



SESSION 2009

**CONCOURS EXTERNE
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES
Option C : PHYSIQUE APPLIQUÉE**

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Le renouveau de l'optique

Ce problème comporte trois parties indépendantes. Chaque partie peut comporter des paragraphes indépendants. Toutes les unités devront être données dans le système international.

Données :

- Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-12} \text{ H.m}^{-1}$
- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Les phénomènes d'interférences et de diffraction sont connus depuis le XIX siècle. Dans les salles de TP, nous utilisons couramment lasers, diodes lasers, spectrophotomètres non pas comme objets d'étude mais comme sources et appareil de mesure.

On assiste à un renouveau de l'optique. Des applications nouvelles ont vu le jour grâce à des progrès "techniques" tels que l'interférométrie des tavelures et l'optique adaptative pour l'interférométrie optique.

La maîtrise des lasers a permis d'augmenter leur intensité et d'obtenir des effets non linéaires riches en applications (doublage de fréquence par exemple) ; cette maîtrise a rendu possible le piégeage de petits objets (pinces optiques dans le domaine de la biophysique) et le développement des communications optiques (transmettre plus d'information, plus rapidement et sur de plus longues distances).

Première partie : Interférométrie optique. Du télescope classique au VLT

Utilisée depuis longtemps en radioastronomie, cette méthode n'est possible que récemment dans le domaine de l'optique pour des sources suffisamment brillantes. Les progrès de l'optique adaptative permettent de s'affranchir de l'effet de la turbulence atmosphérique. Le télescope spatial Hubble détecte les sources peu brillantes et n'a pas son pareil dans ce domaine mais pour les sources brillantes, on obtient une bien meilleure résolution avec un dispositif sur terre.

I. Télescope classique

Il est constitué d'un miroir qui collecte la lumière émise par l'étoile ; l'axe du miroir pointe sur l'étoile.

Soit un miroir sphérique concave de rayon R et une étoile ponctuelle à l'infini de hauteur angulaire α par rapport à l'horizon.

1. Tracer l'image de l'étoile par le miroir. Préciser sa nature, sa position et sa taille.
2. Le miroir diffracte et on observe une tache d'Airy de rayon angulaire $0.61 \frac{\lambda}{R}$. Pourquoi parle-t-on de tache ? Décrire les caractéristiques de cette tache. Sur quelle position est-elle centrée ?
3. Ce phénomène limite-t-il l'observation des étoiles ? A quelle condition peut-on séparer deux étoiles ponctuelles très proches ? On utilisera le critère de Rayleigh en l'expliquant à l'aide d'un dessin.

4. Application numérique : $\lambda = 589 \text{ nm}$ et $R = 1 \text{ m}$. L'étoile Bételgeuse a un diamètre apparent de 60 millièmes de seconde d'angle, peut-on mesurer son diamètre avec ce télescope ?
5. On définit la résolution du télescope comme le diamètre apparent minimal que peut mesurer le télescope. Quel serait le rayon du miroir nécessaire pour résoudre Bételgeuse ?

Même si l'on pouvait compenser l'effet de la turbulence atmosphérique, un télescope de 500 m de diamètre ne permettrait de mesurer que le diamètre des seules étoiles visibles à l'oeil nu. Un tel télescope n'est envisageable ni sur le plan technique ni sur le plan financier et ne permettrait donc pas d'observer les étoiles les plus lointaines ou les moins lumineuses. Par chance, grâce à l'interférométrie, la construction d'un tel miroir n'est pas indispensable.

II. Dispositif théorique : interférométrie

Soit le problème théorique de deux sources lumineuses ponctuelles cohérentes émettant les signaux : $s(S_1, t) = a_{o1} \cos \omega t$ et $s(S_2, t) = a_{o2} \cos(\omega t - \varphi_o)$ avec φ_o constant. Ces signaux se propagent dans le vide à la célérité c .

6. Ecrire le signal reçu en M à l'instant t de la part de la source S_1 que l'on notera $s_1(M, t)$.
7. Ecrire le signal reçu en M à l'instant t de la part de la source S_2 que l'on notera $s_2(M, t)$.
8. En M, les deux signaux s'additionnent $s(M, t)$. Le récepteur n'est sensible qu'à la moyenne temporelle du signal au carré : $I(M) = K \langle s^2(M, t) \rangle$ avec K, une constante de proportionnalité. Calculer $I(M)$, on obtient la formule dite de Fresnel.

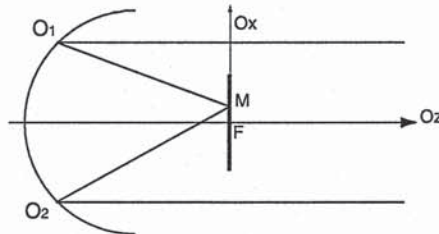


FIG. 1 - Miroir sphérique muni d'un cache percé de deux trous

L'interféromètre le plus simple utilise deux ouvertures qui captent la lumière.

Soit un miroir sphérique concave (rayon R) muni d'un cache opaque (figure 1) percé de deux petits trous circulaires (de rayon r) symétriques en O_1 et en O_2 , distants de d et éclairé par une source monochromatique ponctuelle à l'infini (étoile) dans la direction de l'axe optique. On place un écran dans le plan focal du miroir (f distance focale avec $f \gg d$). A.N avec $R = 10 \text{ m}$, $d = 0,1 \text{ m}$ et $r = 1 \text{ mm}$.

9. Pourquoi peut-on observer un phénomène d'interférences ? Qui jouent le rôle de sources secondaires ?
10. Définir la cohérence temporelle. Pourquoi les deux sources secondaires sont-elles cohérentes ?
11. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran, situé à la distance x de l'axe optique, en fonction de x , d , λ et f après avoir défini le mot éclairement. On note E_o l'éclairement maximal.

