Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

ministère
éducation
nationale

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Secrétariat Général
Direction générale des ressources humaines
Sous-direction du recrutement

Concours du second degré — Rapport de jury
Session 2010

CAPES EXTERNE DE MATHÉMATIQUES

Rapport de jury présenté par M. Mohamed KRIR
Président de jury

Les rapports des jurys sont établis sous la responsabilité des présidents de jury

CONSEILS PRATIQUES AUX FUTURS CANDIDATS

Il est recommandé aux futurs candidats de s'informer à l'avance sur les modalités des concours de recrutement en général et sur celles particulières au CAPES externe et au CAFEP-CAPES de mathématiques.

Les renseignements généraux (les conditions d'accès ; la préparation ; le déroulement du concours ; la carrière dans l'enseignement secondaire) se trouvent sur le site du Ministère

http://education.gouv.fr

rubrique SIAC2.

Les informations spécifiques (programmes ; nature des épreuves) sont publiées dans le bulletin officiel de l'éducation nationale, publication qui informe les enseignants : carrière, programmes, nominations, vacances de postes, concours, etc. Ces renseignements se trouvent également, pour l'essentiel, dans le rapport du concours.

Le jury, pour faciliter la recherche d'information émanant des candidats et des formateurs, a en outre créé un site à l'adresse :

http://capes-math.org

sur lequel il a réuni l'essentiel des informations utiles à la préparation au concours.

ATTENTION : Les informations figurant sur ce site n'ont pas de caractère officiel ; seules les informations délivrées directement par la DGRH et par le Ministère ont valeur officielle.

« LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY »

Table des matières

1 PRÉSENTATION DU CONCOURS 2010

1.1 Composition du jury.

Par arrêté en date du 11 janvier 2010, la composition du jury est la suivante :

M.	KRIR	Mohamed	Maître de Conférences, Président	Versailles
M.	ANDRIEUX	Jean-Claude	Professeur Agrégé, Secrétaire général	Dijon
Mme	FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences, Vice-présidente	Reims
M.	MORENO-SOCIAS	Guillaume	Maître de Conférences, Vice-président	Versailles
M.	SORBE	Xavier	IGEN, Vice-président	Paris
Mme	ABADIE	Marie-Luce	IA-IPR	Créteil
M.	AMMAR KHODJA	Farid	Maître de conférences	Besançon
Mme	ANDRÉ	Stéphanie	Professeur Agrégé	Versailles
M.	ARTIGUES	Christian	IA-IPR	Bordeaux
M.	ARTIGUES	Jean-Paul	Professeur de Chaire Supérieure	Rouen
M.	BAJI	Bruno	Professeur Agrégé	Limoges
Mme	BANTEGNIES	Florence	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
Mme	BARACHET	Françoise	IA-IPR	Clermont-Ferrand
M.	BARLIER	Philippe	Professeur Agrégé Hors Classe	Nantes
M.	BARNET	Christophe	IA-IPR	Bordeaux
Mme	BARRIÉ	Mireille	Professeur Agrégé	Versailles
M.	BERNARD	Frédéric	Professeur Agrégé	Montpellier
M.	BILAND	Erwan	Professeur Agrégé	Paris
M.	BILLAULT	Éric	Professeur Agrégé	Rennes
Mme	BLOND	Élisabeth	Professeur Agrégé	Versailles
M.	BOURHRARA	Mostafa	Professeur Agrégé	Poitiers
Mme	BOUTON-DROUHIN	Catherine	Professeur de Chaire Supérieure	Versailles
Mme	BOZON	Marie-Pierre	Professeur Agrégé	Montpellier
M.	BRAUNER	Joël	Professeur de Chaire Supérieure	Nancy-Metz
M.	BRETONNIÈRE	Laurent	Professeur Agrégé	Caen
M.	BRISOUX	François	Professeur Agrégé	Strasbourg
M.	CAPY	François	IA-IPR	Rouen
Mme	CORTEZ	Aurélie	Maître de conférences	Versailles
M.	COUCHOURON	Jean-François	Maître de conférences	Nancy-Metz
Mme	COURBON	Denise	IA-IPR	Lyon
Mme	CROUZIER	Anne	Professeur Agrégé	Clermont-Ferrand
M.	DE BIÈVRE	Stéphan	Professeur des Universités	Lille
M.	DE SAINT JULIEN	Arnaud	Professeur Agrégé	Montpellier
Mme	DEAT	Joëlle	IA-IPR	Versailles
M.	DEBARGE	Régis	Professeur Agrégé	Reims
Mme	DESREUMAUX	Caroline	Professeur Agrégé	Lille

