



SESSION 2009

**CONCOURS EXTERNE
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES
Option A : PHYSIQUE**

PROBLÈME DE PHYSIQUE

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

Couplage fort de deux oscillateurs

En plaçant de la matière dans une cavité optique, on peut obtenir un système composite cavité-matière aux propriétés nouvelles, si la matière peut être excitée à une pulsation égale à une pulsation de résonance de la cavité, et si ces deux résonances ont des coefficients d'amortissement faibles devant le coefficient de couplage entre ces systèmes. Un tel phénomène de *couplage fort* a été mis en évidence pour des atomes en cavité au début des années 1980, puis dans des hétérostructures de matériaux semi-conducteurs au début des années 1990.

Le problème comporte trois parties très largement indépendantes.

La première partie donne une description purement classique de deux oscillateurs harmoniques, de même pulsation de résonance ω_0 , et couplés linéairement ; le coefficient de couplage, homogène à une pulsation, est noté Ω_1 . Ces oscillateurs sont faiblement amortis : on caractérise chaque oscillateur par son coefficient d'amortissement γ_1 ou γ_2 , également homogène à une pulsation. On considère dans tout le problème que Ω_1 , γ_1 et γ_2 sont *très petits* devant la pulsation de résonance ω_0 . L'objet du problème est d'étudier comment la dynamique du système est modifiée suivant l'importance relative des effets de couplage (Ω_1) et d'amortissement (γ_1 et γ_2) : on distingue ainsi un régime de *couplage fort* et un régime de *couplage faible*.

On considère dans les deux parties suivantes deux oscillateurs de natures physiques différentes : un mode du champ électromagnétique dans une cavité, et une résonance du milieu matériel présent dans la cavité. On décrit dans la deuxième partie le couplage lumière-matière dans le cadre de l'optique classique, en examinant comment les propriétés de dispersion et d'absorption du milieu modifient la fonction de transmission de la cavité optique.

La troisième partie propose une description quantique du système le plus simple : un seul atome, assimilé à un système à deux niveaux, couplé à un mode discret du champ électromagnétique de la cavité, contenant 0 ou 1 photon.

Pour alléger les calculs, on se place dans tout le problème dans le cas résonnant : les deux oscillateurs ont exactement la même fréquence de résonance, notée ω_0 . Les coefficients d'amortissement sont définis par rapport à l'énergie. Si on considère une excitation harmonique de pulsation ω , on notera Δ le décalage en pulsation $\Delta = \omega - \omega_0$.

Relations mathématiques utiles :

"Fonction" δ de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\omega t) d\omega = 2\pi\delta(t) \tag{1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad \text{si } t_0 \in [t_1, t_2]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t - t_0)dt = 0 \quad \text{si } t_0 \notin [t_1, t_2]$$

On admettra que dans le cadre des calculs demandés dans ce problème, on peut écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t - t_0)dt = \frac{f(t_0)}{2} \quad \text{si } t_0 = t_1 \text{ ou } t_0 = t_2 \tag{2}$$

Transformée de Fourier d'une lorentzienne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{a})^2} \exp(-j\omega t) d\omega = \pi a \exp(-a|t|) \quad (a > 0) \tag{3}$$

Conventions d'écriture :

On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$. Les candidats pourront, à leur convenance, noter les grandeurs complexes \tilde{A} ou \underline{A} . On note $\Re[\]$ la partie réelle et $\Im[\]$ la partie imaginaire de la quantité entre crochets.