12. Qu'observe-t-on sur l'écran au voisinage du point F ? Préciser les caractéristiques géométriques du phénomène observé. Exprimer l'interfrange.
13. On observe avec ce dispositif une étoile double dont les deux composantes (de même intensité) font un angle 2α entre elles ou chacune l'angle α avec l'axe optique. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran situé à la distance x de l'axe optique.
14. Définir le contraste ou visibilité des franges. Que vaut-il dans ce dispositif ? Qu'est-ce qui a changé par rapport à l'étoile ponctuelle ?
15. Montrer que si la distance d peut varier, on peut mesurer l'angle α .
16. Est-on gêné par la diffraction ?
17. Combien observe-t-on de franges d'interférences dans la tache d'Airy ?
18. Soit une étoile de diamètre apparent ϵ et d'intensité totale I_o , on définit l'intensité angulaire $I_\theta = \frac{I_o}{\epsilon}$. Exprimer l'éclairement élémentaire $dE(M)$ au point M pour une bande $d\theta$.
19. On note E_o l'éclairement maximal. Montrer que l'éclairement au point M peut s'écrire :

$$E(M) = \frac{E_o}{2} \left(1 + \left(\frac{\sin \frac{\pi d \epsilon}{\lambda}}{\frac{\pi d \epsilon}{\lambda}} \right) \cos \frac{2\pi d x}{\lambda f} \right)$$

20. Que vaut le contraste ou visibilité des franges ?

III. Dispositif réel avec une ou plusieurs lignes de base

Un télescope possédant un miroir de 500 m de diamètre peut avantageusement être remplacé, grâce à l'interférométrie, par deux petits miroirs qui diffractent, placés à 500 m de distance. Cependant cela limite l'observation à la direction les reliant entre eux : la ligne de base.

On utilise un dispositif interférentiel à une ligne de base (figure 2) : deux miroirs de rayon r distants de d collectent la lumière de l'étoile, ils forment une ligne de base de longueur d . Pour chaque miroir, un détecteur placé en son foyer détecte un signal proportionnel à l'amplitude du champ électrique. Un dispositif combine les deux signaux de façon synchrone : c'est à dire sans introduire de déphasage supplémentaire, la différence de marche optique doit être restituée avec une précision meilleure qu'une fraction de longueur d'onde ce qui est nettement plus difficile en optique que dans le domaine des ondes radio. On obtient un signal final $s_f(t)$, proportionnel à l'intensité, qui est traité afin d'obtenir une image de l'étoile.

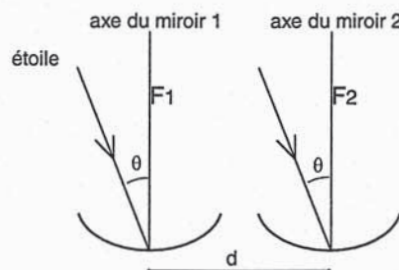


FIG. 2 - Dispositif interférentiel à une ligne de base

21. Faire un dessin et calculer la différence de marche optique entre les deux signaux qui finalement convergent en F_1 et F_2 en fonction de l'inclinaison θ d'une étoile ponctuelle à l'infini.

Lorsque les miroirs sont fixes, le signal final ne varie pas. Il faut faire varier la longueur et l'orientation de la ligne de base. Une façon simple est de se servir de la rotation de la terre.

22. Calculer la différence de marche optique à l'instant t pour une étoile sur laquelle le télescope à deux miroirs pointait à $t = 0$ (l'étoile est ponctuelle, à l'infini, dans la direction de l'axe commun aux deux miroirs à $t = 0$), on note $\psi(t)$ l'angle dont a tourné la terre.
23. Que vaut la vitesse angulaire associée à $\psi(t)$? Dans quel sens tourne la direction de l'étoile par rapport à l'axe fixe commun aux deux télescopes?
24. Les astronomes attendent que la rotation de la terre introduise un retard et le compensent ensuite à l'aide d'une ligne à retard pour ne pas avoir des durées de parcours pour la lumière trop différentes entre les deux chemins. Pourquoi?
25. On enregistre au cours du temps le signal $s_f(t)$, qu'observe-t-on? Quelle est la durée d'enregistrement pour une frange? On choisit cette durée comme temps de pose.
26. Il faut tenir compte de la diffraction, combien observe-t-on de franges d'interférences dans la tache d'Airy? Est-on limité en durée d'observation? A.N avec $d = 500 \text{ m}$ et $r = 1 \text{ m}$.
27. On observe avec ce dispositif une étoile de diamètre apparent ϵ ; en exploitant les résultats de la question 18, montrer que :

$$E(M) = \frac{E_o}{2} \left(1 + \left(\frac{\sin \frac{\pi d \epsilon}{\lambda}}{\frac{\pi d \epsilon}{\lambda}} \right) \cos \frac{2\pi d \psi}{\lambda} \right)$$

28. Quelle condition sur ψ cette relation impose-t-elle?
29. Pour quelles valeurs de d le contraste s'annule-t-il? Calculer littéralement puis numériquement d_{min} pour $\lambda = 600 \text{ nm}$ et pour $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ secondes d'angle.
30. Si d est variable, montrer que cette méthode permet de mesurer le diamètre apparent d'une étoile.
31. En tenant compte de la diffraction, dessiner l'allure du signal final qu'on enregistre au cours du temps pour $d = 0 \text{ m}$, $d = 120 \text{ m}$ et $d = 240 \text{ m}$.

On utilise un dispositif interférentiel à trois lignes de base : trois miroirs de rayon r , distants de d deux à deux, collectent la lumière de l'étoile. Pour chaque miroir, un détecteur placé en son foyer détecte un signal proportionnel à l'amplitude du champ électrique. On les couple deux à deux. Un dispositif combine les deux signaux de façon synchrone et on obtient un signal final, proportionnel à l'intensité, qui est traité.