M.	DESROUSSEAUX	Pierre-Antoine	Professeur Agrégé	Montpellier
M.	DIGER	Alain	IA-IPR	Orléans-Tours
M.	DOMBRY	Clément	Maître de conférences	Poitiers
M.	DUBOULOZ	Georges	Professeur Agrégé	Grenoble
Mme	DUCOURTIOUX	Catherine	Maître de conférences	Corse
Mme	DUDOGNON	Marylène	Professeur Agrégé	Poitiers
M.	ESCOFFIER	Jérôme	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
Mme	ÉVRARD	Sabine	Maître de conférences	Amiens
Mme	EYNARD	Danièle	Professeur Agrégé	Clermont-Ferrand
M.	FAURE	Ludovic	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	GARCIA	Gilles	Professeur Agrégé	Paris
Mme	GERARD	Danièle	Professeur Agrégé	Toulouse
M.	GEWIRTZ	Alexander	Professeur Agrégé	Amiens
M.	GLIÈRE	André-Jean	Professeur Agrégé	Nantes
M.	GOSSE	Michel	IA-IPR	Lille
M.	GRAS	Hervé	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	GRILLOT	Michèle	Maître de conférences	Orléans-Tours
M.	HARLÉ	Jean	Professeur de Chaire Supérieure	Amiens
M.	HASSAN	Azzam	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	HÉZARD	David	Professeur Agrégé	Orléans-Tours
M.	HONVAULT	Pascal	Maître de conférences	Lille
M.	HUBERT	Nicolas	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	HUG	Patricia	Professeur Agrégé	Versailles
M.	JAMET	Pierre-Yves	Professeur de Chaire Supérieure	Aix-Marseille
Mme	KOWALSKA-CHASSAING	Anna	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
Mme	LACRESSE	Christelle	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	LAGRAIS	Alain	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	LANGLOIS	Catherine	Professeur Agrégé	Lyon
M.	LAOUES	Mourad	Professeur Agrégé	Dijon
M.	LASSALLE	Olivier	IA-IPR	Créteil
Mlle	LAURENT	Céline	Professeur Agrégé	Versailles
M.	LE FLOCH	Laurent	Maître de conférences	Poitiers
M.	LEBRUN	Guillaume	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	LÉCUREUX-TÊTU	Marie-Hélène	Professeur Agrégé	Toulouse
M.	LEGRY	Ludovic	IA-IPR	Amiens
M.	LEMPEREUR DE GUERNY	Robert	Professeur Agrégé	Versailles
M.	LETORT	Pierre-Yves	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	LOUVRIER	Pascale	Professeur Agrégé	Caen
Mme	MALLÉGOL	Pascale	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
Mme	MALLET	Nathalie	Professeur Agrégé	Poitiers
M.	MARINO	Alexandre	Professeur Agrégé	Nice
Mme	MAROTTE	Fabienne	Maître de conférences	Poitiers
M.	MARTEAU	Jean-Luc	IA-IPR	Lyon
Mme	MARTINEZ-LABROUSSE	Isabelle	Professeur Agrégé	Lille
M.	MASSELIN	Vincent	Professeur Agrégé	Rouen
Mme	MÉDARD	Natacha	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	MICHALAK	Pierre	IA-IPR	Versailles
Mme	MICHAU	Nadine	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	MOUCAUD	Michèle	Professeur Agrégé	Toulouse
M.	NADIR	Hachemi	Professeur Agrégé	Nantes