Notations utilisées dans le problème :

Constantes fondamentales :

e charge élémentaire	$e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C
m masse de l'électron	$m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
c vitesse de la lumière dans le vide	$c = 2,99 \cdot 10^8$ m.s ⁻¹
ϵ_0 permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F.m ⁻¹
\hbar constante de Planck réduite	$\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J.s

Première partie :

- L inductance
- Ω_1 coefficient de couplage
- γ_1 et γ_2 coefficient d'amortissement du circuit résonnant 1 ou 2
- $\tilde{\omega}$ pulsation complexe
- ω_+ et ω_- pseudopulsations des modes propres

γ_+ et γ_- coefficients d'amortissement des modes propres
 Δ_+ et Δ_- décalages des pics de résonance des circuits couplés par rapport à ω_0

Deuxième partie :

L longueur de la cavité
 n_B indice constant du milieu sans oscillateurs
 r et t coefficients de réflexion et de transmission en amplitude d'un miroir
 R et T coefficients de réflexion et de transmission en énergie d'un miroir
 $T_C^{sans}(\omega)$ transmission de la cavité sans oscillateurs
 T_C^{max} transmission maximale de la cavité sans oscillateurs
 Δ_{ISL} intervalle en pulsation entre deux résonances consécutives de la cavité seule
 $\varepsilon(\omega)$ désaccord de phase
 γ_C largeur à mi-hauteur des pics de transmission de la cavité seule
 F Finesse de la cavité Fabry-Perot
 τ temps d'un aller-retour de la lumière dans la cavité
 γ coefficient d'amortissement de l'énergie du mode de la cavité seule
 $\tilde{\epsilon}_r$ permittivité diélectrique relative
 $\epsilon_{rB} = n_B^2$
 $\tilde{\chi}(\omega)$ susceptibilité diélectrique des oscillateurs de Lorentz
 ω_0 pulsation de résonance des oscillateurs de Lorentz
 γ_A coefficient d'amortissement des oscillateurs de Lorentz
 N nombre d'oscillateurs de Lorentz par unité de volume
 ω_p pulsation plasma
 ϵ_0 permittivité diélectrique du vide
 $\alpha(\omega)$ coefficient d'absorption des oscillateurs de Lorentz
 $n(\omega)$ indice du milieu contenant les oscillateurs de Lorentz
 $\alpha_0 = \alpha(\omega = \omega_0)$
 β paramètre de couplage
 $T_C^{avec}(\omega)$ transmission de la cavité contenant les oscillateurs de Lorentz
 Δ_+ et Δ_- décalages des pics de transmission de la cavité contenant les oscillateurs de Lorentz par rapport à ω_0
 $\Omega = \Delta_+ - \Delta_-$, écart entre ces deux pics de transmission
 γ_{AC} largeur à mi-hauteur des pics de transmission de la cavité contenant les oscillateurs
 $t_C(\omega)$ coefficient de transmission en amplitude de la cavité

Troisième partie :

$v = \hbar\Omega_1/2$: énergie de couplage entre deux états quantiques
 ρ_0 densité d'états (uniforme) en énergie
 $\delta(t)$ distribution de Dirac
 Γ probabilité de transition par unité de temps de l'état discret vers le continuum donnée par la règle d'or de Fermi
 $\hbar\gamma$ largeur à mi-hauteur de la densité d'états en énergie $\rho(\hbar\omega)$

Première partie

Circuits électriques couplés

1 Equations différentielles couplées

On considère deux circuits RLC série représentés sur la Figure 1, couplés par une mutuelle inductance M . Afin d'alléger les calculs, on considère que les circuits 1 et 2 comportent des capacités C égales, des inductances L égales, mais des résistances R_1 et R_2 en général différentes. On note $e(t)$ la tension d'excitation éventuellement imposée en série au circuit 1 et $u(t)$ la tension de sortie aux bornes de la résistance R_2 du circuit 2. On note $i_1(t)$ et $i_2(t)$ les courants parcourant les deux circuits, les orientations étant précisées sur la Fig. 1. On suppose que le sens des enroulements est tel que $M > 0$.

