

SESSION 2009

---

**CONCOURS EXTERNE  
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS**

**Section : MÉCANIQUE**

**ÉPREUVE DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE  
ET DES MILIEUX DÉFORMABLES**

Durée : 6 heures

---

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

# Etude d'un ventilateur industriel

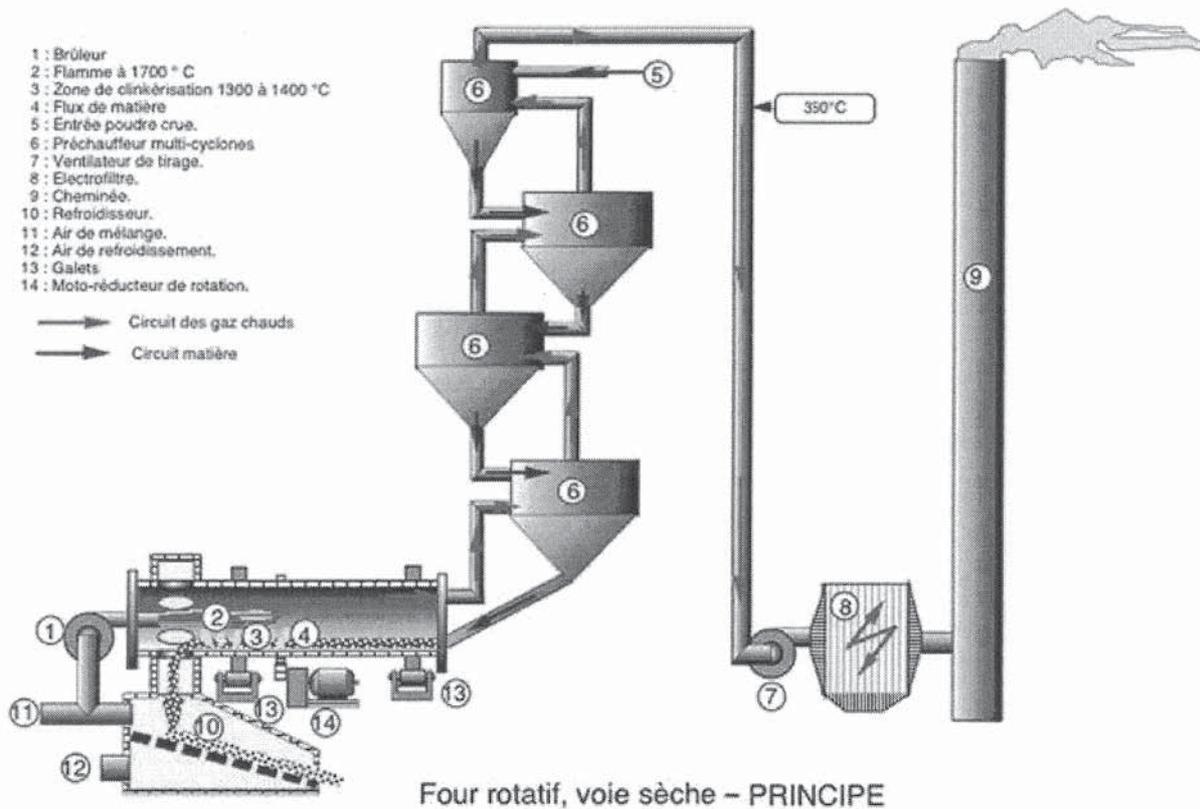
Présentation .....	2
PARTIE 1 – PERFORMANCES DU VENTILATEUR .....	4
PARTIE 2 – ECHANGES THERMIQUES .....	8
PARTIE 3 – STABILITE DU ROTOR.....	10
Partie 3-1 : Etude du mouvement du rotor .....	10
Partie 3-2 : Etude d'un dispositif d'équilibrage dynamique.....	13
PARTIE 4 – DEFORMATION STATIQUE DE L'ARBRE .....	15
PARTIE 5 – DIMENSIONNEMENT DU DISQUE.....	18
Partie 5-1 : Roue équivalente.....	18
Partie 5-2 : Etat de contrainte dans le disque de liaison .....	20
ANNEXE 1 .....	22
Rappel du théorème d'Euler-Rateau.....	22
ANNEXE 2 .....	23
Transferts thermiques .....	23
ANNEXE 3 .....	24
Points d'intégration pour la méthode de Gauss Legendre .....	24
ANNEXE 4.....	24
Loi de comportement élastique linéaire.....	24
Elasticité linéaire en coordonnées polaires.....	24

**Les candidats trouveront dans les annexes des éléments pouvant les aider à répondre aux questions.**

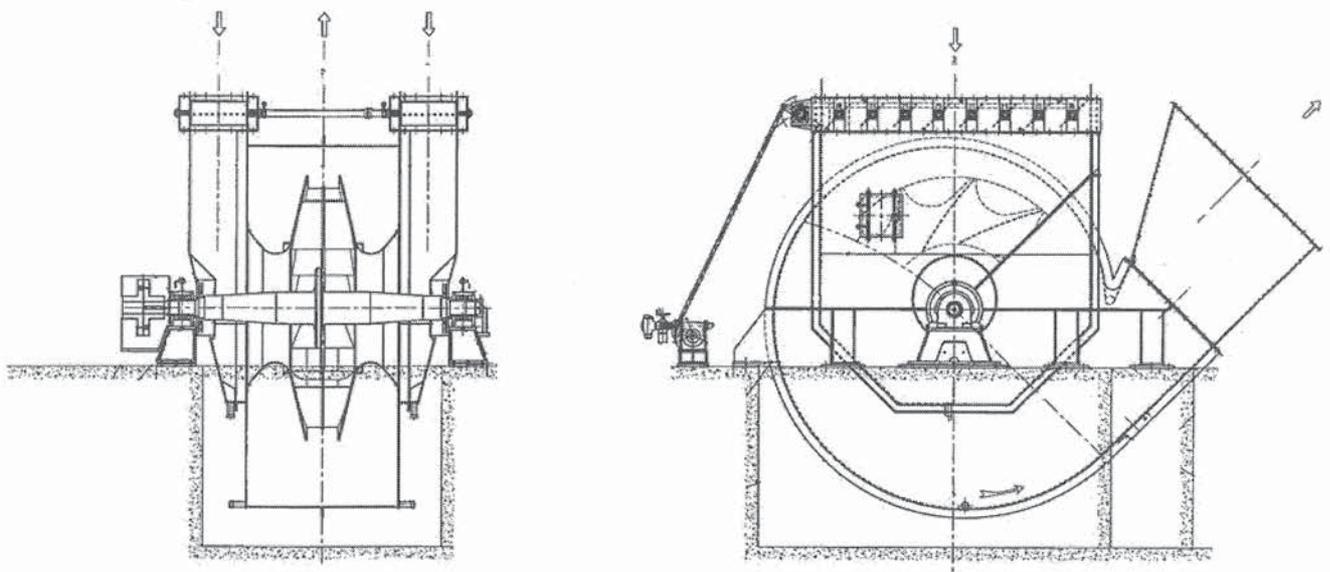
Les auteurs tiennent à remercier la société FläktWoods et tout particulièrement Monsieur Alain GODICHON, directeur technique de la société Fläkt Solyvent-Ventec à Chalon sur Saône, pour les documents qu'il a bien voulu transmettre. Qu'il soit aussi remercié pour la disponibilité dont il a fait preuve et ses compétences qu'il a accepté de partager.