32. Quelle amélioration apporte le système à 3 miroirs par rapport à celui à 2 miroirs?

On peut ensuite utiliser plusieurs miroirs de rayon r qui collectent la lumière de l'étoile, chacun donnant un signal. Un dispositif combine les signaux des n miroirs deux à deux de façon synchrone et forment $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes de base. Certains parmi les n miroirs peuvent être déplacés sur des rails. A l'aide d'algorithmes fondés sur la transformée de Fourier, les astronomes convertissent l'ensemble des franges mesurées (une par pose) en une image de l'astre étudié. Cette image est d'autant plus complète et résolue que le nombre de lignes de base est grand. Cependant, la complexité du système optique croît rapidement et le nombre de photons pour chaque combinaison de miroirs décroît et fait diminuer la sensibilité de l'interféromètre. Finalement, on ne peut pas trop augmenter le nombre de lignes de base. Enfin, si la turbulence atmosphérique est la plaie des grands télescopes, elle est aussi celle des interféromètres.

Deux interféromètres équipés d'optiques adaptatives de pointe rendront possible d'ici peu l'observation d'objets de faible luminosité avec une résolution angulaire exceptionnelle : l'interféromètre Keck (deux télescopes de 10 m de diamètre séparés de 85 m) et le VLT (Very Large Telescope de l'Observatoire européen austral au Chili) qui exploite un réseau de quatre télescopes de 8,2 m de diamètre, relayés par trois petits télescopes auxiliaires de 1,8 m de diamètre capables de se déplacer sur trente bases différentes.

Les 4 télescopes de 8,2 m (UT), fixes, couvrent approximativement une direction E-W, tandis que la direction perpendiculaire, N-S, est couverte par trois télescopes auxiliaires plus petits (AT) et mobiles. Les faisceaux lumineux passent à travers un tunnel optique et sont recombinaés à l'intérieur du laboratoire interférométrique. Les UTs sont séparés d'environ 30 mètres et la plus grande ligne de base est de 130 mètres pour les UTs et jusqu'à 200 mètres avec les ATs. La résolution attendue est de 0.001 secondes d'angle à la longueur d'onde de 1 μm , résolution qui permettrait théoriquement de discerner un homme sur la Lune.

33. Quel est l'intérêt de déplacer les trois petits télescopes ?
34. Est-ce gênant que les trois petits télescopes aient un diamètre inférieur aux quatre grands télescopes ?
35. Finalement, pourquoi l'interférométrie optique est-elle plus complexe à mettre en oeuvre que l'interférométrie en radioastronomie ?

Deuxième partie : Le spectrophotomètre à réseau

Dans les lycées, on utilise un spectrophotomètre à réseau. Il permet de mesurer la concentration d'une espèce chimique absorbante en solution. On place une solution (constituée d'espèces absorbantes dissoutes dans un solvant) dans une cuve (de longueur ℓ) éclairée par un faisceau lumineux quasi monochromatique (de puissance lumineuse surfacique $P_o(\lambda)$ pour une longueur d'onde λ du visible) et on mesure la puissance lumineuse surfacique en sortie de la cuve, $P(\lambda)$, à l'aide d'un détecteur. Pour en déduire l'absorbance, il faut aussi mesurer la puissance lumineuse surfacique en sortie avec une solution étalon (solution avec le seul solvant) notée $P_{ref}(\lambda)$.

L'absorbance A pour une longueur d'onde donnée est définie par $A(\lambda) = \log_{10} \frac{P_{ref}(\lambda)}{P(\lambda)}$ avec $P(\lambda)$ la puissance lumineuse surfacique avec les espèces absorbantes dissoutes dans le solvant.

Le protocole expérimental requiert un étalonnage de l'appareil en mesurant au préalable, pour chaque longueur d'onde, la puissance de référence transmise par le dispositif (cuve + solvant) en l'absence de la substance absorbante étudiée. On fait un réglage de zéro. Après avoir mesuré la puissance transmise en présence de la substance absorbante, l'appareil affiche l'absorbance.

Dans le cas des faibles concentrations, la loi de Beer-Lambert relie l'absorbance A de la solution aux concentrations C_i des espèces absorbantes en solution et aux ϵ_i , ϵ_i coefficient d'absorption molaire de l'espèce chimique i :

$$A(\lambda) = \log_{10} \frac{P_{ref}(\lambda)}{P(\lambda)} = \ell \sum_i \epsilon_i(\lambda) C_i$$

Pour sélectionner une longueur d'onde avec une bande passante étroite, on utilise un réseau en réflexion appelé alors dispositif monochromateur.

I. Loi de Beer et Lambert

Une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ se propageant suivant la direction Oz arrive en incidence normale sur la face d'entrée d'une cuve. Cette cuve contient une solution contenant plusieurs espèces absorbantes indicées par i .

La puissance surfacique traversant la face d'entrée ($z = 0$) vaut $P(z = 0) = P_o$. Lors de la propagation de l'onde dans la cuve (de longueur ℓ), la variation élémentaire de la puissance surfacique rayonnée par l'onde est, dans le cas des faibles concentrations (α_i est le coefficient d'absorption linéique molaire de l'espèce chimique et C_i sa concentration) :

$$dP(z) = - \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) C_i P(z) dz$$

36. Justifier cette expression. N.B : $\epsilon_i(\lambda) = \log_{10}(e) \alpha_i(\lambda)$.

37. Etablir l'expression de $P(z)$, pour une longueur d'onde λ : $P_\lambda(z) = P_o(\lambda) \exp^{-\mu z}$. Que vaut le coefficient $\mu(\lambda)$?

