Deuxième partie

Couplage fort lumière-matière en cavité

Dans cette partie, on considère une cavité Fabry-Perot contenant un milieu matériel qui présente une résonance à la pulsation ω_0. Il peut s'agir soit d'un jet atomique traversant la cavité optique (Fig. 2.a), soit d'une hétérostructure de matériaux semiconducteurs (Fig. 2.b). On examine de quelle manière cette résonance de matière modifie la transmission de la cavité lorsqu'une des pulsations de résonance de la cavité est ajustée à ω_0.

On étudie d'abord séparément un mode du champ électromagnétique dans la cavité en l'absence de cette résonance du milieu. On définira le coefficient d'atténuation γ_C (C pour "cavité") de ce mode par la largeur des pics de transmission $T_C^{sans}(\omega)$. On reliera ensuite γ_C à l'amortissement du mode du champ électromagnétique dans la cavité, dû aux pertes vers les modes extérieurs à la cavité.

On décrit ensuite la résonance du milieu matériel dans le cadre du modèle classique de l'oscillateur de Lorentz, avec un coefficient d'amortissement phénoménologique γ_A (A pour "atome") . On fait apparaître le lien entre absorption et dispersion au voisinage de la résonance.

On examine enfin l'influence de ces oscillateurs de Lorentz placés dans la cavité sur le facteur de transmission $T_C^{avec}(\omega)$ de cette cavité, ou sur l'évolution temporelle de l'intensité en sortie de cavité après excitation brève. On supposera le faisceau laser de faible intensité.

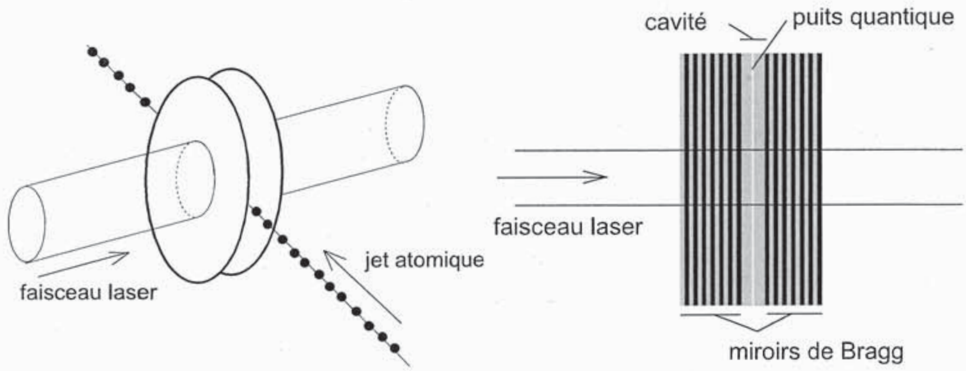

FIG. 2 – a) Cavité optique traversée par un jet atomique présentant une transition atomique résonnante avec la cavité. La longueur de la cavité est L = 10 mm. b) Hétérostructure de matériaux semiconducteurs. La géométrie du "puits quantique" définit la pulsation de résonance du milieu matériel. La cavité optique a une longueur optique effective de l'ordre de λ, longueur d'onde de la résonance ($L \sim 1$ μm). L'alternance de matériaux d'épaisseur optique $\lambda/4$ permet de réaliser des miroirs de coefficient de réflexion élevé.

1 Caractéristiques de la cavité sans oscillateurs

1.1 Accord de phase et finesse

On considère une cavité Fabry-Perot plane constituée par les deux miroirs M_1 et M_2, séparés par la distance L (Fig. 3). Cet espace contient un milieu d'indice "de base" constant n_B. Pour simplifier les calculs on suppose que même milieu d'indice n_B est

Tournez la page S.V.P.

également présent de part et d'autre de la cavité.
Les coefficients de réflexion en amplitude du miroir M_1 sont r_1 du coté intra-cavité et $-r_1$ du coté externe ; les coefficients de transmission en amplitude sont t_1 pour l'onde entrante et t'_1 pour l'onde sortante de la cavité. Les coefficients de réflexion et de transmission en énergie sont respectivement notés R_1 et T_1. On a de même r_2, $-r_2$, t_2, t'_2 R_2 et T_2 pour le miroir M_2. R_1 et R_2 sont très proches de 1. On supposera r_1 et r_2 réels.

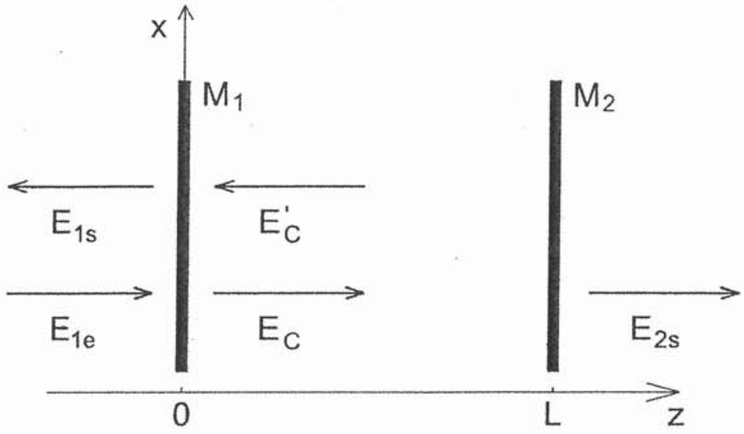

FIG. 3 – Cavité optique Fabry-Perot en régime permanent. Les flèches indiquent le sens de propagation des ondes. Les champs électriques sont dirigés suivant l'axe Ox.