## Présentation

Dans les installations de cimenteries industrielles de gros ventilateurs (7) sont utilisés pour extraire les gaz chauds du four et les envoyer dans la cheminée d'évacuation (9) en passant préalablement par un système de filtrage (8).



Les débits d'air sont très importants, de l'ordre de 100 à 500 m<sup>3</sup>/s et les températures élevées (de 200 °C à 400 °C). Pour assurer ce tirage d'air, et donc créer une dépression à la sortie du four, on peut utiliser des ventilateurs centrifuges doubles tels que ceux représentés sur le dessin technique suivant :



Ces appareils sont très volumineux, l'arbre de roue mesure plusieurs mètres de longueur, et la roue du ventilateur fait aussi plusieurs mètres de diamètre. On se trouve alors confronté à de nombreux problèmes techniques alliant à la fois les aspects mécaniques (vibration, déformations, fatigue...) et thermiques (haute température, débit important...). Le bon fonctionnement de ces appareils conditionne directement le fonctionnement global de l'installation de la cimenterie. Le moindre incident de ventilation peut avoir des conséquences graves sur l'ensemble de la production et sur la tenue dans le temps des fours. C'est pourquoi ces ventilateurs doivent être particulièrement fiables. Dans le cadre des économies d'énergie, on cherche à améliorer constamment le rendement de ces installations de cimenterie. Chaque poste énergétique compte et il convient d'optimiser aussi le circuit d'extraction des gaz. C'est pourquoi, préalablement à la réalisation d'un tel ventilateur, de nombreuses études sont réalisées. Elles ont pour objet d'assurer un fonctionnement optimal et fiable.

L'objet de cette étude est d'aborder différentes parties liées à la complexité de l'appareil. Dans le sujet proposé, ces parties sont traitées de manières indépendantes, et parfois des questions d'une même partie peuvent aussi être indépendantes.

Les différents éléments constitutifs du ventilateur sont :

Le stator qui est en fait un bâti solidaire du sol. Constitué essentiellement de grandes plaques de tôles, il a pour objet de canaliser le fluide à l'entrée et à la sortie du ventilateur. Il assure aussi la fonction de support pour les parties mobiles.

Le rotor qui est la partie mobile. Entraîné en rotation par un moteur, il est constitué d'un arbre sur lequel est fixée la roue du ventilateur. Dans les très gros ventilateurs, l'arbre peut être creux. Souvent, pour des problèmes d'équilibrage et de répartition de charge, les roues sont doubles et l'ensemble présente approximativement un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe.

La partie 1 a pour objet l'estimation des performances aérauliques du ventilateur.

La partie 2 permet d'évaluer les échanges thermiques à l'intérieur du ventilateur.

Dans la partie 3, on s'intéresse aux petits mouvements du rotor dans ses paliers fluides et au dispositif automatique d'équilibrage.

Avec la partie 4, on étudie, en utilisant la méthode des éléments finis, la déformation de l'arbre sous l'action de la pesanteur.

Enfin la partie 5 permettra de valider sommairement le dimensionnement d'une partie de la liaison entre l'arbre et la roue.

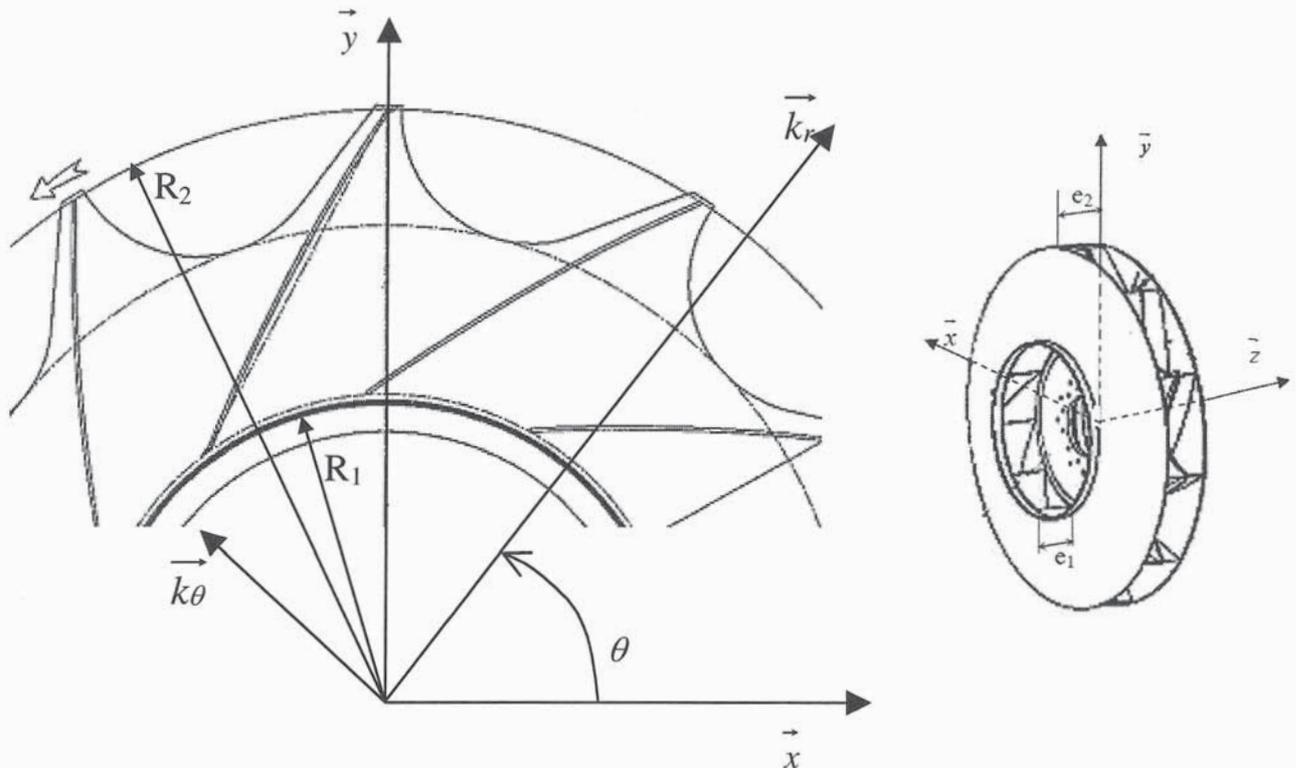
Pour indication, le barème retenu pour cette étude est le suivant :