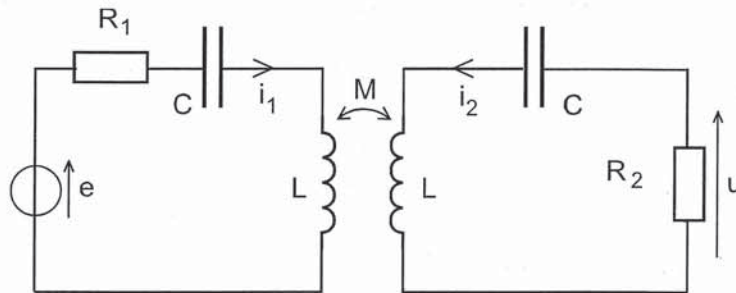


FIG. 1 – Deux circuits RLC couplés par mutuelle induction

1. Établir le système d'équations différentielles reliant $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $e(t)$.
2. Montrer que ces relations peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 i_1 / dt^2 \\ d^2 i_2 / dt^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di_1 / dt \\ di_2 / dt \end{pmatrix} + 1/C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} de/dt \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

3. Les trois matrices caractérisent respectivement le terme inductif, le terme dissipatif et le terme capacitif.
 - (a) À quelle condition sur ces trois matrices peut-on définir des variables qui permettent de découpler les équations (4) ?
 - (b) Cela est-il toujours possible ?
4. On suppose, dans cette question uniquement, que $R_1 = R_2 = R$.
 - (a) En examinant la symétrie des équations différentielles couplées liant $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $e(t)$, montrer qu'il existe, dans ce cas particulier où les résistances sont égales, deux combinaisons linéaires simples de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ qui permettent d'obtenir des équations différentielles découplées.
 - (b) Expliquer en quoi ces combinaisons définissent des *modes propres* du système couplé.

2 Analyse du régime harmonique forcé

On suppose que la tension excitatrice est de la forme $e(t) = \Re[\tilde{E} \exp(j\omega t)]$. On cherche les courants sous la forme : $i_1(t) = \Re[\tilde{I}_1 \exp(j\omega t)]$; $i_2(t) = \Re[\tilde{I}_2 \exp(j\omega t)]$. $\tilde{I}_1 = I_{10} \exp(j\varphi_1)$ et $\tilde{I}_2 = I_{20} \exp(j\varphi_2)$ sont les amplitudes complexes des courants.

L'excitation $e(t)$ est appliquée au niveau du circuit 1. On s'intéresse à la réponse au niveau du circuit 2, qui est de la forme $u(t) = \Re[\tilde{U} \exp(j\omega t)]$. On définit donc la fonction de transfert du montage par $\tilde{H}(\omega) = \tilde{U} / \tilde{E}$.

2.1 Comportement au voisinage de la résonance

5. Montrer que les amplitudes complexes des courants vérifient une équation matricielle de la forme :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - j\omega\gamma_1 - \omega_0^2 & \omega^2\Omega_1/\omega_0 \\ \omega^2\Omega_1/\omega_0 & \omega^2 - j\omega\gamma_2 - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} = -\frac{j\omega}{L} \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exprimer les coefficients γ_1 , γ_2 , ω_0 et Ω_1 en fonction des données du problème. On remarquera que le coefficient de couplage Ω_1 est bien positif avec les conventions d'orientation des circuits choisies.

6. On s'intéresse à des pulsations au voisinage de ω_0 . On note $\Delta = \omega - \omega_0$ le décalage entre la pulsation ω et la pulsation ω_0 . En utilisant l'hypothèse $|\Delta/\omega_0| \ll 1$, montrer que l'équation matricielle prend la forme simplifiée suivante :

$$\begin{pmatrix} 2\Delta - j\gamma_1 & \Omega_1 \\ \Omega_1 & 2\Delta - j\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} = -\frac{j}{L} \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