II. Suivi d'une réaction d'oxydo-réduction par mesure de l'absorbance. Cinétique

L'oxydation de l'ion méthanoate par le permanganate de potassium a pour équation :



La vitesse spécifique de cette réaction peut être exprimée sous la forme :

$$v = -\frac{1}{2} \frac{d[\text{MnO}_4^-]}{dt} = k[\text{MnO}_4^-]^\alpha [\text{H}^+]^\beta [\text{HCOO}^-]^\gamma$$

Le but de cette étude est de déterminer l'ordre partiel α par rapport aux ions permanganate. La cinétique est suivie par spectrophotométrie à la longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$, longueur d'onde correspondant au maximum d'absorption du permanganate. A cette longueur d'onde on pourra considérer que le permanganate $\text{MnO}_4^-(aq)$ et le dioxyde de manganèse $\text{MnO}_2(aq)$ sont les seules espèces absorbantes et on notera respectivement ϵ_1 et ϵ_2 leur coefficient d'absorption molaire à $\lambda = 550 \text{ nm}$. Les solutions étudiées étant peu concentrées, on peut appliquer la loi de Beer-Lambert $A(\lambda) = \ell \sum_i \epsilon_i(\lambda) C_i$.

L'étude de la réaction est réalisée dans les conditions suivantes :

- la réaction est totale
- la température est constante $\theta = 25^\circ\text{C}$
- le volume du milieu réactionnel est constant
- on note a, b et c les concentrations initiales respectivement en permanganate, en ions $\text{H}^+(aq)$ et en méthanoate $\text{HCOO}^-(aq)$.

38. Déterminer la valeur du nombre d'oxydation du manganèse dans l'ion permanganate et dans le dioxyde de manganèse.
39. Pour déterminer expérimentalement à l'aide du spectrophotomètre la valeur du coefficient d'absorption molaire ϵ_1 de $\text{MnO}_4^-(aq)$ à la longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$ (et ensuite ϵ_2 du dioxyde de manganèse $\text{MnO}_2(aq)$), on dilue une solution mère de MnO_4^- de concentration connue pour fabriquer plusieurs solutions filles de concentration différente. Quelle courbe faut-il tracer pour obtenir ϵ_1 ?

On réalise une expérience dans une solution tampon de $\text{pH} = 6,6$ avec les concentrations initiales suivantes : $[\text{MnO}_4^-]_0 = a = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{HCOO}^-]_0 = c = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$. On obtient les résultats expérimentaux donnés dans le tableau 1.

TAB. 1 - Résultats expérimentaux

temps en minute	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
absorbance	0.318	0.294	0.243	0.211	0.181	0.159	0.138	0.121
temps en minute	4	4.5	5	6	7	8	9	10
absorbance	0.108	0.097	0.086	0.07	0.06	0.052	0.048	0.044

40. Etablir que, sous ces conditions expérimentales, la vitesse spécifique de la réaction peut s'écrire :

$$v = k_{app}[\text{MnO}_4^-]^\alpha$$

41. Donner l'expression littérale de la constante de vitesse apparente notée k_{app} .

- 42. On note x la concentration en $CO_2(aq)$ à l'instant t , exprimer l'absorbance A_t de la solution à l'instant t en fonction de x , a , ℓ , ϵ_1 et ϵ_2 . Exprimer de même l'absorbance A_o de la solution initiale et l'absorbance A_∞ de la solution quand la réaction est considérée comme terminée.
- 43. Etablir que l'exploitation de la fonction $\ln \frac{A_t - A_\infty}{A_o - A_\infty} = f(t)$ permet de vérifier l'hypothèse d'un ordre partiel $\alpha = 1$ par rapport aux ions permanganate.
- 44. Vérifier que les résultats expérimentaux sont en accord avec un ordre partiel $\alpha = 1$ par rapport aux ions permanganate et calculer la valeur de la constante de vitesse apparente k_{app} .

III. Monochromateur

On considère une pupille plane diffractante (plan Oxy), constituée d'une fente infiniment fine c'est à dire de largeur $h \ll H$ sa hauteur. On prendra l'axe Oy selon la hauteur H et l'axe Ox selon la largeur h .

Cette pupille est éclairée sous incidence normale (direction Oz) par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ . On observe l'intensité lumineuse diffractée à l'infini.

- 45. Où est l'image géométrique ?
- 46. Pourquoi peut-on négliger le phénomène de diffraction dans la direction Oy ? En déduire que l'on peut restreindre l'étude de l'intensité diffractée au plan Oxz .
- 47. Quel est l'ordre de grandeur en angle de la zone concernée par la diffraction ?
- 48. Rappeler le principe d'Huygens-Fresnel qualitativement.

On donne la formule donnant l'amplitude complexe de l'onde lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ par rapport à l'axe optique Oz dans le plan Oxz pour une pupille de transparence complexe $\underline{T}(x)$ avec \underline{K} constante complexe. Justifier le terme de phase.

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(\theta) = \underline{K} \exp^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{T}(x) \exp^{-i \frac{2\pi x \sin \theta}{\lambda}} dx$$

On rappelle la transparence pour une fente infiniment fine : si $-\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2}$ alors $T(x) = 1$ sinon $T(x) = 0$.