29. Rappeler l'expression du déphasage $\Phi(\omega)$ associé à un aller-retour de la lumière dans la cavité.
30. On envoie sur la cavité une onde incidente de la forme $\widetilde{E}_{1e}(z,t) = \widetilde{A}_{1e}\exp[j(kz-\omega t)]$. Le champ dans la cavité est la superposition d'une onde progressive $\widetilde{E}_C(z,t) = \widetilde{A}_C\exp[j(kz-\omega t)]$ et d'une onde progressive de direction opposée $\widetilde{E}'_C(z,t) = \widetilde{A}'_C\exp[j(-kz-\omega t)]$. Il existe également une onde réfléchie par la cavité $\widetilde{E}_{1s}(z,t) = \widetilde{A}_{1s}\exp[j(-kz-\omega t)]$ et une onde transmise $\widetilde{E}_{2s}(z,t) = \widetilde{A}_{2s}\exp[j(kz-\omega t)]$ (voir Fig. 3).
    (a) On considère les amplitudes des champs dans le plan $z=0$. Donner les relations liant les amplitudes $\widetilde{A}_C$ et $\widetilde{A}_{1s}$ aux amplitudes $\widetilde{A}_{1e}$ et $\widetilde{A}'_C$, et faisant intervenir des coefficients caractérisant le miroir M_1.
    (b) Donner l'amplitude $\widetilde{A}'_C$ en fonction de $\widetilde{A}_C$, des coefficients caractérisant le miroir M_2 et du déphasage $\Phi(\omega)$.
    (c) Donner l'amplitude $\widetilde{A}_{2s}$ en fonction de $\widetilde{A}_C$ et des caractéristiques du miroir M_2.
    (d) En déduire l'expression de l'amplitude $\widetilde{A}_{2s}$ en fonction de l'amplitude incidente $\widetilde{A}_{1e}$.
31. On suppose pour toute la suite les deux miroirs identiques. Déduire de ce qui précède l'expression du coefficient de transmission en énergie de la cavité $T_C(\omega)$ en fonction de T, R et $\Phi(\omega)$.
32. (a) A quelle condition sur la phase $\Phi(\omega)$ la transmission $T_C(\omega)$ est-elle maximale ?
    (b) Donner l'expression de l'intervalle spectral libre défini en pulsation $\Delta_{ISL} = \omega_{m+1} - \omega_m$, où ω_m et ω_{m+1} sont deux pulsations de résonance consécutives.
    (c) Donner la valeur de T_C^{max}.
33. Soit $\varepsilon(\omega)$ le désaccord de phase $\varepsilon(\omega) = \Phi(\omega) - \Phi(\omega_m)$ où ω_m est la pulsation de résonance la plus proche de ω. Exprimer $\varepsilon(\omega)$ en fonction du décalage de pulsation $\omega - \omega_m$ et de Δ_{ISL}.

34. On considère dorénavant uniquement le mode du champ électromagnétique de pulsation ω_m. On suppose que le décalage de pulsation $\Delta = \omega - \omega_m$ est très faible devant l'intervalle spectral libre en pulsation, soit $|\Delta| << \Delta_{ISL}$. Montrer que le coefficient de transmission de la cavité sans oscillateurs $T_C(\Delta)$ se réécrit, après développement

$$T_C^{sans}(\Delta) = \frac{T^2}{[1-R]^2 + R(2\pi\frac{\Delta}{\Delta_{ISL}})^2} \tag{7}$$

35. Soit γ_C la largeur totale à mi-hauteur des pics de transmission $T_C^{sans}(\Delta)$ de la cavité sans oscillateurs.
    (a) Pour quelles valeurs de Δ la transmission chute-elle d'un facteur 2 ?
    (b) En déduire l'expression de la largeur totale à mi-hauteur γ_C des pics de transmission $T_C^{sans}(\omega)$ en fonction de Δ_{ISL} et R, puis en fonction de R, c, L et n_B.
    (c) En déduire l'expression de la finesse F définie par : $F = \frac{\Delta_{ISL}}{\gamma_C}$.

1.2 Durée de vie du mode de cavité

On considère dans cette partie que le champ dans la cavité a été créé au voisinage de $t = 0$, au moyen d'une impulsion intense $\widetilde{E}_{1e}(z,t)$, de pulsation moyenne ω_0, et de durée nettement plus longue que le temps d'un aller retour de la lumière dans la cavité. On s'intéresse à l'évolution temporelle ultérieure de l'amplitude du champ électrique dans la cavité, après coupure de l'excitation.
On considère ainsi que le champ dans la cavité est alors la superposition d'une onde progressive $\widetilde{E}_C(z,t) = A_C(t)\exp[j(kz - \omega_0 t)]$ et d'une onde progressive de direction opposée $\widetilde{E}'_C(z,t) = A'_C(t)\exp[j(-kz - \omega_0 t)]$. Les amplitudes $A_C(t)$ et $A'_C(t)$ sont lentement variables : les variations rapides sont contenues dans le terme $\exp[j(kz - \omega_0 t)]$. Le déphasage $\Phi(\omega_0)$ associé à un aller-retour de la lumière dans la cavité étant un multiple de 2π, on peut prendre $A_C(t)$ et $A'_C(t)$ réels. Il existe également deux ondes sortantes $\widetilde{E}_{1s}(z,t) = \widetilde{A}_{1s}(t)\exp[j(-kz - \omega_0 t)]$ et $\widetilde{E}_{2s}(z,t) = \widetilde{A}_{2s}(t)\exp[j(kz - \omega_0 t)]$ vers les z décroissant et croissant respectivement (voir Figure 3).