M.	NEVADO	Alain	IA-IPR	Toulouse
Mme	NIKOLSKI	Lioudmila	Maître de conférences	Bordeaux
M.	NIN	Gérard	Maître de conférences	Aix-Marseille
M.	NOÉ	Laurent	IA-IPR	Aix-Marseille
M.	PAGOTTO	Éric	IA-IPR	Caen
M.	PASSERAT	Stéphane	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	PAYET	Willy	Professeur Agrégé	La Réunion
M.	PICAMOLES	Xavier	Professeur Agrégé	Montpellier
Mme	POLLAK	Yolaine	Professeur Agrégé	Versailles
M.	POMAGEOT	Loïc	Professeur Agrégé	Amiens
Mme	RASKINE	Anne	Professeur Agrégé	Créteil
M.	RENIER	Guillaume	Professeur Agrégé	Versailles
M.	ROLLAND	Hervé	Professeur Agrégé	Rennes
M.	ROMOLI	David	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	ROUANET	Véronique	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	ROUDNEFF	Évelyne	IA-IPR	Versailles
M.	ROUX	Hervé	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
Mme	SABBAN	Chloé	Professeur Agrégé	Paris
Mme	SALVI	Karine	Professeur Agrégé	Lille
M.	SASSI	Taoufik	Professeur des Universités	Caen
M.	SCATTON	Philippe	IA-IPR	Reims
M.	SIDOKPOHOU	Olivier	Professeur Agrégé	Paris
M.	SIGWARD	Éric	IA-IPR	Strasbourg
Mlle	SLAMA	Caroline	Professeur Agrégé	Versailles
M.	SOUVILLE	Jean	Maître de conférences	Poitiers
Mlle	STRAUB	Odile	IA-IPR	Lyon
M.	SUEUR	Franck	Maître de conférences	Paris
Mme	SZWARCBAUM	Élia	Professeur Agrégé	Versailles
M.	TERRACHER	Pierre	Maître de conférences	Bordeaux
M.	TESTUD	Benoît	Maître de conférences	Amiens
M.	TOUPANCE	Pierre-Alain	Professeur Agrégé	Lyon
Mme	TRAYNARD	Alice	Professeur Agrégé	Ministère Affaires Étrangères
Mme	TRÉFOND	Marie-Christine	Professeur Agrégé	Amiens
M.	TRUCHAN	Alain	IA-IPR	Lyon
M.	VANROYEN	Jean-Philippe	Professeur Agrégé	Lille
M.	ZARRABI	Mohamed	Maître de conférences	Bordeaux
Mme	ZWERTVAEGHER	Karine	Professeur Agrégé	Lille

1.2 Programme du concours

Le texte en vigueur, paru au B.O. n° 8 spécial du 24 mai 2001, a été modifié par le B.O. n° 5 spécial du 20 mai 2004. Les modifications, mineures, visaient essentiellement à mettre en cohérence le programme avec les évolutions des programmes des classes de lycée. Le texte ci-dessous tient compte de ces modifications.

ÉPREUVES ÉCRITES

Le programme est formé des titres A et B de l'annexe I.

ÉPREUVES ORALES D'ÉXPOSÉ

Le programme est formé du titre A augmenté des paragraphes suivants du titre B de l'annexe I :
1.II. « Ensembles, relations, applications. »
2.I.3. « Structures des ensembles de nombres. »
2.III.5. « Calcul matriciel », alinéa b).
2.IV.2. « Géométrie vectorielle », alinéa e).
2.V.2. « Configurations. »
2.V.3. « Transformations. »
2.V.4. « Emploi des nombres complexes en géométrie », alinéas a), c) et d).
3.I.1. « Suites de nombres réels et de nombres complexes », alinéas a), b), d), e).
3.I.2. « Fonctions d'une variable réelle. »
3.II.2. « Dérivation », dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
3.II.3. « Intégration sur un intervalle compact », dans ce même cas.
3.II.4. « Étude locale de fonctions. »
3.IV.2. « Équations linéaires scalaires », alinéa b).
3.VI.1. « Courbes et surfaces », alinéa a).
4.2. « Variables aléatoires », alinéas a) et c).

ÉPREUVES ORALES SUR DOSSIER

Le programme est formé du titre A de l'annexe I.

UTILISATION DES CALCULATRICES

Circulaire du 16 Novembre 1999 n° 99-186 parue au BOÉN n° 42 du 25 novembre 1999.

ANNEXE I

A. Programmes de l'enseignement secondaire

1. La réunion des programmes de mathématiques des collèges et des lycées d'enseignement général et technologique en vigueur au 1er janvier de l'année du concours et de ceux en vigueur au 1er janvier de l'année précédente.
2. L'utilisation des calculatrices électroniques est définie par les arrêtés du 15 mai 1997 complétés par la circulaire n° 99-018 du 01-02-1999 parue au BOÉN n° 6 du 11-02-1999 ainsi que la circulaire du 16-11-1999.