- 49. Retrouver l'amplitude complexe de l'onde lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ par rapport à l'axe optique Oz dans le plan Oxz et retrouver l'ordre de grandeur de l'angle de la zone concernée par la diffraction . Soit, avec \underline{K}' constante complexe :

$$\underline{a}_{\text{diffractée}}(\theta) = \underline{K}' \exp^{i\omega t} \left(\frac{\sin \frac{\pi h \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi h \sin \theta}{\lambda}} \right)$$

- 50. Calculer l'intensité diffractée en notant l'intensité maximale I_o .
- 51. Montrer que, si l'on translate la fente dans son plan selon Ox d'une distance d , on peut exprimer l'amplitude complexe de l'onde lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ en fonction de l'amplitude précédente et d'un facteur de phase. Que vaut la phase ϕ ?

$$\underline{a}_{\text{diffractée après translation}}(\theta) = \underline{a}_{\text{diffractée avant translation}}(\theta) \exp^{i\phi}$$

52. Montrer que l'intensité diffractée est inchangée par une translation de la pupille dans son plan (toutes choses égales par ailleurs).
53. Donner l'expression de l'amplitude diffractée par deux fentes identiques F_1 et F_2 , parallèles et distantes de d . F_1 est telle que $-\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2}$ alors $T_1(x) = 1$ sinon $T_1(x) = 0$. F_2 est telle que $d - \frac{h}{2} \leq x \leq d + \frac{h}{2}$ alors $T_2(x) = 1$ sinon $T_2(x) = 0$.
54. En déduire l'expression de l'intensité lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ par les deux fentes, en notant l'intensité maximale I_o . Pour quelles valeurs de $\sin \theta$, l'intensité est-elle maximale? A quelle valeur de la phase ϕ , cela correspond-il? Pour $d = 10h = 1 \mu m$, donner l'allure de l'intensité.
55. On suppose toujours que $d = 10 h$ et on donne une simulation de l'intensité diffractée par un réseau (figure 4), c'est à dire N fentes identiques, parallèles, disposées régulièrement et distantes de d . Les maxima d'intensité (appelés maxima principaux) sont obtenus quand les N ondes diffractées sont en phase, calculer la distance en $\sin \theta$ de deux maxima principaux consécutifs. Sur la simulation, l'abscisse est proportionnelle à $\sin \theta$ et l'ordonnée est proportionnelle à l'intensité diffractée par le réseau.

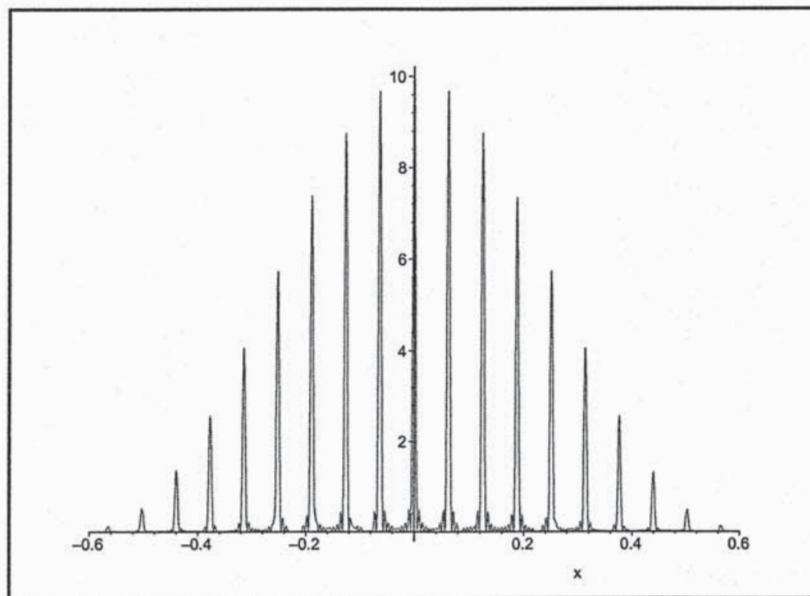


FIG. 3 - Simulation de l'intensité diffractée par N fentes

56. Donner la valeur de N en comparant la largeur en $\sin \theta$ de la tache centrale de diffraction à la largeur en $\sin \theta$ de l'interfrange angulaire entre deux maxima principaux consécutifs.
57. On simule l'intensité diffractée par N fentes identiques, parallèles mais placées aléatoirement (figure 3) avec $d \gg h$. Que remarquez-vous? Que vaut l'intensité en $\theta = 0$?

Principe du monochromateur

Le spectrophotomètre nécessite un faisceau lumineux quasi monochromatique ce qui est réalisable avec un réseau.

On se propose d'étudier la diffraction par un réseau constitué de N fentes ($N \gg 1$ dans la réalité), le pas du réseau est noté d . Le réseau est éclairé en incidence oblique (direction i par rapport à l'axe optique Oz dans le plan Oxz , appelé angle d'incidence et mesuré positivement par rapport

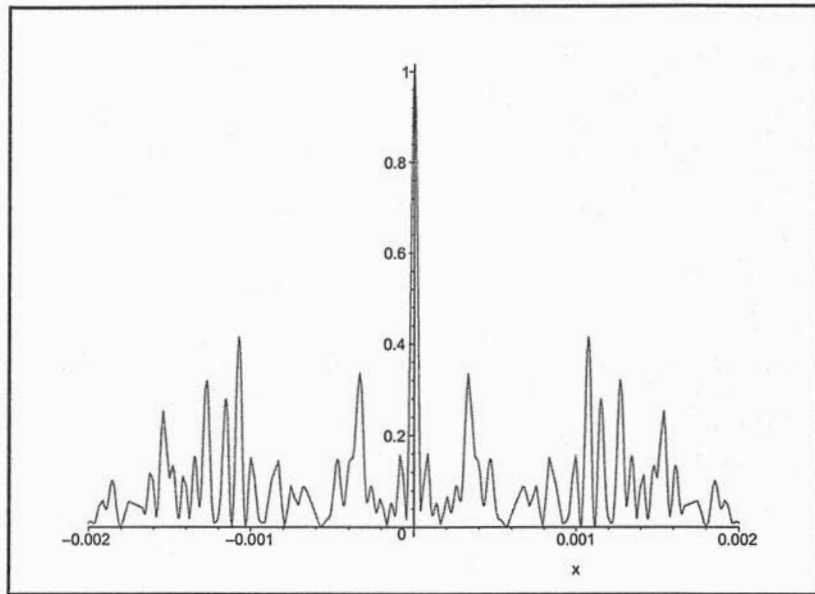


FIG. 4 – Simulation de l'intensité diffractée par N fentes aléatoires

à la normale au réseau) par une onde incidente plane monochromatique de longueur d'onde λ . Il est utilisé en transmission comme précédemment.