Partie 1	Performances du ventilateur – écoulement de fluide	20%
Partie 2	Echanges thermiques	15%
Partie 3	Stabilité du rotor – dynamique	25%
Partie 4	Déformation statique de l'arbre – éléments finis	20%
Partie 5	Dimensionnement du disque – mécanique des milieux continus	20%

## PARTIE 1 – PERFORMANCES DU VENTILATEUR

On cherche à caractériser les performances du ventilateur, c'est à dire sa capacité à comprimer l'air pour un débit donné. Pour cela, on va évaluer l'action de fluide ventilé sur son rotor. A partir d'un modèle simplifié : fluide incompressible et parfait, on cherchera à confirmer ou infirmer le bien fondé de ce modèle. De plus on supposera l'écoulement adiabatique dans la roue. Cette hypothèse sera examinée à la partie 2.

On considérera que le rotor tourne à vitesse de rotation  $N$  constante par rapport au stator supposé fixe dans le référentiel galiléen. On supposera que l'écoulement entre deux aubages est permanent et plan : cela revient à négliger la composante axiale de la vitesse du fluide par rapport aux composantes radiales et tangentielles. Des rappels sont fournis en Annexe 1.



On désigne par  $e$  l'épaisseur de la veine fluide à un rayon donné  $r$ , épaisseur mesurée selon l'axe  $\vec{z}$ .

A l'entrée du ventilateur un point  $M_1$  de l'écoulement est repéré par ses coordonnées :

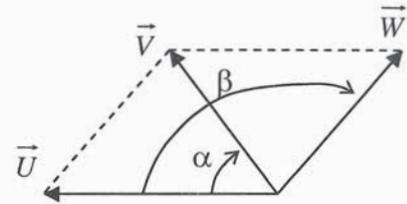
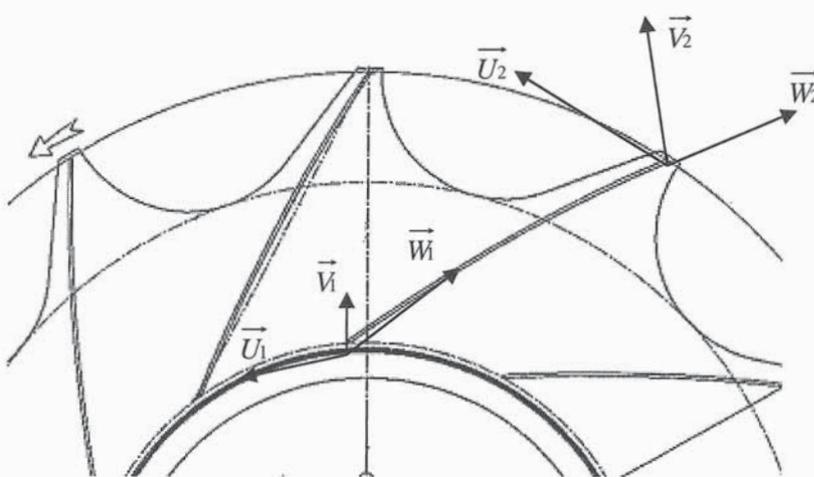
$$\overrightarrow{OM_1} = R_1 \cdot \vec{k}_r + z \cdot \vec{z}, \text{ sa vitesse absolue est } \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} V_{1r} \\ V_{1\theta} \\ V_z = 0 \end{bmatrix}$$

A la sortie du ventilateur un point  $M_2$  de l'écoulement est repéré par ses coordonnées :

$$\overrightarrow{OM_2} = R_2 \cdot \vec{k}_r + z \cdot \vec{z}, \text{ sa vitesse absolue est } \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} V_{2r} \\ V_{2\theta} \\ V_z = 0 \end{bmatrix}$$

On néglige dans un premier temps l'épaisseur des aubages. On considère le fluide comme parfait et incompressible. La répartition des vitesses et la répartition des pressions sont supposées uniformes dans les sections d'entrée et de sortie. On néglige la pesanteur.

- 1-1 On cherche dans un premier temps à déterminer le moment en O en projection sur  $\vec{z}$ , de l'action du fluide sur le rotor.
- 1-1-1 A partir du théorème du moment dynamique appliqué au fluide contenu dans la roue, établir l'expression de ce moment mettant en jeu le débit, certaines composantes des vitesses ainsi que les rayons correspondant à l'entrée et la sortie du rotor. On détaillera la démarche mise en œuvre en explicitant le(s) théorème(s) utilisé(s) ainsi que les étapes suivies.
- 1-1-2 Dans la théorie des turbomachines, on a l'habitude de faire apparaître pour chaque particule fluide, la vitesse  $\vec{V} = \vec{W} + \vec{U}$  où  $\vec{V}$  est la vitesse absolue de cette particule observée par rapport au repère galiléen,  $\vec{W}$  la vitesse (relative) observée par rapport au rotor et  $\vec{U}$  la vitesse d'entraînement.