Dans ce cadre, les candidats doivent se munir d'une calculatrice scientifique programmable, alphanumérique ou non, et graphique. Ils doivent savoir utiliser leur calculatrice dans les situations

numériques et algorithmiques liées au programme. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :
– Savoir programmer une instruction d'affectation.
– Savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres.
– Savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches.
– Savoir programmer une instruction séquentielle, alternative ou itérative.
– Savoir afficher à l'écran la courbe représentative d'une fonction.
Ils doivent en outre munir leur calculatrice de programmes permettant :
– la recherche de solutions approchées d'une équation numérique à une variable ;
– le calcul de valeurs approchées d'une intégrale.

B. Programme complémentaire

Comme il est indiqué dans les instructions, les problèmes et les méthodes numériques et les aspects algorithmiques et informatiques (construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leur performance, rédaction méthodique de programmes) sont largement exploités. Dans le texte du programme, ils sont représentés par le signe §.

1. NOTIONS SUR LA LOGIQUE ET LES ENSEMBLES

Aucun exposé de logique formelle n'est envisagé.

I. Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique.

Occurrences libres (ou parlantes) et occurrences liées (ou muettes) d'une variable dans une expression mathématique ; signes mutificateurs usuels ($\int \cdots \mathrm{d} \ldots$, $\sum$, $\mapsto$, $\{\cdots \mid \cdots\}$; $\forall$, $\exists$; etc.) ; mutifications implicites.

Calcul propositionnel : connecteurs logiques ; tables de vérité ; tautologies.

Utilisation des connecteurs et des quantificateurs dans le discours mathématique ; lien entre connecteurs logiques et opérations ou relations ensemblistes.

Pratique du raisonnement mathématique : hypothèses, conclusions, quelques figures usuelles du raisonnement (raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, utilisation d'exemples ou de contre-exemples, etc.) ; pour les énoncés sous forme d'implication, distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, entre proposition directe et proposition réciproque ; cas particuliers de la recherche de lieux géométriques, d'ensembles de solutions d'équations.

II. Ensembles, relations, applications.

Opérations ensemblistes usuelles ; produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Relations et applications ; lois de composition internes ou externes.

Ensemble des parties d'un ensemble ; image directe ou image réciproque d'une partie par une application ; comportement des opérations d'image directe et d'image réciproque vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Familles d'ensembles ; réunions et intersections « infinies ».

Relations d'ordre ; majorants, borne supérieure ...
Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Raisonnement par récurrence.

Relations d'équivalence ; classes d'équivalence, partition associée, ensemble quotient, compatibilité d'une loi de composition avec une relation d'équivalence (passage au quotient).

Construction de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$.

III. Rudiments de cardinalité.

Équipotence de deux ensembles ; classe des ensembles équipotents à un ensemble donné ; notion de cardinal.

Théorème de Cantor (« aucun ensemble n'est équipotent à l'ensemble de ses parties »).

Fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble ; équipotence entre l'ensemble des parties d'un ensemble E et l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.

Ensembles finis et infinis.

Ensembles dénombrables : exemples usuels ($\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des suites finies d'entiers, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels, l'ensemble des nombres algébriques, etc.).

Puissance du continu (cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou de $\mathbb{R}$) ; non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

2. ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

I. Nombres et structures

1. Groupes

a) Groupes, morphismes de groupes. Sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques. Ordre d'un élément ; théorème de Lagrange. Image et noyau d'un morphisme de groupes. Sous-groupes distingués, groupe quotient. Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Éléments conjugués.

§ b) Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Cycles ; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature d'une permutation, groupe alterné.

2. Anneaux et corps

Anneaux (unitaires), morphismes d'anneaux. Sous-anneaux.
Anneaux commutatifs, anneaux intègres ; idéaux, idéaux principaux ; anneaux quotients. Corps (commutatifs), sous-corps ; caractéristique d'un corps.

3. Structure des ensembles de nombres

a) Anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs (ou rationnels). L'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre ; divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne ; sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux ; théorème de Bézout.

§ b) Nombres premiers ; décomposition en facteurs premiers.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

c) Congruences ; anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, caractérisation des éléments inversibles.

d) Corps des rationnels, corps des réels, corps des complexes.