- 58. Que vaut la phase ϕ_t entre deux ondes diffractées par deux fentes consécutives ?
- 59. La demi largeur angulaire d'un maximum principal est $\frac{\lambda}{Nd}$. On désire séparer, à l'ordre p, deux longueurs d'onde voisines λ_1 et λ_2 émises par la source. On dit que le réseau sépare ces deux longueurs d'onde si le maximum principal d'ordre p (p entier) pour la longueur d'onde λ_1 coïncide avec la première annulation voisine du maximum principal d'ordre p pour la longueur d'onde voisine λ_2 dans le cas limite. En déduire l'expression du pouvoir de résolution théorique du réseau $\frac{\lambda_{moyen}}{|\lambda_1 - \lambda_2|}$ en fonction de N et p.
- 60. En pratique, qu'est-ce qui limite la séparation des deux longueurs d'onde ?
- 61. On éclaire le réseau avec une lampe spectrale à vapeur de Sodium. Déterminer le nombre de fentes nécessaires pour séparer le doublet à l'ordre 1 : $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$.

Le réseau est maintenant utilisé en réflexion.

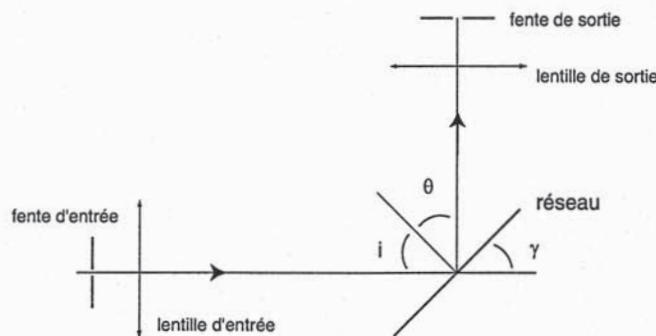


FIG. 5 – Schéma de principe du monochromateur

Un réseau par réflexion peut être décrit comme l'association de miroirs identiques de largeur h

distants de d . Le schéma de principe d'un monochromateur à réseau par réflexion est indiqué figure 5. Une source lumineuse polychromatique éclaire une fente source (dont l'axe est parallèle aux miroirs du réseau; fente d'entrée notée F_e) placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente dite d'entrée (distance focale f) et produit un faisceau lumineux incident sur le réseau (angle d'incidence i sur le réseau donc avec sa normale). Après diffraction sur les miroirs, le faisceau lumineux émergent fait un angle θ avec la normale au réseau. On récupère le faisceau émergent après passage par une lentille convergente dite de sortie (distance focale f) dans son plan focal image. Les deux lentilles sont fixes et perpendiculaires entre elles tandis que le réseau peut bouger.

Le réseau par réflexion est fixé sur une monture mobile en rotation autour de l'axe parallèle aux traits du réseau (miroirs) et peut donc pivoter autour de cet axe; l'angle γ , qui fixe la position du réseau, varie alors. Les trois angles i , θ et γ sont pris positivement et varient entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Une fente (fente de sortie notée F_s), dont l'axe est parallèle à la fente source et aux traits du réseau, est placée au niveau du foyer image de la lentille de sortie. Les miroirs étant de grande dimension $H \gg h$ perpendiculairement au plan de la figure, on se contente d'étudier le phénomène de diffraction dans ce plan.

62. Que vaut i en fonction de γ ? Si les miroirs ne diffractaient pas, récupérerait-on de la lumière dans le plan focal image de la lentille de sortie? A quelle valeur de θ cela correspond-il?
63. Exprimer, en fonction de l'angle γ , la différence de marche optique entre l'onde diffractée dans la direction θ par le miroir n et l'onde diffractée par le miroir $n+1$ dans la même direction. On suppose que la largeur des miroirs est très petite et qu'elle n'intervient pas.
64. En déduire la nouvelle phase ϕ_r .
65. Pour quelle valeur de γ cette différence de marche est-elle nulle?
66. On souhaite utiliser le spectre d'ordre $p = 1$ donné par ce réseau. On note γ_1 (respectivement γ_2) la valeur de l'angle pour laquelle on récupère une radiation de longueur d'onde λ_1 (respectivement λ_2) au niveau de la fente de sortie F_s . Déterminer les valeurs numériques de γ_1 et de γ_2 pour le doublet du sodium avec $d = 1 \mu m$.
67. On souhaite utiliser le spectre d'ordre $p = 2$ donné par ce réseau. Déterminer les valeurs numériques de γ'_1 et de γ'_2 à l'ordre 2 pour le doublet du sodium.
68. Quel est l'intérêt d'augmenter l'ordre? Définir le pouvoir dispersif du réseau.
69. Pourquoi évite-t-on de travailler dans les ordres très élevés?
70. Les fentes F_e et F_s sont centrées respectivement sur les axes optiques des lentilles d'entrée et de sortie de même distance focale. On tient compte de la largeur des fentes (largeur commune ℓ) mais en supposant a priori qu'elle est très petite devant f .
71. Donner la variation $\pm \Delta i$ de l'angle d'incidence i due à la largeur de la fente d'entrée à angle γ fixé.
72. Donner de même la variation $\pm \Delta \theta$ de l'angle d'émergence θ due à la largeur de la fente de sortie à angle γ fixé.
73. En déduire la variation qu'il en résulte sur la longueur d'onde.
74. A.N pour λ_1 avec $\ell = 0.5 \text{ mm}$ et $f = 5 \text{ cm}$.