A l'entrée  $\beta_1 = 155^\circ$   
 A la sortie  $\beta_2 = 118^\circ$

Pour la roue complète :

$Q_v = 340 \text{ m}^3/\text{s}$        $N = 736 \text{ tr/min}$       masse volumique  $\rho = 0,59 \text{ kg/m}^3$   
 A l'entrée  $R_1 = 1,05 \text{ m}$      $e_1 = 1 \text{ m}$   
 A la sortie  $R_2 = 2,1 \text{ m}$      $e_2 = 0,5 \text{ m}$

Donner la valeur numérique de moment en O en projection sur  $\vec{z}$ , de l'action du fluide sur le rotor.

- 1-2 A partir de l'équation d'Euler (la résultante) montrer qu'en supposant le fluide parfait et incompressible, le théorème de Bernoulli le long d'un filet fluide peut s'écrire :

$$\frac{W^2 - U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cste \quad \text{ou bien} \quad W.dW - U.dU + \frac{dp}{\rho} = 0$$

En déduire une première valeur de la différence de pression que l'on pourrait avoir entre l'entrée et la sortie de la roue.

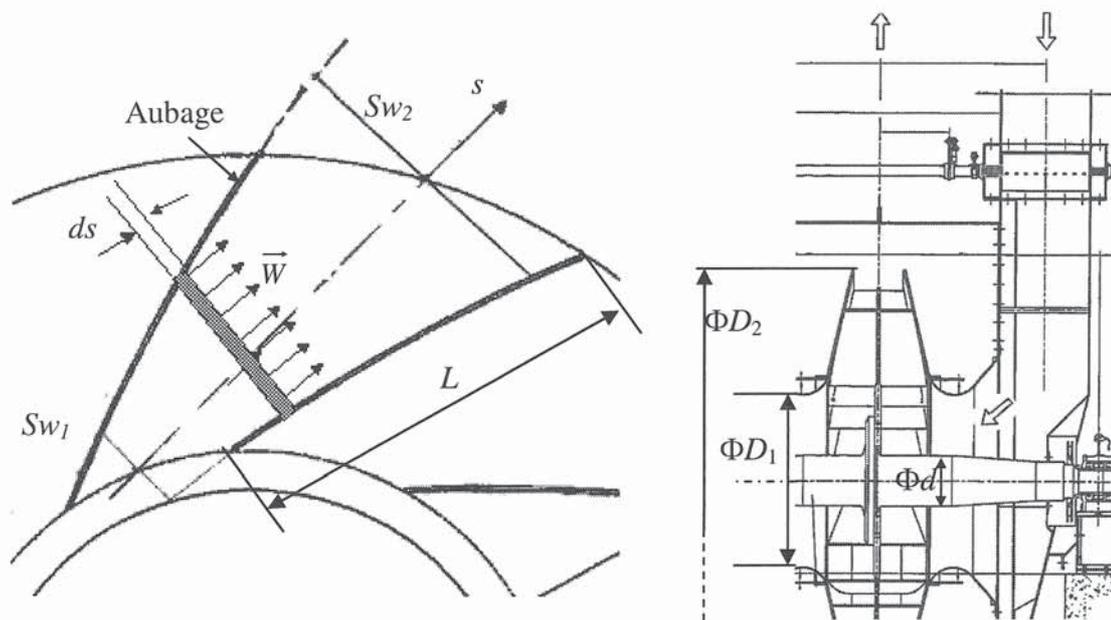
On cherche à justifier le bien fondé de l'utilisation du modèle fluide incompressible pour l'étude de cet écoulement.

- 1-3 Montrer que, dans le cas où les échanges de chaleur sont négligés dans la roue, l'application du premier principe de thermodynamique conduit à la conservation de la quantité  $h + \frac{W^2 - U^2}{2}$  appelée rothalpie où  $h$  représente l'enthalpie massique du fluide.

En déduire l'élévation de température (le fluide obéissant aux lois de Joule:  $c_p$ ,  $c_v$  constants) que l'on peut enregistrer entre l'entrée et la sortie. Conclure quant aux variations de masse volumique correspondantes.  
On donne  $c_p = 1\,050 \text{ J/kg.K}$  et  $c_v = 763 \text{ J/kg.K}$ .

- 1-4 En réalité le fluide présente une viscosité. On cherche à évaluer la perte de charge en supposant l'écoulement entre deux aubages unidimensionnel. L'axe des abscisses curvilignes est défini comme étant le lieu des centres des surfaces débitantes entre deux aubages. A ce titre, il est tangent au vecteur vitesse  $\vec{W}$  au niveau du centre de cette surface.

La conception du ventilateur est telle que  $e$  et  $\beta$  varient avec l'abscisse curviligne  $s$ , ce qui entraîne une évolution de  $Sw$ , la section débitante ainsi que de  $W$  la vitesse du fluide entre deux aubages à l'abscisse  $s$ . Bien que cette évolution soit plus complexe, on considérera qu'un modèle linéaire en constitue une approximation satisfaisante entre l'entrée et la sortie des aubages.



Les pertes de charges linéiques sont données par  $J = \int_0^L \lambda \cdot \frac{ds}{D_h(s)} \frac{W^2(s)}{2}$  dans lequel  $\lambda$  est supposé constant car l'écoulement est pleinement turbulent.  
On désigne par  $D_h$  le diamètre hydraulique, avec  $D_h = 4 \cdot Sw/p$  et  $p$ , périmètre mouillé.