36. On note τ le temps mis par l'onde pour faire un aller-retour dans la cavité. Exprimer τ en fonction des caractéristiques de la cavité.
37. Montrer qu'après excitation de la cavité par une impulsion de durée bien supérieure à τ, les amplitudes $A_C(t)$ et $A'_C(t)$ varient lentement dans le temps, c'est-à-dire lentement à l'échelle du temps τ.
38. Exprimer $A'_C(t)$ en fonction de $A_C(t-\tau)$ et des coefficients caractérisant le miroir M_2.
39. Rappeler la relation reliant l'amplitude $A_C(t)$ à l'amplitude $A'_C(t)$ et aux coefficients caractérisant le miroir M_1. En déduire une relation entre $A_C(t)$ et $A_C(t-\tau)$.
40. Sachant que l'amplitude varie très peu pendant la durée τ, calculer $A_C(t) - A_C(t-\tau)$ et montrer que l'évolution de $A_C(t)$ est gouvernée par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dA_C(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{2}A_C(t)$$

41. Exprimer le taux de décroissance du champ dans la cavité $\gamma/2$ en fonction de $(1-R)$ et de τ.
42. Montrer que le coefficient d'amortissement de l'énergie emmagasinée dans la cavité est γ. Exprimer γ en fonction de $(1-R)$, L, n_B et c. Quel est le lien entre ce coefficient d'amortissement γ de l'énergie du mode de cavité et la largeur totale à mi-hauteur γ_C des pics de transmission ?
43. De quelle manière évolue l'intensité $I_s(t)$ détectée en sortie de cavité ?

2 Oscillateurs de Lorentz

2.1 Electron élastiquement lié

En l'absence d'oscillateurs, le matériau est transparent, d'indice de base n_B. En présence des oscillateurs, la permittivité diélectrique relative de la matière $\widetilde{\epsilon_r}$ comporte deux termes : d'une part la permittivité constante $\epsilon_{rB} = n_B^2$, d'autre part la susceptibilité diélectrique des oscillateurs $\widetilde{\chi}(\omega)$:

$$\widetilde{\epsilon_r} = \epsilon_{rB} + \widetilde{\chi}(\omega) \tag{8}$$

On modélise ces oscillateurs en les assimilant à N atomes par unité de volume possédant chacun un électron (masse m, charge $-e$) lié au coeur de l'atome par un potentiel harmonique défini par la constante de rappel $m\omega_0^2$. On modélise les effets dissipatifs par une force de frottement de la forme $\overrightarrow{f} = -m\gamma_A \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de l'électron. Ces effets dissipatifs sont faibles, ce qui se traduit par $\gamma_A \ll \omega_0$.

44. Donner l'équation du mouvement de l'électron en présence du champ électrique $\vec{E}(t)$.
45. On rappelle que, dans cette partie, on représente une grandeur harmonique h de pulsation ω par $h(t) = \Re[\tilde{H}\exp(-j\omega t)]$, en suivant la convention déjà adoptée pour les ondes. Donner alors l'expression de la susceptibilité diélectrique $\widetilde{\chi}(\omega)$ en fonction de ω, de ω_0, du coefficient d'amortissement γ_A et de la pulsation plasma ω_p définie par :

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide.

46. On ne s'intéresse qu'au voisinage de la résonance. Sachant que $|\Delta| << \omega_0$, donner l'expression approchée de $\widetilde{\chi}$ en fonction de l'écart de pulsation $\Delta = \omega - \omega_0$, du coefficient d'amortissement γ_A, de ω_p et de ω_0.

2.2 Absorption et dispersion

47. Rappeler le lien entre l'indice complexe $\widetilde{n}$ et la permittivité diélectrique relative $\widetilde{\epsilon_r}$. Sachant que $|\widetilde{\chi}(\omega)| << \epsilon_{rB}$, faire un développement de l'indice complexe $\widetilde{n}$ au premier ordre par rapport à $\widetilde{\chi}$.
48. Rappeler comment l'indice de réfraction n et le coefficient d'absorption α, défini par rapport à l'intensité, sont reliés aux parties réelle et imaginaire de l'indice complexe.
49. Exprimer $\widetilde{n}$ en fonction de ω_p, ω_0, n_B, γ_A et Δ. En déduire que l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption du milieu contenant les oscillateurs de Lorentz sont de la forme :

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \frac{\gamma_A^2}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} \quad \text{et} \quad n(\omega) = n_B - \alpha_0 \frac{c}{\omega_0} \frac{\Delta\gamma_A}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} \tag{9}$$

Exprimer α_0 en fonction de ω_p, n_B, c et γ_A.

50. Comment α_0 varie-t-il avec le nombre N d'oscillateurs par unité de volume ?
51. Quelle est la largeur à mi-hauteur du pic d'absorption ?

3 Caractéristiques de la cavité avec oscillateurs

Le milieu matériel résonnant décrit ci-dessus occupe maintenant tout le volume de la cavité.

3.1 Effet de la dispersion

Dans cette partie on s'intéresse à l'effet de la dispersion : on ne prend pas en compte pour le moment l'absorption.

52. Donner la nouvelle expression du déphasage $\Phi_{avec}(\omega)$ associé à un aller-retour de la lumière dans la cavité.