Troisième partie : Lasers, pinces optiques

Les diodes lasers ont envahi les laboratoires, les salles de TP des lycées et notre vie quotidienne. Des lasers servent d'étaux de lumière pour immobiliser des cellules ou de minuscules constituants cellulaires, cette technique dite "pince optique" (développée vers 1970) peut être accompagnée du "ciseau optique" (laser qui permet de pratiquer des interventions minutieuses, sur des cobayes pour l'instant).

I. Diodes Laser

Soit une onde incidente plane, progressive, harmonique (de pulsation ω), d'amplitude notée E_o , qui se propage dans le vide selon les x croissants et qui est polarisée rectilignement selon y .

75. Donner le vecteur d'onde \vec{k} ainsi que les expressions réelle et complexe du vecteur champ électrique.
76. Justifier les conditions de passage du champ électromagnétique à l'interface : la composante tangentielle du champ électrique est continue et le champ magnétique est continu.
77. Donner l'expression du champ magnétique en fonction de \vec{E} , du vecteur d'onde \vec{k} et de ω .
78. Que vaut k dans le vide en fonction de ω (on désigne par k le module du vecteur d'onde \vec{k}) ?

Soit une interface ($x = 0$) entre le vide ($x < 0$) et un milieu diélectrique parfait ($x > 0$), linéaire, homogène et isotrope d'indice n . A l'interface $x = 0$, l'onde incidente ($x < 0$) peut se réfléchir ou être transmise, on cherche les ondes réfléchies et transmises sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= E_{or} \exp^{i(\omega t + kx)} \vec{u}_y \\ \vec{E}_t &= E_{ot} \exp^{i(\omega t - k'x)} \vec{u}_y\end{aligned}$$

79. Que vaut k' dans le milieu en fonction de ω et de l'indice du milieu ?
80. Justifier la forme proposée pour les champs électriques réfléchis et transmis.
81. Donner la forme pour les champs magnétiques réfléchis et transmis.
82. Soient r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour le champ électrique à la traversée de l'interface dans le sens vide ($x < 0$) vers milieu ($x > 0$). Montrer que $r = \frac{1-n}{n+1}$ et que $t = \frac{2}{n+1}$.
83. Montrer qu'à la traversée de l'interface dans le sens milieu 1 d'indice n_1 ($x < 0$) vers milieu 2 d'indice n_2 ($x > 0$), $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$.
84. En déduire r' pour la traversée de l'interface dans le sens milieu vers vide. Exprimer r' en fonction de r .

La diode laser est constituée par un milieu homogène, transparent, d'indice n , limité par des faces planes et parallèles, distantes de L , elle est placée dans le vide (figure 6). Entre ces deux faces formant cavité, l'onde est constituée de deux ondes progressives, supposées planes, se propageant en sens inverse, perpendiculairement aux faces.

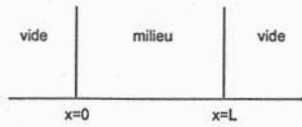


FIG. 6 - diode laser

85. Soit E_o l'amplitude réelle, au niveau de la face ($x = L$), de l'onde qui arrive sur cette face. Exprimer l'amplitude complexe de l'onde qui arrive à nouveau sur cette face \underline{E}'_o , après un aller et retour complet dans la cavité, en fonction de E_o , r' , ω , c , L et n .

En fait, au cours de son trajet dans la cavité, l'onde est amplifiée par le phénomène appelé émission induite. Une manière d'exprimer cette propriété est d'utiliser un indice complexe n_c tel que $n_c = n - ig$ avec $g > 0$.

86. Que représentent la partie réelle et la partie imaginaire de l'indice complexe ? A quels phénomènes physiques sont-elles associées ?
87. Que se passe-t-il quand la partie imaginaire est négative ?
88. Pour qu'il y ait un régime permanent, il faut que l'onde dans la cavité ait une amplitude constante. Montrer que $r'^2 \exp^{in_c \omega 2L/c} = 1$.

On suppose $g \ll n$, ce qui permet d'utiliser pour r' l'expression obtenue précédemment. En régime permanent, la diode laser n'émet que pour des fréquences particulières ν_p situées dans une certaine plage.

89. Calculer ν_p .
90. Déterminer l'écart $\Delta\nu$ entre deux fréquences consécutives possibles ν_p et ν_{p+1} de l'onde.
91. On appelle " coefficient d'amplification " le facteur $\alpha = g\omega/c$. Déterminer en fonction de L et r' la valeur α_o que doit avoir α en régime permanent ?
92. Application numérique. On donne $n = 3,40$ et $L = 0,5 \text{ mm}$. Calculer $\Delta\nu$, r' et α_o .
93. La longueur d'onde de l'oscillation laser est voisine de 845 nm , calculer la valeur g_o de g correspondante et justifier l'approximation faite sur la valeur de r' précédemment.
94. Quelle est l'homogénéité de l'intensité lumineuse ?

Soit le vecteur dit de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o}$, donner son expression pour une onde plane progressive harmonique qui se propage dans la cavité (voir ci-dessus). Quelle est sa direction et que représente la valeur moyenne temporelle de sa valeur algébrique ?

95. Exprimer l'intensité de la diode laser en fonction de son amplitude E_o . L'intensité I est définie ici pour chaque onde progressive à l'intérieur de la cavité.

L'amplification dans un milieu laser nécessite une "inversion de populations" ce qui entraîne un effet non linéaire : le coefficient d'amplification α décroît lorsque l'intensité I de l'onde optique croît. On admettra que la relation entre α et I est de la forme : $\alpha(I) = \frac{\alpha_m}{1 + I/I_o}$ où α_m et I_o sont deux constantes. On donne $\alpha_m = 2 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$, $I_o = 10 \text{ mW}$.

96. Calculer numériquement l'intensité I en régime permanent ainsi que l'intensité I_s du faisceau laser en sortie : $x = L$.

II. Pincés optiques

Un faisceau laser focalisé sur un petit objet diélectrique peut le piéger (au voisinage du point de convergence du faisceau) grâce à la non uniformité du faisceau, on parle de pincette optique sous certaines conditions, conditions que l'on va étudier.