- 1-4-1 Sachant qu'il y a 11 aubages, établir les lois  $D_h(s) = a \cdot s + b$ ,  $Sw(s) = c \cdot s + d$  et  $W(s)$  pour une zone située entre eux. On notera que la roue est en réalité constituée de deux parties symétriques. On effectuera ici les calculs pour une demi roue :

A l'entrée  $D_1 = 2,1 \text{ m}$ ,  $e'_1 = e_1/2 = 0,5 \text{ m}$   $\beta_1 = 155^\circ$

A la sortie  $D_2 = 4,2 \text{ m}$ ,  $e'_2 = e_2/2 = 0,25 \text{ m}$   $\beta_2 = 118^\circ$

Longueur d'un aubage :  $L = 1,4 \text{ m}$

Coefficient de perte de charge linéique  $\lambda = 0,045$

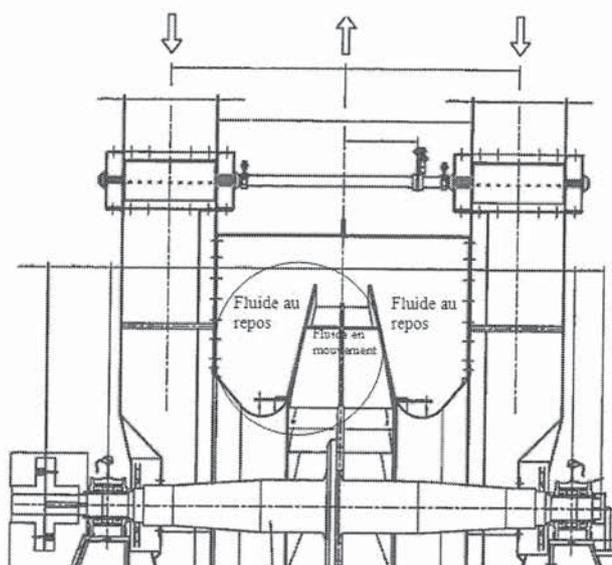
- 1-4-2 Evaluer la perte de charge  $J$  à l'intérieur de la roue. En déduire la perte de pression qui en résulte.

1-4-3 On doit de plus tenir compte de la singularité à l'entrée de la roue caractérisée par un coefficient de perte de charge singulière  $\xi = 0,15$ . On donne  $d = 0,6$  m. Evaluer la perte de pression correspondante. En déduire la différence de pression que l'on peut enregistrer entre l'entrée et la sortie du ventilateur. Comparer cette valeur avec celle donnée en annexe 1 sur la courbe caractéristique du ventilateur. Commenter.

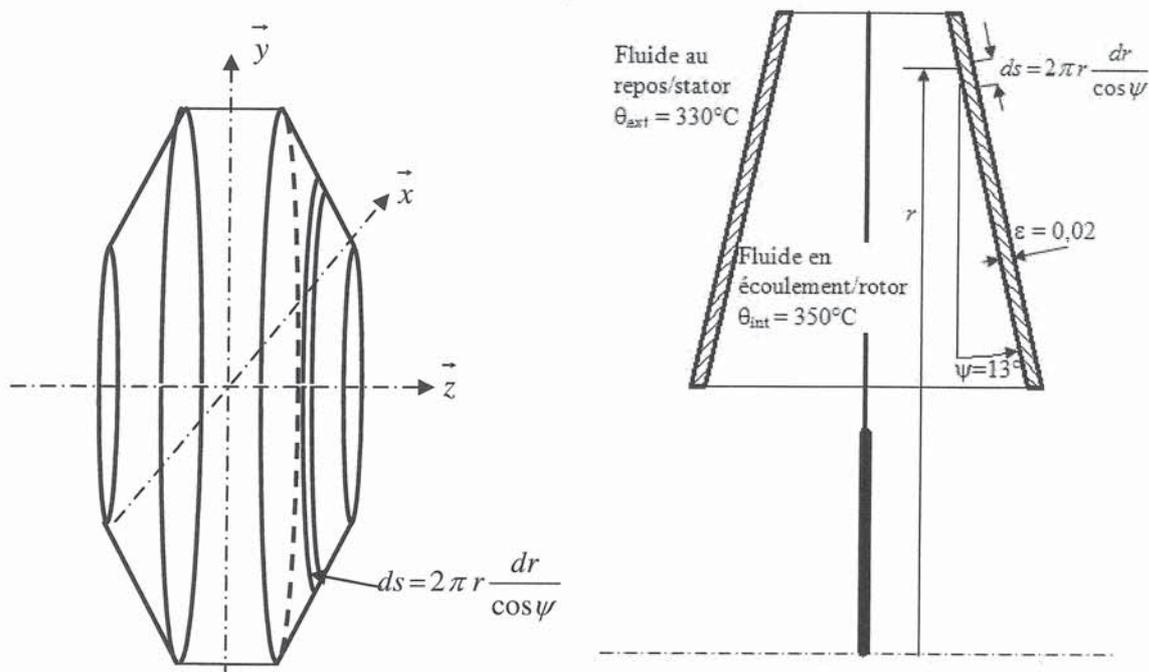
## PARTIE 2 – ECHANGES THERMIQUES

Il s'agit d'évaluer les échanges thermiques à l'intérieur du ventilateur afin de vérifier si l'hypothèse d'écoulement adiabatique dans le rotor est justifiée.

Pour cela, on se place en régime établi et on considère que l'air qui s'écoule à l'intérieur de la roue est à température constante de 350°C. On ne tiendra pas compte du rayonnement thermique. Des données facilitant la résolution sont fournies en annexe 2.



- 2-1 On mesure dans la zone où le fluide est au repos une température homogène de 330°C. Cette situation permet de mettre en évidence un flux de chaleur passant à travers l'épaisseur de la roue que l'on cherchera à quantifier plus loin. Expliquer de façon qualitative les raisons qui peuvent faire qu'il existe une différence de température entre le fluide en écoulement dans la roue et celui au repos à l'extérieur de cette roue.
- 2-2 On modélise la zone entourée de la façon suivante :



Identifier les phénomènes thermiques mis en jeu entre la zone fluide en écoulement et la zone fluide au repos par rapport au carter.

- 2-3 On se place à un rayon  $r$  donné et on considère une surface élémentaire

$$ds = 2\pi r \frac{dr}{\cos\psi}$$

Etablir le modèle mathématique donnant l'expression du flux de chaleur élémentaire  $d\phi$  traversant cette surface en fonction de la différence de température, de la géométrie et des coefficients d'échange concernés.