53. On considère que la cavité vide est accordée sur la pulsation ω_0. On a donc $\Phi_{sans}(\omega_0) = m2\pi$, avec m entier.
    (a) En considérant la forme de la fonction $n(\omega)$, montrer que $\Phi_{avec}(\omega_0)$ vaut toujours $\Phi_{avec}(\omega_0) = m2\pi$.
    (b) On cherche s'il existe d'autres valeurs de la pulsation au voisinage de (ω_0) qui vérifient la relation d'accord de phase $\Phi_{avec}(\omega) = m2\pi$, avec la même valeur entière m. Traduire cette condition sous la forme d'une relation liant $n(\omega)$, n_B, ω et ω_0.
    (c) Discuter cette relation en traçant sur un même graphique la fonction $n(\omega)$ et une fonction de ω à déterminer, sur un petit domaine de pulsation autour de ω_0. Montrer à l'aide du graphique qu'il existe, suivant l'importance du terme résonnant, soit une soit trois solutions vérifiant cette condition d'accord de phase.

54. Donner la nouvelle expression du désaccord de phase $\varepsilon(\omega) = \Phi_{avec}(\omega) - \Phi_{avec}(\omega_0)$ en fonction de ω, ω_0, L, c, n_B et $n(\omega)$.

55. En introduisant le décalage de pulsation $\Delta = \omega - \omega_0$, montrer que le désaccord de phase $\varepsilon(\omega)$ en présence du milieu résonnant peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta_{ISL}}[\Delta - \frac{\beta^2\Delta}{4\Delta^2 + \gamma_A^2}] \tag{10}$$

où β est un paramètre, caractérisant le couplage entre les oscillateurs et la cavité, qu'on exprimera d'abord en fonction de F, α_0, L, γ_A et γ_C.

56. Exprimer ensuite β en fonction de N, e, m, ϵ_0 et n_B. Montrer que β s'écrit simplement en fonction de ω_p (qui caractérise la partie résonnante de la matière) et de l'indice de base n_B qui caractérise la matière non résonnante.

57. Préciser la discussion graphique précédente en recherchant les zéros de la fonction $\varepsilon(\omega)$. Donner la position des nouveaux modes résonnants en fonction des paramètres β et γ_A. Montrer que les nouveaux modes résonnants n'apparaissent que pour un couplage supérieur à un couplage critique β_c que l'on précisera.

58. Préciser la dépendance de β avec N. Comment faut-il choisir la concentration volumique d'oscillateurs pour avoir un couplage élevé ?

59. La prise en compte du phénomène d'absorption, qui fait l'objet de la partie suivante, révèle l'existence de *deux* pics de transmission alors que l'on a *trois* zéros de la fonction désaccord de phase $\varepsilon(\omega)$. Proposer une explication.

3.2 Effets de la dispersion et de l'absorption

L'absorption est maintenant prise en compte.

60. Montrer qu'en présence du milieu absorbant, le coefficient de transmission de la cavité $T_C(\Delta)$ vaut :

$$T_C^{avec}(\omega) = \frac{T^2\exp(-\alpha(\omega)L)}{[1 - R\exp(-\alpha(\omega)L)]^2 + 4R\exp(-\alpha(\omega)L)\sin^2(\Phi(\omega)/2)} \tag{11}$$

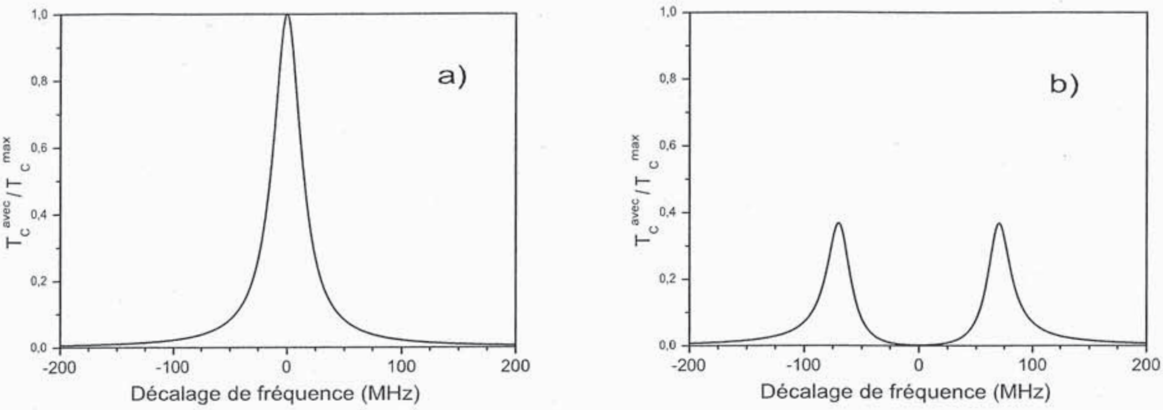

FIG. 4 – Transmission de la cavité optique en fonction du décalage de fréquence entre le laser et la résonance de la cavité. a) cavité vide, b) cavité traversée par le jet atomique.

61. On fait l'hypothèse d'une très faible absorption pour un aller-retour dans la cavité, soit $\alpha(\omega)L \leq \alpha_0 L << 1$. On se limite à de très petits écarts de pulsation : $|\Delta| \ll \Delta_{ISL}$. On rappelle que la cavité est de grande finesse ($R \simeq 1$). Montrer que le coefficient de transmission de la cavité $T_C(\Delta)$ se réécrit, après développement

$$T_C^{avec}(\omega) = \frac{T^2}{[1 - R + \alpha(\omega)L]^2 + \varepsilon(\omega)^2} \tag{12}$$