Soit un dipôle électrique de moment dipolaire \vec{p} placé dans le champ électrique d'une onde donc placé dans un champ électrique \vec{E} extérieur non uniforme. On modélise le dipôle par une charge positive q au point A^+ et une charge négative $-q$ au point A^- , $A^-A^+ = a \ll \lambda$ avec λ la longueur d'onde de l'onde électromagnétique.

97. Quelles sont les actions exercées sur le dipôle? On donnera sous forme vectorielle littérale la résultante et le moment résultant en O (point moyen du dipôle) en fonction de q , $\vec{E}(A^+)$ et $\vec{E}(A^-)$.
98. En assimilant $\vec{E}(A^+)$ et $\vec{E}(A^-)$ à $\vec{E}(O)$, simplifier l'écriture du moment résultant en O en fonction de \vec{p} et $\vec{E}(O)$.
99. Quel est l'effet qualitatif du moment résultant en O sur le dipôle?
100. On donne la résultante $\vec{F} = [(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}] (O)$. Quel est l'effet qualitatif de la résultante sur le dipôle? On pourra raisonner avec un dipôle parallèle au champ électrique pour simplifier, par exemple $\vec{p} = p_x \vec{u}_x$ et $\vec{E} = E_x \vec{u}_x$.

On rappelle la formule mathématique :

$$[(p_x \vec{u}_x \cdot \overrightarrow{\text{grad}})E_x \vec{u}_x] = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} \vec{u}_x$$

101. Faire un dessin des lignes de champ créées par une charge ponctuelle positive et ensuite par une charge ponctuelle négative.
102. Expliquer la solvatation des anions et des cations dans un solvant, par exemple l'eau : pourquoi les ions sont-ils entourés de plusieurs molécules d'eau? Quelle est la différence entre l'anion et le cation?

Un objet sphérique diélectrique transparent d'indice n , de centre O et de rayon $a \ll \lambda$ est placé dans le vide, il a une masse volumique $\rho = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Une onde électromagnétique se propage dans la direction Oz : $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o(\vec{r}) \cos(\omega t - kz)$.

103. Expliquer pourquoi l'objet se polarise c'est à dire acquiert un moment dipolaire dit induit dans le champ électrique de l'onde. On note $\vec{p} = \epsilon_o \alpha \vec{E}$ avec $\alpha > 0$, caractéristique du milieu diélectrique et de la forme de l'objet.
104. Quelle est l'homogénéité de α ?

On donne la force \vec{F}_R exercée par le champ électrique sur l'objet en moyenne temporelle $\langle \vec{F} \rangle = \frac{\epsilon_o \alpha}{4} \overrightarrow{\text{grad}}(E_o(\vec{r}))^2$ quand $a \ll \lambda$ (régime de Rayleigh).

105. Sachant que les lignes de champ du gradient de $\vec{E}_o(\vec{r})$ doivent converger au point de confinement du piège, montrer que \vec{F}_R est une force de rappel vers la position souhaitée de l'objet dans le piège.

Un dipôle oscillant (cas de l'objet diélectrique polarisé) émet un champ électromagnétique, la puissance qu'il rayonne est une perte énergétique pour l'objet ce qui se traduit par une force

dite de diffusion notée \vec{F}_D de module $\frac{\epsilon_0 \alpha^2 \omega^4 E_0^2}{12\pi c^4}$. On néglige toute absorption dans le milieu diélectrique.

On admet que \vec{F}_D est dirigée dans la direction et le sens de propagation de l'onde.

106. Peut-on faire léviter l'objet dans l'air sous l'action de \vec{F}_R et \vec{F}_D ? Pourquoi le poids de l'objet n'est-il pas susceptible de compromettre l'équilibre?
107. Quelle est la condition de stabilité du piège selon la direction z ? On précisera cette condition à l'aide des données et de $\frac{\partial E_0}{\partial z}$.

Pour que le piège optique soit efficace, on utilise parfois deux faisceaux lasers ce qui augmente la stabilité de l'objet piégé.

Les micromanipulations d'objets biologiques ont fait récemment des progrès importants, notamment dans le domaine de la biophysique des moteurs moléculaires (université de Stanford aux Etats-Unis) et l'utilisation de pinces optiques s'est révélée déterminante pour l'étude de la locomotion des cellules (in vitro), recherche actuelle à l'Institut Curie.

Les longueurs d'onde utilisées sont généralement comprises entre $0,7 \mu m$ et $1,06 \mu m$, la puissance du faisceau laser, pour les pinces, varie entre $25 mW$ et $500 mW$ et le diamètre du point de focalisation entre $0,5 \mu m$ et $1 \mu m$. De tels faisceaux engendrent des forces de l'ordre du piconewton. Pour les ciseaux optiques, il s'agit d'impulsions brèves de haute énergie tandis que pour les pinces, le faisceau est continu de faible énergie.

La bactérie *Listeria* a la forme d'un cylindre de $1 \mu m$ de longueur et de $0,1 \mu m$ de diamètre, elle avance à près d'un millimètre par heure. Pour étudier sa locomotion, on pince la queue de filaments d'actine qu'elle assemble dans son prolongement.

108. Si on admet que le modèle ci-dessus est applicable et qu'on assimile la partie pincée à un objet sphérique, calculer l'ordre de grandeur du module de \vec{E}_0 puis du module de la force \vec{F}_D . α est du même ordre de grandeur que le volume de l'objet sphérique, on prendra les valeurs maximales pour la longueur d'onde et la puissance ce qui correspond à un laser Nd :YAG dont la section est voisine de λ^2 au point de convergence.

On rappelle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 SI$. On justifiera précisément la validité du modèle et l'ordre de grandeur de \vec{E}_0 .