- 2-4 Afin d'approcher le niveau d'échange, on se place au rayon moyen en considérant les moyennes des valeurs concernées par le modèle développé ci-dessus. On ne s'intéressera dans cette question qu'à l'écoulement dans une demi roue.  
Calculer la valeur du flux échangé à ce niveau. Conclure quant à l'hypothèse d'adiabaticité de l'écoulement dans la roue.

$\varepsilon$	Epaisseur de la tôle de la roue	m	0,02
$R_m$	Rayon moyen	m	1,575
$\psi$	Inclinaison paroi roue	degré	13
$N$	Vitesse rotation	tr/min	736
$V_2$	Vitesse absolue du fluide en sortie	m/s	143
$U_m$	$U_{moyen}$	m/s	121,4
$W_m$	$W_{moyen}$	m/s	80
$D_{hm}$	Diamètre hydraulique au rayon moyen	m	0,3
$\rho_{air350}$	Masse volumique de l'air (350°C)	kg/m <sup>3</sup>	0,59
$\lambda$	Lambda acier (350°C)	W/m.K	42
$h_{ext}$	Coefficient de convection extérieur roue	W/m <sup>2</sup> .K	90
$\theta_{ext}$	Température extérieure	°C	330
$\theta_{int}$	Température intérieure	°C	350
$\lambda_{330}$	Lambda air 330°C	W/m.K	0,047
$\lambda_{350}$	Lambda air 350°C	W/m.K	0,045
$\nu_{ext}$	Viscosité cinématique air extérieur	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	60
$\nu_{int}$	Viscosité cinématique air intérieur	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	50
$c_{p330}$	$c_p$ air 330°C	J/kg.K	1063
$c_{p350}$	$c_p$ air 350°C	J/kg.K	1050

## PARTIE 3 – STABILITE DU ROTOR

Certains clients demandent au fabricant du ventilateur d'équiper leur installation de paliers hydrodynamiques à la place de paliers à roulements. Il faut donc s'assurer que cette transformation ne modifie pas le comportement dynamique de la ligne d'arbre. Pour cette étude l'approche proposée négligera l'amortissement fluide au niveau des paliers.

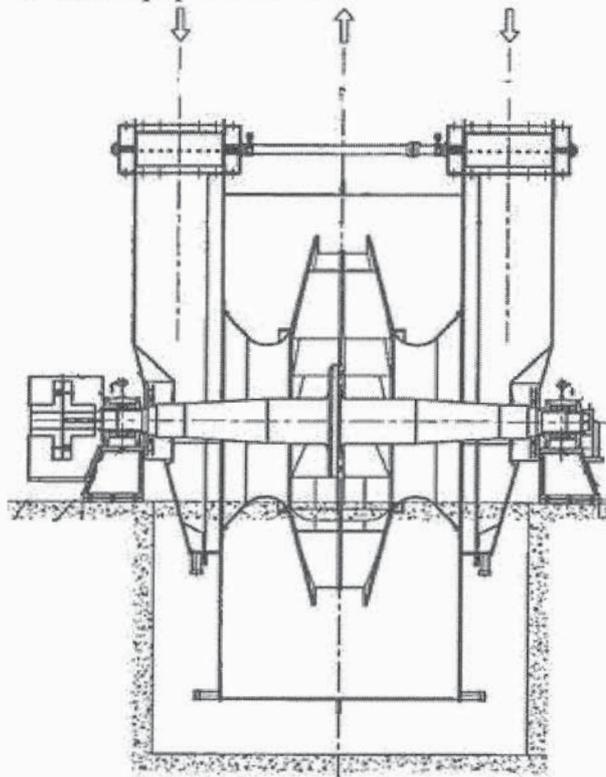
Dans une telle adaptation, il est fréquent que le ventilateur soit équipé d'un système d'équilibrage automatique.

On cherche dans cette partie à étudier :

- la stabilité du mouvement du rotor en tenant compte du comportement des paliers fluides (partie 3-1)
- un dispositif d'équilibrage dynamique (partie 3-2)

### Partie 3-1 : Etude du mouvement du rotor

Le rotor est constitué de l'arbre équipé de la roue du ventilateur sur ses paliers.



Le rotor du ventilateur est modélisé de la façon suivante :

Le repère  $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  est supposé galiléen et l'axe  $\vec{Y}_0$  vertical ascendant.