62. En utilisant les résultats des questions 32, 35, 9, 55 et 56, on arrive après des manipulations algébriques élémentaires qui ne sont pas demandées à exprimer $T_C^{avec}(\Delta)$ sous la forme

$$T_C^{avec}(\Delta) = T_C^{max} \frac{\gamma_C^2}{u - (2\beta^2 + \gamma_A^2 - \gamma_C^2) + \beta^2(\beta^2 + 2\gamma_A^2 + 2\gamma_A\gamma_C)/u} \tag{13}$$

où u représente la quantité $u = 4\Delta^2 + \gamma_A^2$.
On cherche à préciser la forme de la fonction de transmission $T_C^{avec}(\Delta)$, et en particulier la position, la largeur et la hauteur des pics de transmission. On repère ces pics par leur décalage en fréquence $\Delta_\pm$ ou par la quantité $u_\pm = 4\Delta_\pm^2 + \gamma_A^2$.
   (a) Rechercher les extrema de $T_C^{avec}(\Delta)$. Montrer que $T_C(\Delta)$ possède deux pics symétriques par rapport à $\Delta = 0$; on notera dorénavant la position de ces pics $\Delta_\pm = \pm\Omega/2$. Vérifier que ces pics sont légèrement décalés par rapport aux zéros de la fonction désaccord de phase $\varepsilon(\omega)$, déterminés à la question 57.
   (b) On suppose pour toute la suite que $\beta >> \gamma_A$ et $\beta >> \gamma_C$. Montrer que Ω peut s'écrire de manière approchée : $\Omega \sim \sqrt{\beta^2 + \gamma_A\gamma_C}$
   (c) Calculer alors la hauteur des pics de transmission en $\Delta = \pm\Omega/2$, en fonction de T_C^{max}, γ_A et γ_C.
   (d) Montrer que ces pics ont une forme lorentzienne. On posera $\Delta = \pm\Omega/2 + \eta$ avec $|\eta| << \Omega/2$
   (e) Déterminer la largeur totale à mi-hauteur des pics de transmission γ_{AC}, en fonction de γ_A et γ_C.

63. Dans l'expérience représentée sur la figure 2, un jet d'atomes de Baryum traverse une cavité optique résonnante avec une transition du Baryum. Cette fréquence de résonance est $\omega_0/(2\pi) = 5,4.10^{14}$ Hz. La largeur de la transition atomique est connue et vaut

$\gamma_A/(2\pi) = 20$ MHz. L'absorbance $\alpha_0 L$ vaut $\alpha_0 L = 0{,}2$ et la finesse de la cavité est $F = 500$.

(a) Déduire de la figure 4.a) la largeur du mode de cavité $\gamma_C/(2\pi)$.

(b) En présence du jet atomique le pic de transmission se dédouble. Vérifier que les caractéristiques des deux pics de transmission obtenus sur la figure 4.b) sont compatibles avec les prédictions du modèle précédent : distance $\Omega/(2\pi)$ entre les pics de transmission de la cavité, largeur des pics de transmission $\gamma_{AC}/(2\pi)$, hauteur des pics de transmission.

3.3 Evolution temporelle de l'intensité en sortie de cavité

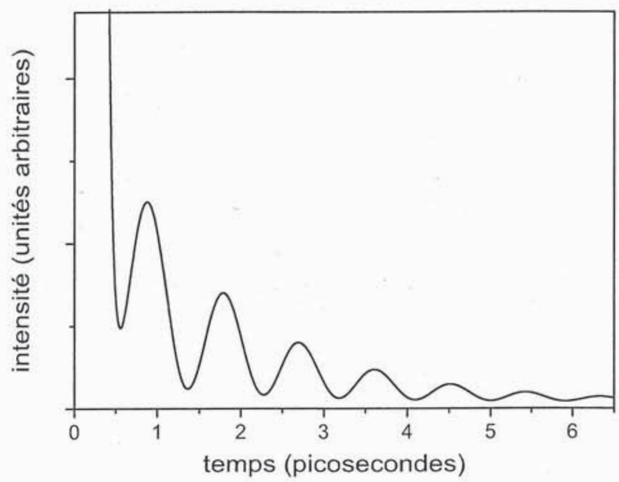

FIG. 5 – Evolution temporelle de l'impulsion transmise par la cavité. La courbe représente l'intensité détectée en fonction du temps en sortie de la cavité après excitation par une impulsion lumineuse.

On suppose maintenant que l'on a excité à $t \sim 0$ la cavité avec une impulsion laser de pulsation moyenne ω_0 et de durée Δt. Le champ électrique de cette impulsion (dans le plan $z = 0^-$ juste avant le miroir M_1) est de la forme $E_{1e}(t) = A_{1e}(t)\exp(-j\omega_0 t)$. L'enveloppe $A_{1e}(t)$ est non nulle sur un intervalle de largeur Δt. L'onde en sortie de cavité peut s'écrire (dans le plan $z = L^+$ juste après le miroir M_2) sous la forme $E_{2s}(t) = A_{2s}(t)\exp(-j\omega_0 t)$. On cherche à déterminer l'allure de l'enveloppe $|A_{2s}(t)|$.

Dans la description classique faite ici, le système cavité-matière est linéaire ; sa réponse temporelle est donc liée à sa réponse en fréquence par une transformation de Fourier. On décompose donc chaque champ sous la forme

$$E_{1e}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_e(\omega)\exp(-j\omega t)d\omega$$

$$E_{2s}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_s(\omega)\exp(-j\omega t)d\omega$$

Pour chaque pulsation , on peut écrire

$$\hat{E}_s(\omega) = t_C(\omega)\hat{E}_e(\omega) \quad \text{où} \quad t_C(\omega) = \sqrt{T_C(\omega)}\exp[j\varphi(\omega)]$$

est le coefficient de transmission en amplitude de la cavité, de module $\sqrt{T_C(\omega)}$ et de phase $\varphi(\omega)$. Pour la suite on supposera que cette phase $\varphi(\omega)$ varie peu sur un intervalle de quelques Ω autour de ω_0 ; on négligera donc l'influence du terme $\exp[j\varphi(\omega)]$ dans ce qui suit.