2.2 Fonction de transfert

7. En partant de la relation matricielle (5), établir l'expression de la fonction de transfert $\tilde{H}(\omega)$ au voisinage de ω_0 .
8. Exprimer le module de cette fonction de transfert $|\tilde{H}(\Delta)|$ en fonction de Ω_1 , γ_1 et γ_2 .
9. (a) En déduire l'expression de $|\tilde{H}(\Delta = 0)|$, le module de la fonction de transfert en $\Delta = 0$.
- (b) Montrer que $|\tilde{H}(\Delta = 0, \Omega_1)|$ est une fonction croissante puis décroissante de Ω_1 . On notera Ω_{c2} la valeur de Ω_1 pour laquelle $|\tilde{H}(\Delta = 0, \Omega_1)|$ est maximale. Exprimer Ω_{c2} en fonction de γ_1 et γ_2 .
- (c) Calculer $|\tilde{H}(\Delta = 0, \Omega_1 = \Omega_{c2})|$.
10. Rechercher les extrema de $|\tilde{H}(\Delta)|$. Montrer que pour un couplage supérieur à un couplage Ω_{c3} , le module de la fonction de transfert possède deux maxima en Δ_+ et Δ_- . Exprimer Ω_{c3} en fonction de γ_1 et γ_2 . Exprimer Δ_+ et Δ_- en fonction de Ω_1 et Ω_{c3} .
11. Représenter sur un même graphique l'allure du module de la fonction de transfert $|\tilde{H}(\Delta)|$ pour différentes valeurs du couplage : $\Omega_1 < \Omega_{c2}$; $\Omega_{c2} < \Omega_1 < \Omega_{c3}$; $\Omega_1 > \Omega_{c3}$.
12. On se place dans le cas où le couplage Ω_1 est grand devant Ω_{c3} ($\Omega_1 \gg \Omega_{c3}$).
- (a) Montrer que la hauteur des pics de la fonction de transfert $|\tilde{H}(\Delta)|$ est alors constante et ne dépend que de γ_1 et γ_2 .
- (b) Donner la largeur à -3 dB des pics de $|\tilde{H}(\Delta)|$ en fonction de γ_1 et γ_2 .
- (c) En déduire que la puissance relative reçue en sortie $P(\omega)/P(\omega_0) = |\tilde{H}(\omega)/\tilde{H}(\omega_0)|^2$ présente également deux pics de résonance dont on précisera la hauteur et la largeur à mi-hauteur.

2.3 Filtres à résonateurs couplés

Les exigences de miniaturisation et d'économie énergétique des téléphones mobiles nécessitent le remplacement de certains composants discrets par des homologues intégrés sur silicium. Des résonateurs micro-mécaniques sont ainsi développés pour la réalisation de filtres passe-bande de fréquences intermédiaires (entre celles du signal hyperfréquence reçu et celles

du domaine audible). Pour réaliser un filtre d'ordre supérieur à deux, l'approche courante est de coupler deux résonateurs. On cherche à obtenir la bande passante la plus plate possible, c'est à dire avec une variation de transmission aussi faible que possible au voisinage de la résonance. Ce filtre étant l'analogie du circuit électrique couplé présenté ci-dessus, les résultats obtenus sur la fonction de transfert sont directement utilisables.

13. Montrer que pour obtenir la bande passante la plus plate possible, il faut choisir $\Omega_1 = \Omega_{c3}$.
14. On a vu précédemment que le facteur de transfert à la résonance est maximal pour $\Omega_1 = \Omega_{c2}$. En déduire que ces deux conditions sont simultanément satisfaites si les deux résonateurs ont le même coefficient d'amortissement γ .
15. Dans ces conditions optimales, quel est le lien entre ce coefficient de couplage Ω_1 et le coefficient d'amortissement γ ?
16. Donner la valeur de la bande passante à -3 dB du filtre ainsi optimisé.
17. Application numérique : On veut obtenir une bande passante en fréquence à -3 dB de 140 kHz centrée à $\omega_0/(2\pi) = 100$ MHz. Quelles valeurs faut-il choisir pour $\gamma/(2\pi)$ et $\Omega_1/(2\pi)$?

