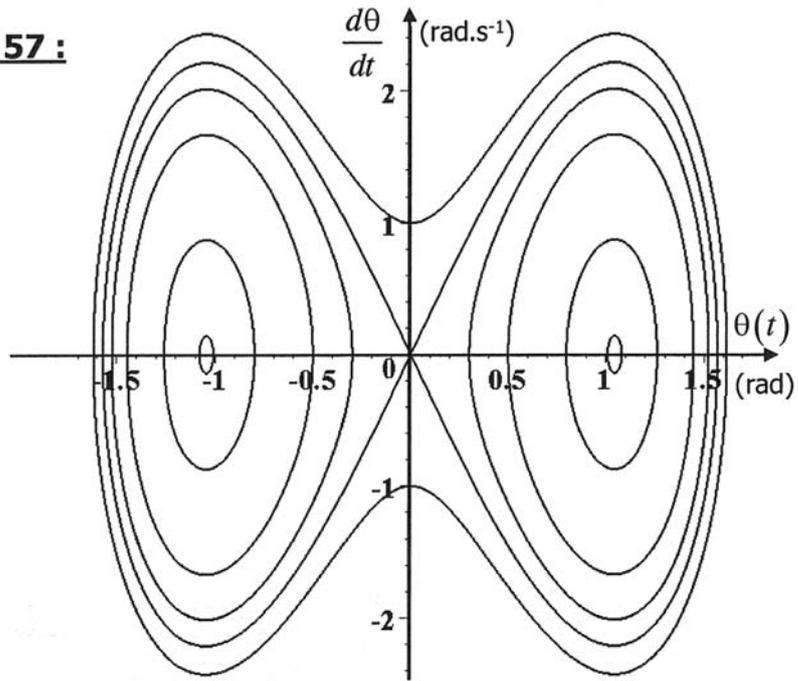
DOCUMENT ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE**Question 52 :**

Trajectoire correspondant à la courbe 1

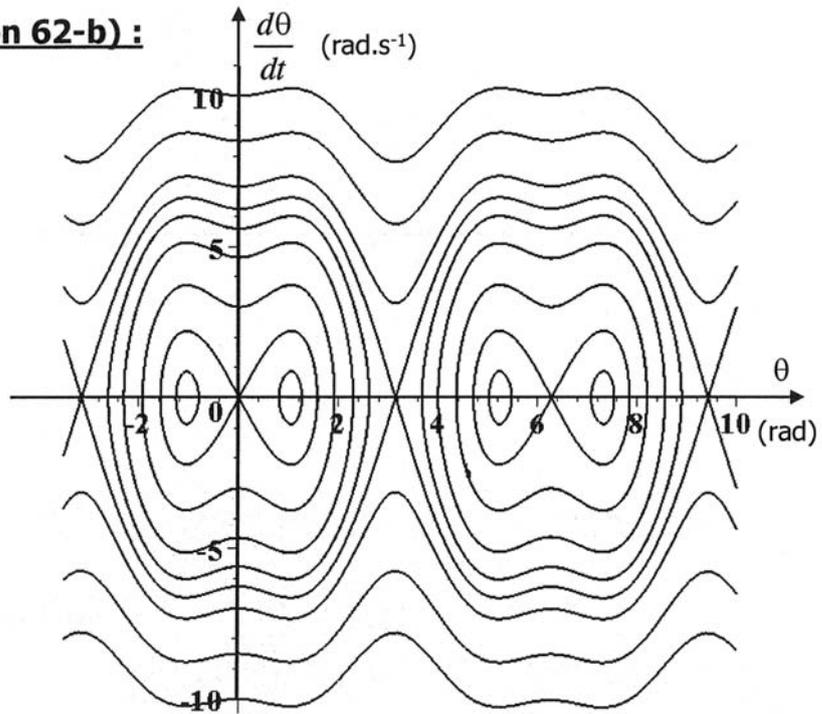


Trajectoire correspondant à la courbe 2

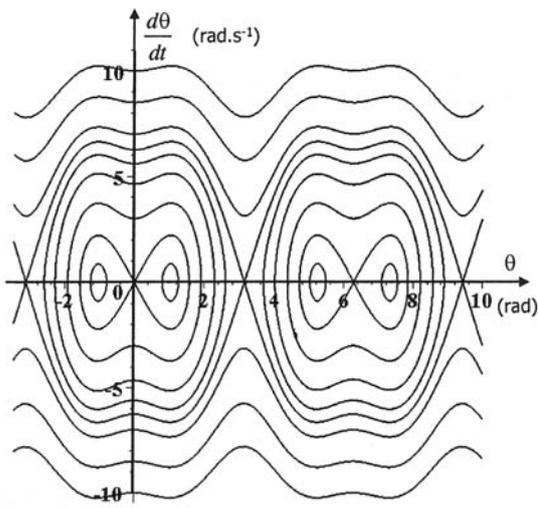
Question 57 :



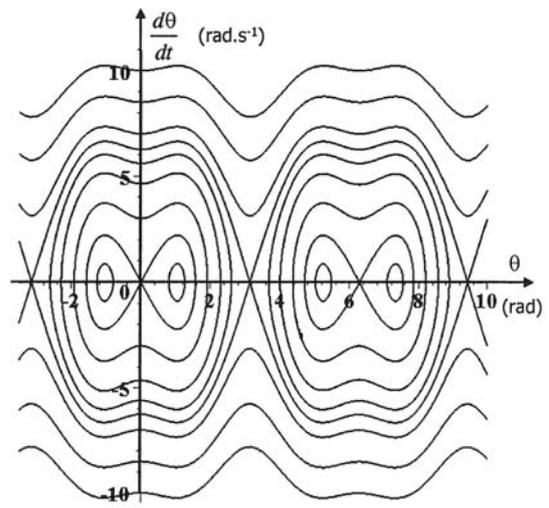
Question 62-b) :



Question 63) :



$$E_m = E_2^+$$



$$E_m = E_2^-$$