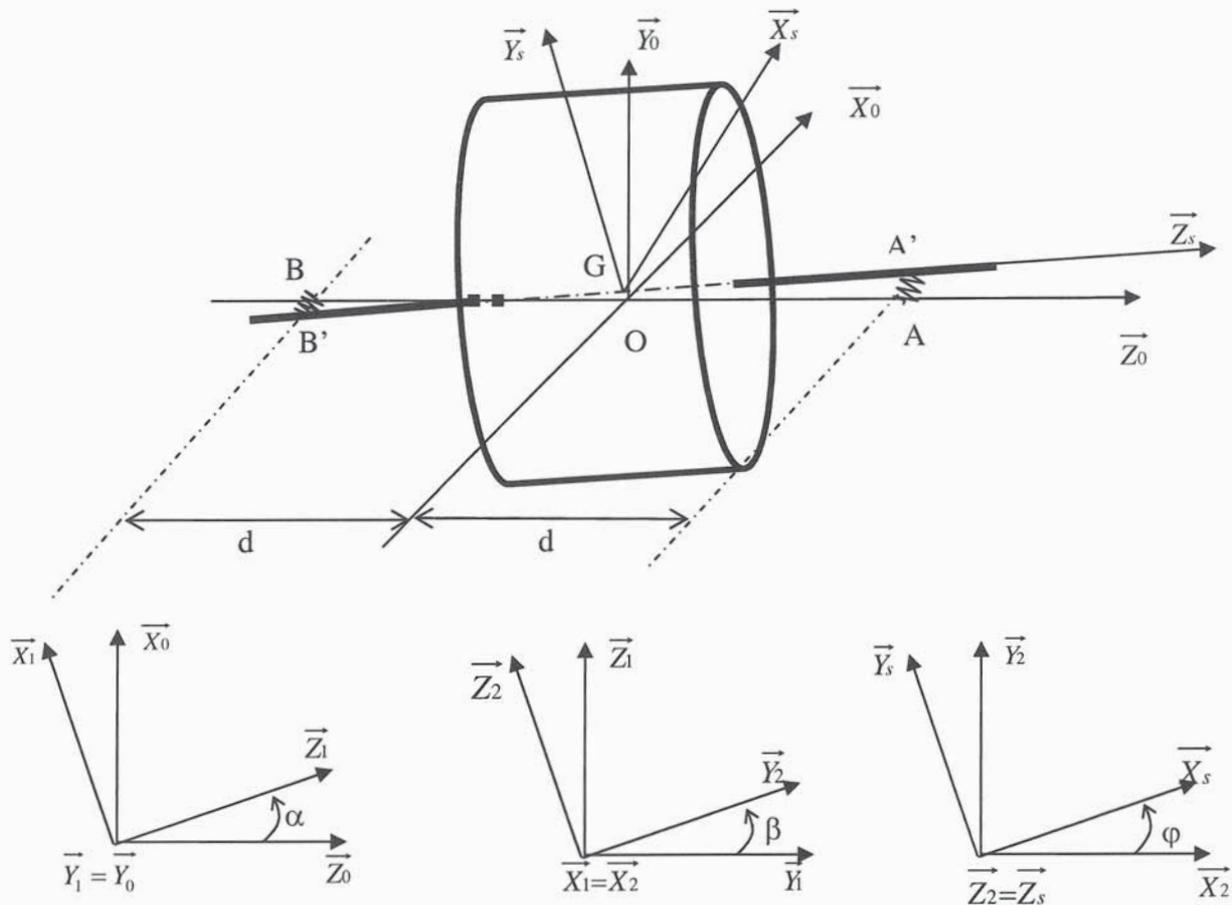
Le solide S est constitué :

- d'un cylindre de masse  $M$  de centre de masse  $G$  et

$$I_G = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_S}$$

$$\vec{OG} = x\vec{X}_0 + y\vec{Y}_0$$

- o d'une masse ponctuelle  $m$  située en P :  $\vec{GP} = a.\vec{X}_s + c.\vec{Z}_s$ . Celle-ci correspond un à balourd qui se crée lors du fonctionnement par des dépôts et agglomérats de particules (poussières) contenues dans le gaz aspiré.



L'action de l'air sur le rotor est modélisée par

$$\tau(\text{air}/S) = \begin{cases} \vec{R}(\text{air}/S) = X.\vec{X}_2 + Y.\vec{Y}_2 \\ \vec{M}_G(\text{air}/S) = C_G.\vec{Z}_s \end{cases}$$

L'action du moteur sur le rotor se réduit à un couple  $\vec{M}_G = M_G.\vec{Z}_s$ .

Au niveau du palier A l'action de l'huile sur le rotor se réduit à

$$\tau(\text{huile}/S) = \begin{cases} \vec{R}(\text{huile}/S) = X_A.\vec{X}_0 + Y_A.\vec{Y}_0 \\ \vec{M}_A(\text{huile}/S) = C_A.\vec{Z}_s \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{OA} = d.\vec{Z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{GA}' = d.\vec{Z}_s$$

Le comportement du palier se traduit par

$$X_A = -K_{xx}(\vec{AA}'.\vec{X}_0) - K_{xy}(\vec{AA}'.\vec{Y}_0)$$

$$Y_A = -K_{yx}(\vec{AA}'.\vec{X}_0) - K_{yy}(\vec{AA}'.\vec{Y}_0)$$

Au niveau du palier B l'action de l'huile sur le rotor se réduit à

$$\tau(\text{huile}/S) = \begin{cases} \vec{R}(\text{huile}/S) = X_B.\vec{X}_0 + Y_B.\vec{Y}_0 \\ \vec{M}_B(\text{huile}/S) = C_B.\vec{Z}_s \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{OB} = -d.\vec{Z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{GB}' = -d.\vec{Z}_s$$

Le comportement du palier se traduit par

$$X_B = -K_{xx}(\vec{BB}'.\vec{X}_0) - K_{xy}(\vec{BB}'.\vec{Y}_0)$$

$$Y_B = -K_{yx}(\vec{BB}'.\vec{X}_0) - K_{yy}(\vec{BB}'.\vec{Y}_0)$$

On considère :

- les variations de  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  et leurs dérivées successives comme des infiniment petits du premier ordre,
- la fréquence de rotation constante  $\left( \dot{\varphi} = \omega = \frac{\pi N}{30} = cste \right)$

On développera les calculs en ne gardant que des termes du premier ordre dans les expressions et équations.

**Valeurs numériques :**

$M = 14\,000 \text{ kg}$  ;  $m = 20 \text{ kg}$  ;  
 $A = 9776 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  ;  $C = 17\,775 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .  
 $a = 1 \text{ m}$  ;  $c = 0,1 \text{ m}$ .  
 $K_{xx} = 4150 \text{ kN/m}$  ;  $K_{xy} = -170 \text{ kN/m}$  ;  $K_{yy} = 4750 \text{ kN/m}$  ;  $K_{yx} = -50 \text{ kN/m}$   
 $d = 2,3 \text{ m}$   
 $N = 736 \text{ tr/min}$ .

3-1-1 Donner l'expression analytique des torseurs d'action en A et B en fonction des paramètres du problème :  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

3-1-2 Ecrire les équations du mouvement du rotor selon  $\overline{X_0}$  et  $\overline{Y_0}$  en utilisant le formalisme de votre choix. On précisera clairement les étapes utilisées.

3-1-3 Montrer que sous certaines conditions, ces équations peuvent se mettre sous la forme :

$$(M + m)\ddot{\xi} + 2K_{xx}\xi + 2K_{xy}\lambda = m a \omega^2 \cos \omega t$$

$$(M + m)\ddot{\lambda} + 2K_{yx}\xi + 2K_{yy}\lambda = m a \omega^2 \sin \omega t$$

On précisera ce que représentent  $\xi$  et  $\lambda$  en fonction des paramètres du problème. Comment justifier les simplifications utilisées ?