3 Analyse en régime libre

3.1 Recherche des modes propres approchés

On suppose ici que $e(t) = 0$ pour $t > 0$. On cherche une solution particulière pour $t > 0$ sous la forme $i_1(t) = \Re[\tilde{I}_1 \exp(j\tilde{\omega}t)]$; $i_2(t) = \Re[\tilde{I}_2 \exp(j\tilde{\omega}t)]$. Les quantités $\tilde{I}_1 = I_{10} \exp(j\varphi_1)$ et $\tilde{I}_2 = I_{20} \exp(j\varphi_2)$ sont les amplitudes complexes des courants. $\tilde{\omega}$ est une pulsation complexe qu'on écrira sous la forme

$$\tilde{\omega} = \omega + j\frac{\gamma}{2}$$

18. Préciser la signification physique et le signe de $\omega = \Re[\tilde{\omega}]$ et de $\gamma = 2\Im[\tilde{\omega}]$.
19. Montrer que $\tilde{\Delta} = \tilde{\omega} - \omega_0$ vérifie l'équation algébrique :

$$4\tilde{\Delta}^2 - 2j(\gamma_1 + \gamma_2)\tilde{\Delta} - \gamma_1\gamma_2 - \Omega_1^2 = 0 \quad (6)$$

20. En déduire l'expression des pulsations complexes $\tilde{\omega}_+$ et $\tilde{\omega}_-$ caractérisant les deux modes propres, dans chacun des cas suivants :
 - (a) Couplage faible : $\Omega_1 < \Omega_{c1} = |\gamma_1 - \gamma_2|/2$. Montrer que les deux pulsations propres ω_{\pm} sont égales, mais que les coefficients d'amortissement γ_{\pm} sont différents.
 - (b) Couplage fort : $\Omega_1 > \Omega_{c1} = |\gamma_1 - \gamma_2|/2$. Montrer que les deux pulsations propres ω_{\pm} sont différentes, mais que les coefficients d'amortissement γ_{\pm} sont identiques. On notera γ leur valeur commune. On notera $\tilde{\omega}_+$ la pulsation complexe dont la partie réelle est la plus grande.
21. Représenter sur un graphique les pulsations ω_{\pm} des modes approchés en fonction de la valeur du coefficient de couplage Ω_1 .
22. Représenter de même les variations des coefficients d'amortissement γ_{\pm} de ces modes approchés en fonction de Ω_1 .

3.2 Evolution temporelle en couplage fort

23. On considère le cas $\Omega_1 \gg |\gamma_1 - \gamma_2|/2$. En déduire une expression simplifiée des pseudo-pulsations ω_+ et ω_- . On utilisera ces expressions dans les questions qui suivent.
24. Donner, dans le cadre de l'approximation faite à la question précédente, l'expression générale de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ lorsque les courants oscillent à la pulsation ω_+ . Montrer que ces deux courants sont dans une relation d'amplitude et de phase bien précise qu'on explicitera. Même question lorsque les courants oscillent à la pulsation ω_- . Que se passe-t-il si initialement un seul de ces modes propres est excité ?
25. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ on a $i_1(0) = i_0$, $i_2(0) = 0$, $\frac{di_1}{dt}(0) = 0$, $\frac{di_2}{dt}(0) = 0$. Donner l'expression de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction des paramètres i_0 , γ , ω_0 et Ω_1 .
26. Représenter qualitativement l'évolution de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sur un même graphique.
27. Interpréter cette évolution en terme de modes propres.
 - (a) Au bout de combien de temps l'énergie est-elle entièrement passée du circuit 1 au circuit 2 ?
 - (b) Au bout de combien de temps est-elle entièrement revenue au circuit 1 ?

3.3 Préparation du système dans un état déterminé

On suppose qu'on puisse faire varier la valeur de la mutuelle inductance de couplage d'une valeur nulle à la valeur M puis à nouveau à une valeur nulle. À partir d'une situation de couplage nul, on est ainsi capable de "brancher" le couplage Ω_1 pendant une durée déterminée, puis de revenir dans une situation de couplage nul.

28. On suppose qu'au départ seul le circuit 1 oscille. Quelle durée minimale de couplage faut-il choisir pour obtenir, après retour à la situation de couplage nul :
 - (a) un transfert de toute l'énergie du circuit 1 au circuit 2 ?
 - (b) des oscillations d'amplitudes égales dans les deux circuits 1 et 2 ?