64. L'impulsion doit être suffisamment brève pour que sa largeur spectrale soit nettement supérieure à Ω. Quelle condition doit vérifier la durée Δt de cette impulsion d'excitation ?

65. Sachant que le facteur de transmission en amplitude de la cavité $t_C(\omega)$ est constitué de deux "pics" centrés en $\omega_0 \pm \Omega/2$ et de largeurs $\sim \gamma_{AC}$, donner l'allure de l'enveloppe $A_{2s(t)}$.

66. Commenter l'allure obtenue en rapport avec les résultats obtenus à la question 26.

67. Décrire qualitativement l'évolution temporelle de l'intensité $I_s(t)$ de l'impulsion détectée en sortie de cavité. Montrer que $I_s(t)$ se caractérise par une oscillation de (pseudo)-période T_{osc}, pendant une durée caractéristique τ. On précisera le lien entre ces temps caractéristiques et les quantités Ω et γ_{AC}.

68. La figure 5 représente l'allure typique du signal enregistrée dans le domaine visible ($\omega_0/(2\pi) = 3,6\ 10^{14}$ Hz) pour une hétérostructure semiconductrice GaAs/GaAlAs. En 4,5 ps, on observe 5 oscillations et une décroissance globale d'un facteur 20 du signal (cf. Fig. 5). Donner l'ordre de grandeur de la durée caractéristique τ et de la période T_{osc} des oscillations. En déduire, dans le domaine fréquentiel, les valeurs de l'écart entre les deux pics $\Omega/(2\pi)$ et de la largeur des pics $\gamma_{AC}/(2\pi)$.

69. La longueur optique effective de la cavité est de quelques micromètres. Traduire numériquement les deux conditions imposées sur la durée Δt de l'impulsion d'excitation (questions 37 et 64). Ces conditions sont elles compatibles ?

Troisième partie
Couplage entre états quantiques

Dans cette partie on aborde le traitement quantique du couplage des deux oscillateurs. On présente d'abord le cas le plus simple du couplage de deux états discrets de durée de vie infinie. On envisage cette situation dans le cas d'un mode électromagnétique discret de la cavité et d'un système à deux niveaux présent dans la cavité.

On considère ensuite le cas du couplage d'un état discret à un continuum. Il s'agit par exemple du mode électromagnétique discret de la cavité, faiblement couplé au continuum des modes électromagnétiques extérieurs à la cavité. On cherche à montrer que ce couplage se traduit par un temps de vie fini pour le mode de cavité.

On présente enfin un modèle permettant un passage progressif entre ces deux situations limites. Cette situation permettra de décrire le couplage entre un niveau atomique discret et un mode de la cavité de largeur finie.

1 Couplage entre deux états discrets

On considère un système atomique présentant deux niveaux, un niveau fondamental $|g\rangle$ et un niveau excité $|e\rangle$ d'énergie $\hbar\omega_0$ par rapport au fondamental, placé dans une cavité optique présentant un mode électromagnétique résonnant avec la transition $e-g$. On considère uniquement deux états possibles pour la cavité : l'état $|0\rangle$ sans photon et l'état $|1\rangle$ à un photon dans la cavité. Le système composite atome-photon, d'hamiltonien H_0, a donc deux états excités de même énergie, $|e,0\rangle$ (atome dans son état excité, pas de photon) et $|g,1\rangle$ (atome dans son état fondamental, un photon), au dessus de l'état fondamental $|g,0\rangle$, comme indiqué sur la figure 6.

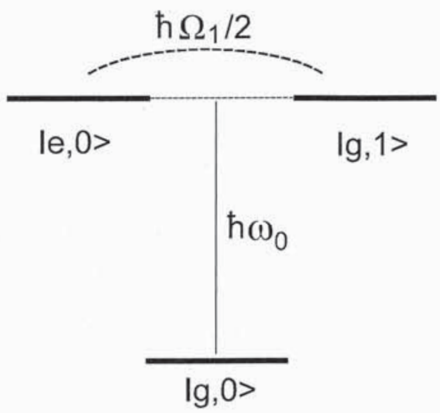

FIG. 6 – Diagramme d'énergie du système atome-champ

Le système atomique peut absorber un photon de la cavité ou en émettre un. L'interaction dipolaire électrique fait apparaître un terme de couplage hors-diagonal de la forme $H_1 = -d.E_0$, où d est l'élément de matrice du dipôle et $E_0 = \sqrt{\hbar\omega_0/(2\epsilon_0 V)}$ est le "champ électrique par photon", V étant le "volume" du mode. On admet que le couplage lumière-matière entre ces deux états ne comporte que ces termes hors-diagonaux, qu'on supposera réels positifs :

$$\langle g,1|H_1|e,0\rangle = \langle e,0|H_1|g,1\rangle = \frac{\hbar\Omega_1}{2} > 0$$

L'hamiltonien $H_0 + H_1$ est donc représenté dans le sous-espace $|e,0\rangle, |g,1\rangle$ par la matrice :

$$\hbar \begin{pmatrix} \omega_0 & \Omega_1/2 \\ \Omega_1/2 & \omega_0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