3-1-4 Conclure quant à la stabilité des mouvements en  $x$  et  $y$  du rotor.

### Partie 3-2 : Etude d'un dispositif d'équilibrage dynamique.

L'appareil étudié assure la ventilation d'un four de cimenterie. Le fluide véhiculé est chargé de particules solides qui se déposent progressivement sur les aubages de façon non uniforme ce qui provoque un déséquilibre du rotor. Il arrive parfois que les dépôts se détachent brutalement et cela occasionne de violents déséquilibres pouvant être dangereux pour l'installation.

Afin de limiter les fâcheuses conséquences, un dispositif contrôle en continu l'état d'équilibre ou de déséquilibre du ventilateur et procède à des corrections visant à rétablir une situation convenable. Nous allons examiner la partie mécanique du système automatique d'équilibrage dynamique dont le principe est le suivant :

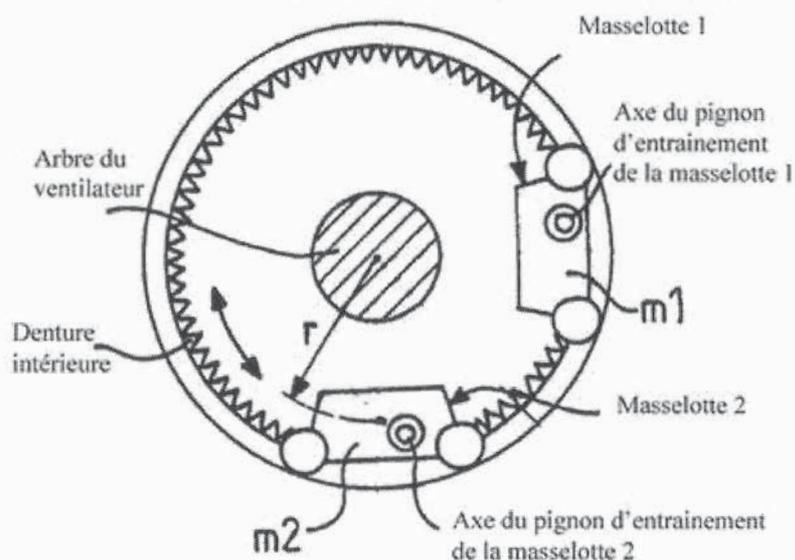
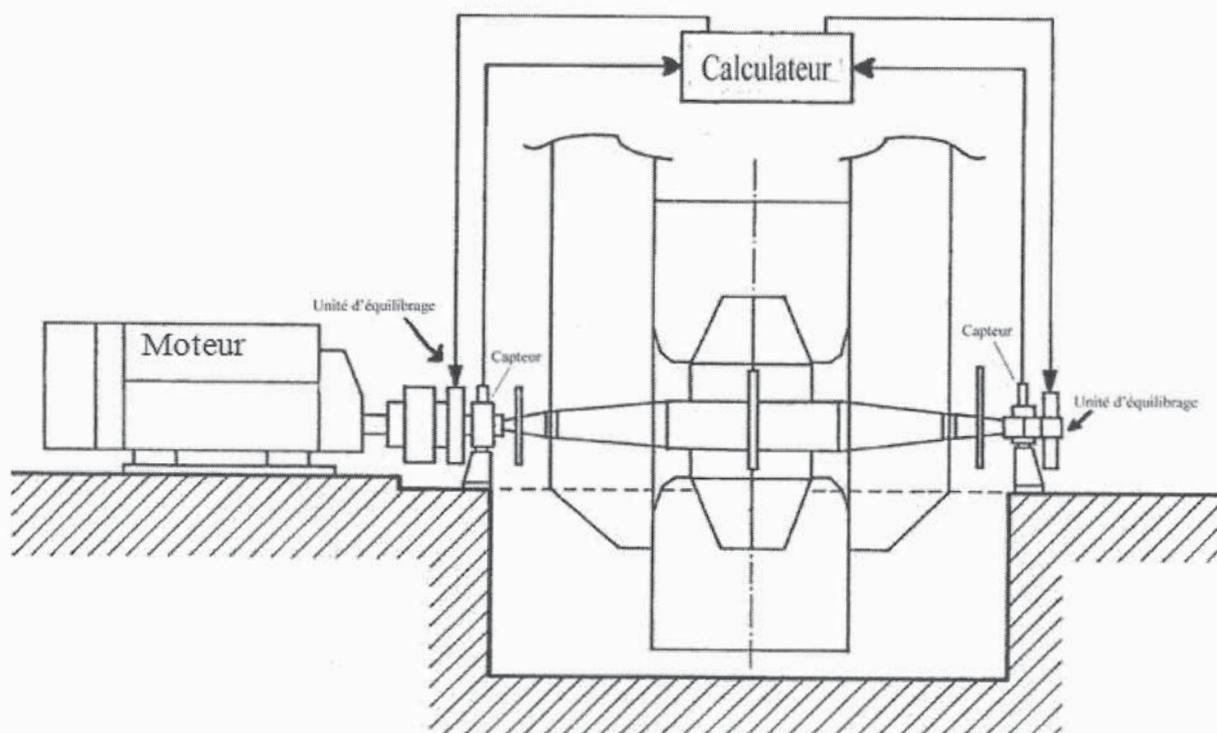


Schéma de principe d'une unité d'équilibrage

On cherche à connaître quelles doivent être les positions des masselottes (au nombre de deux dans chaque unité d'équilibrage) afin que le système en rotation, dont la répartition de la matière est initialement quelconque, soit parfaitement équilibré.

3-2-1 Proposer un paramétrage du système.

3-2-2 Énoncer les propriétés que doit satisfaire un système en rotation autour d'un axe fixe pour être équilibré. En déduire les conditions sur les masselottes (en particulier masse et position) qui permettent d'assurer l'équilibrage.

3-2-3 Faire des commentaires sur les possibilités d'avoir une solution unique à partir du système d'équations obtenu précédemment. Quelle proposition peut-on faire ?