Il. Polynômes et fractions rationnelles

Dans ce chapitre, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Polynômes à une indéterminée

§ a) Algèbre $K[X]$; degré d'un polynôme, terme dominant, polynôme unitaire.

L'anneau $K[X]$ est intègre ; divisibilité dans $K[X]$. Division euclidienne.

Les idéaux de $K[X]$ sont principaux ; théorème de Bézout.

Polynômes irréductibles ; décomposition en facteurs irréductibles.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

b) Fonctions polynômes

Racines (ou zéros) d'un polynôme, ordre de multiplicité. Polynômes scindés.

Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes.

Équations algébriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

c) Dérivation des polynômes ; formule de Taylor.

d) Théorème de d'Alembert ; polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$. Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Fractions rationnelles à une indéterminée

a) Corps $K(X)$; forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle.

b) Fonctions rationnelles : pôles, zéros ; ordre d'un pôle ou d'un zéro.

c) Décomposition en éléments simples. Cas du corps $\mathbb{C}$ et du corps $\mathbb{R}$.

d) Exemples simples de problèmes d'élimination.

III. Algèbre linéaire

Dans cette partie, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels. Applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes. Formes linéaires. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$, algèbre $\mathcal{L}(E)$, groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$. Espace vectoriel produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

b) Sous-espaces vectoriels ; image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs.

c) Familles libres, familles génératrices, bases.

d) Étant donné une application linéaire u de E dans F et un supplémentaire E' de $\ker u$ dans E, u définit un isomorphisme de E' sur $\operatorname{im} u$.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Espaces admettant une famille génératrice finie. Théorème de la base incomplète, existence de bases ; dimension. Dimension d'un sous-espace, rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires. Dimension d'une somme directe.

b) Rang d'une application linéaire ; formule du rang, caractérisation des isomorphismes.

c) Formes linéaires et hyperplans, équation d'un hyperplan.

d) Dualité. Bases associées d'un espace E et de son dual E^*. Orthogonal dans E^* d'une partie de E, orthogonal dans E d'une partie de E^* : dimension de l'orthogonal, double orthogonal.

3. Matrices

a) Espace vectoriel $M_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(K^q, K^p)$ et $M_{p,q}(K)$. Produit matriciel, transposition. Algèbre $M_n(K)$; matrices inversibles, groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(K)$. Matrices symétriques, antisymétriques.

b) Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre, ces espaces étant munis de bases ; matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel muni d'une base, matrice d'une famille finie de vecteurs relativement à une base. Matrice de passage (la matrice de passage de la base B à la base C est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans B du j-ième vecteur de C). Effet d'un changement de base(s) sur la matrice d'une application linéaire.

c) Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme.

d) Rang d'une matrice. Utilisation de matrices carrées extraites pour la détermination du rang. Matrices équivalentes. Caractérisation à l'aide du rang. Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice $I_r = (a_{ij})$, définie par les relations $a_{jj} = 1$ si $1 \leqslant j \leqslant r$, et $a_{ij} = 0$ dans tous les autres cas. Rang de la transposée d'une matrice.

e) Systèmes d'équations linéaires, rang. Conditions de compatibilité, systèmes de Cramer.

4. Applications multilinéaires, déterminants

a) Définition des applications multilinéaires, des applications symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n, critère d'indépendance.

c) Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Mineurs, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

e) Applications des déterminants, expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible, formules de Cramer ; orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

f) En relation avec la géométrie, application des déterminants à l'étude des systèmes linéaires de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

5. Calcul matriciel

§ a) Exemples de calculs par blocs. Exemples d'emploi de normes matricielles. Conditionnement d'une matrice.

§ b) Opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice ; addition d'un multiple d'une ligne à une autre, multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, échange de deux lignes. Applications à la résolution des systèmes linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées et au calcul du rang.

Algorithme du pivot de Gauß ; pivot partiel, pivot total.

6. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Sous-espaces stables par un endomorphisme. Si u et v commutent, $\operatorname{im} u$ et $\ker u$ sont stables par v. Polynômes d'un endomorphisme ; théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont premiers entre eux, $\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.

b) Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.

c) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynôme annulant un endomorphisme ; lien avec le spectre.

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Théorème de Cayley–Hamilton.