70. Donner l'expression des énergies $\hbar\omega_\pm$ des états perturbés.
71. Donner l'expression des états propres normalisés $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$ en fonction de $|e,0\rangle$ et $|g,1\rangle$.
72. On prépare initialement le système dans l'état $|\psi(0)\rangle = |e,0\rangle$ à $t = 0$. Soit $|\psi(t)\rangle$ l'état du système, normalisé, à l'instant t. Donner l'expression de $|\psi(t)\rangle$ en fonction de $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$, puis en fonction de $|e,0\rangle$ et $|g,1\rangle$.
73. En déduire la probabilité $P_C(t)$ de trouver le système dans l'état initial $|e,0\rangle$. Donner l'expression de la pulsation de Rabi qui caractérise l'oscillation observée.
74. Dans le cas des expériences réalisées avec un jet atomique, chaque atome passe un temps fini dans la cavité. Le couplage ne s'applique donc que de $t = 0$ à $t = t_1$, pendant que l'atome traverse la cavité. À l'instant $t = 0$ l'atome est dans son état excité $|e\rangle$, et la cavité ne contient pas de photon.
    (a) A quelle condition sur le produit $\Omega_1 t_1$ retrouve-t-on en sortie de cavité l'atome dans son état fondamental, avec un photon dans la cavité ?
    (b) Décrire l'état final du système atome-cavité dans le cas $\Omega_1 t_1 = \pi/2$. En quoi cet état échappe-t-il à toute description classique ?
75. Faire un lien entre les états stationnaires $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$ du hamiltonien H_0+H_1 et l'allure du spectre de transmission de la cavité optique étudiée dans la deuxième partie du problème.

2 Couplage d'un état discret à un continuum large

On considère un système d'hamiltonien H_0. Ce système comporte un état discret $|i\rangle$ d'énergie $\hbar\omega_i$ et un quasi-continuum d'états $|k\rangle$ d'énergie $\hbar\omega_k = \hbar\omega_i + k\varepsilon$, avec k entier variant de $-\infty$ à $+\infty$ (voir Fig. 7). L'écart énergétique ε entre deux niveaux d'énergie consécutifs est très petit. Ces états, très serrés et équidistants en énergie peuvent être assimilés à un continuum de densité d'états en énergie constante $\rho(\hbar\omega) = \rho_0 = 1/\varepsilon$.

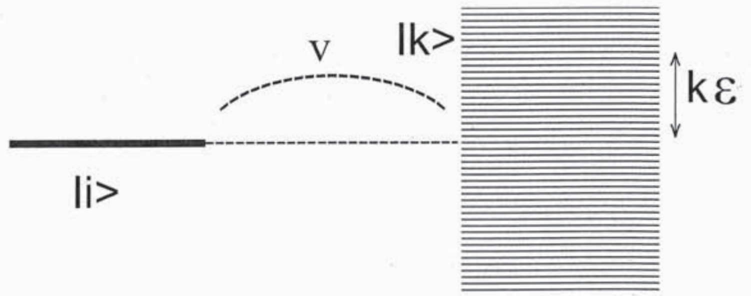

FIG. 7 – Diagramme d'énergie du système état discret - continuum large

On considère une faible perturbation H_1 couplant l'état discret et le quasi-continuum, possédant les propriétés suivantes :

$$\langle k|H_1|i\rangle = v \quad \langle i|H_1|k\rangle = v^* \quad \langle i|H_1|i\rangle = 0 \quad \langle k|H_1|k\rangle = 0$$

Le vecteur d'état du système à l'instant t s'écrit :

$$|\Psi(t)\rangle = c_i(t)e^{-j\omega_i t}\,|i\rangle + \sum_k c_k(t)e^{-j\omega_k t}\,|k\rangle$$

76. Rappeler la forme générale de l'équation de Schrödinger reliant $|\Psi(t)\rangle$ et l'hamiltonien $H_0 + H_1$.
77. Appliquer cette relation pour obtenir deux équations différentielles, l'une reliant dc_i/dt à une somme portant sur les coefficients $c_k(t)$, l'autre reliant dc_k/dt à $c_i(t)$.
78. Exprimer $\frac{dc_i}{dt}$ sous la forme d'une intégrale. On utilisera pour cela la relation de passage de la somme discrète à l'intégrale :

$$\sum_k f_k = \int f_k \rho_0 \; d(\hbar\omega_k)$$

79. Le système est préparé dans l'état $|i\rangle$ à l'instant $t = 0$. On a donc comme conditions initiales : $c_i(0) = 1$ et $c_k(0) = 0$.
    (a) Exprimer $c_k(t)$ sous la forme d'une intégrale.
    (b) En déduire l'expression de dc_i/dt sous la forme d'une double intégrale.
80. Simplifier cette équation intégro-différentielle en intégrant d'abord en pulsation, en utilisant l'identité mathématique (1), puis en intégrant en temps, en utilisant l'identité mathématique (2).
81. Montrer que l'amplitude de probabilité $c_i(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = -\frac{\Gamma}{2} c_i(t)$$

    Exprimer Γ en fonction de v, $\hbar$ et ρ_0.
82. Donner la forme de l'évolution temporelle de l'amplitude de probabilité $c_i(t)$ puis de la probabilité $P(t)$ de trouver le système dans l'état $|i\rangle$ à l'instant t.
83. Quelle est la durée de vie du système préparé dans l'état $|i\rangle$?
84. On se limite dans cette question aux temps courts $t \ll 1/\Gamma$. On note p la probabilité de transition par unité de temps de l'état discret vers le continuum. Montrer que, pour $t \ll 1/\Gamma$, la probabilité de transition par unité de temps p vaut Γ. En déduire qu'on retrouve bien la règle d'or de Fermi, qui s'écrit pour ce continuum non-dégénéré :

$$p = \frac{2\pi}{\hbar} |v|^2 \rho(\hbar\omega = \hbar\omega_i)$$

85. Montrer que l'amplitude de probabilité $c_k(t)$ s'écrit :

$$c_k(t) = \frac{v}{\hbar} \frac{1 - e^{-\Gamma t/2} e^{j(\omega_k - \omega_i)t}}{\omega_k - \omega_i + j\Gamma/2} \tag{15}$$

86. On se place à $t \gg 1/\Gamma$. Calculer la probabilité dP de trouver le système dans un état du continuum d'énergie $\hbar\omega_k$ à $d(\hbar\omega_k)$ près à l'instant t. Justifier la forme spectrale de la raie d'émission d'un atome à deux niveaux au repos. Préciser la valeur de la largeur de la raie.

3 Transition couplage faible - couplage fort

Pour faire un lien entre les deux situations de couplage : entre deux états discrets (couplage fort) ou entre un état discret et un continuum large (couplage faible) on envisage dans cette dernière partie le couplage entre un état discret et un continuum de largeur finie (voir Fig. 8). On suppose que le continuum a une densité d'états en énergie de forme lorentzienne, avec une largeur totale à mi-hauteur $\hbar\gamma$.

$$\rho(\hbar\omega) = \rho_0 \frac{\gamma^2}{4(\omega - \omega_i)^2 + \gamma^2}$$

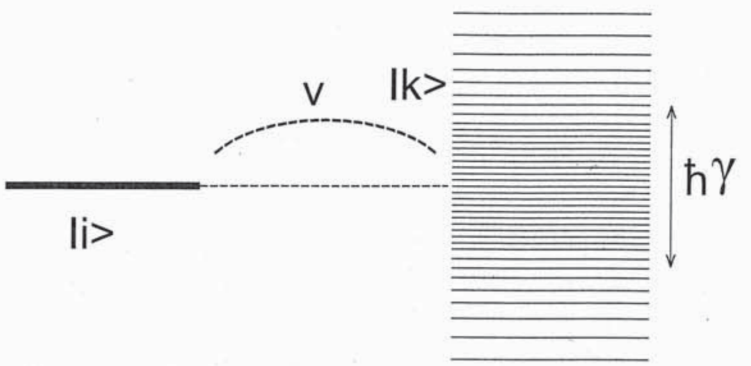

FIG. 8 – Diagramme d'énergie du système niveau discret - continuum de largeur $\hbar\gamma$

87. En adaptant le résultat obtenu à la question 79b, donner la nouvelle équation intégro-différentielle vérifiée par $c_i(t)$.
88. Simplifier cette relation en utilisant la relation (3) du formulaire.
89. Dériver l'équation obtenue par rapport au temps. Montrer que l'évolution de $c_i(t)$ est régie par l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2c_i(t)}{dt^2} + \frac{\gamma}{2}\frac{dc_i(t)}{dt} + \frac{\Gamma\gamma}{4}c_i(t) = 0$$

90. On prend comme conditions initiales : $c_i(0) = 1$ et $c_k(0) = 0$. Montrer que $\frac{dc_i}{dt}(t = 0) = 0$.
91. Cas du couplage faible : $\Gamma < \gamma/4$.
    (a) Donner la forme des solutions dans le cas où $\Gamma < \gamma/4$.
    (b) Montrer que pour $\Gamma << \gamma/4$ (continuum large), on retrouve aux temps longs la loi de décroissance exponentielle, avec une durée de vie du système préparé dans l'état $|i\rangle$ égale à $1/\Gamma$.
92. Cas du couplage fort : $\Gamma > \gamma/4$.
    (a) Donner la forme des solutions dans le cas où $\Gamma > \gamma/4$.
    (b) On considère dans les questions qui suivent le cas $\Gamma >> \gamma/4$ (continuum étroit). Donner l'expression de l'amplitude de probabilité $c_i(t)$ à l'ordre le plus bas.
    (c) Donner de même l'expression de la probabilité $P(t)$ de trouver le système dans l'état $|i\rangle$ à l'instant t.
    (d) Exprimer, en fonction de Γ et γ, la pulsation Ω des oscillations obtenues pour $P(t)$, et le coefficient d'amortissement de ces oscillations. On pourra vérifier que la condition de couplage fort énoncée ici $\Gamma >> \gamma/4$ se réécrit $\Omega >> (\gamma - 0)/2$, condition analogue à celle envisagée dans la première partie.
    (e) Montrer que la pulsation Ω des oscillations est de la forme :

    $$\Omega = \frac{2|v|}{\hbar}\sqrt{N}$$

    Que représente le nombre N ? Comparer la pulsation obtenue avec celle qu'on aurait dans le cas d'un couplage de l'état $|i\rangle$ à un état unique.
93. Le continuum de densité d'état $\rho(\hbar\omega)$ (de largeur $\hbar\gamma$) représente la densité spectrale du mode à 1 photon de la cavité. Cet élargissement est dû à la durée de vie finie du mode de cavité (égale à $1/\gamma$). L'état discret représente l'état excité atomique, de durée de vie beaucoup plus longue que celle du photon.

(a) L'obtention de sources de photons uniques de taux de répétition élevé nécessite de réduire fortement le temps de vie radiatif du système atomique. Montrer que, en régime de couplage faible, le couplage du système atomique avec la cavité permet de réduire fortement ce temps de vie radiatif.

(b) Dans le régime de couplage fort, préciser de quelle manière la largeur des pics de transmission est modifiée. Discuter l'origine physique de ce phénomène.

IMPRIMERIE NATIONALE – 9 642 – D'après documents fournis