Endomorphismes diagonalisables ; l'espace est somme directe des sous-espaces propres. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Sous-espaces caractéristiques. Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé peut être trigonalisé : l'espace est somme directe des sous-espaces caractéristiques F_j et il existe une base de chaque F_j telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par u soit triangulaire supérieure ; en outre, la dimension de F_j est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_j. Un tel endomorphisme u s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u = d + n$, où d est diagonalisable, n est nilpotent, et $nd = dn$.

§ d) Valeurs propres d'une matrice carrée, vecteurs (colonnes) propres. Matrices semblables. Diagonalisation, trigonalisation des matrices carrées. Exemples d'emploi de décomposition en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

IV. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

(Cf. analyse 3.I.6 espaces préhilbertiens réels ou complexes.)

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espaces euclidiens

a) Isomorphisme canonique avec le dual.

Sommes directes orthogonales. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan. Projecteurs et symétries orthogonales.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes symétriques, antisymétriques.

c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$, groupe des rotations (ou spécial orthogonal) $\mathrm{SO}(E)$. Matrices orthogonales. Groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$. Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Changements de base orthonormale.

d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.

2. Géométrie vectorielle euclidienne

a) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$.

b) Dans le plan euclidien orienté ($n = 2$) : matrice d'une rotation ; angle d'une rotation. Morphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{SO}(2)$.

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

c) Dans l'espace euclidien orienté ($n = 3$) :

Axe et angle d'une rotation. Les demi-tours engendrent $\mathrm{SO}(3)$.

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

d) En dimension 2 ou 3 : groupe des similitudes ; similitudes directes. Rapport d'une similitude, automorphisme orthogonal associé.

e) Produit vectoriel en dimension 3 ; expression dans une base orthonormale directe.

3. Espaces hermitiens

a) Sommes directes orthogonales. Projecteurs orthogonaux.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes.

c) Automorphismes unitaires. Groupe unitaire $\mathrm{U}(E)$. Groupe $\mathrm{U}(n)$ des matrices unitaires d'ordre n.

4. Calcul matriciel et normes euclidiennes

§ a) Calcul de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace et de la distance d'un point à un sous-espace. Application aux problèmes de moindres carrés ; minimisation de $\|AX - B\|^2$, où $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et rang $A = p$.

§ b) Décomposition d'un élément M de $GL_n(\mathbb{R})$ sous la forme $M = QR$, où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure, par la méthode de Householder.

5. Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens

§ a) Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique (resp. hermitien) dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique (resp. hermitienne) au moyen d'une matrice orthogonale (resp. unitaire).

La plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A est égale à $\sup_{X \neq 0} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$

b) Formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien, formes quadratiques, polarisation. Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique ; réduction dans une base orthonormale.

V. Géométrie affine et euclidienne

Dans ce chapitre, l'étude est placée dans le plan et l'espace.

1. Calcul barycentrique ; repérage

a) Sous-espaces affines ; direction d'un sous-espace affine.

b) Repères affines, coordonnées barycentriques.

c) Parties convexes.

d) Repères cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques. Changement de repère orthonormal.

2. Configurations

a) Position relative de deux plans dans l'espace. Plans perpendiculaires. Plan médiateur d'un segment.

b) Cercles dans le plan. Puissance d'un point par rapport à un cercle. Ensemble des points M dont le rapport des distances à deux points A et B est constant, ou tels que l'angle de droites (ou de demi-droites) (MA, MB) soit constant.

c) Sphères. Intersection d'une sphère et d'un plan, de deux sphères.

d) Coniques. Définitions focales, bifocales ; tangente et normale en un point ; ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale ; hyperbole rapportée à ses asymptotes. Équation cartésienne d'une conique ; réduction en repère orthonormal. Représentations paramétriques d'une conique. Équation polaire d'une conique dont un foyer est à l'origine, la directrice associée et l'excentricité étant données.

3. Transformations

a) Applications affines ; effets sur la barycentration et sur la convexité. Application linéaire associée. Projections, affinités, symétries.

b) Groupe des transformations affines. Morphisme canonique du groupe affine sur le groupe linéaire ; groupe des translations, groupe des homothéties-translations. Isomorphisme canonique du stabilisateur d'un point O sur le groupe linéaire.

c) Groupe des isométries, groupe des déplacements. Les réflexions engendrent le groupe des isométries ; dans l'espace, les demi-tours engendrent le groupe des déplacements.

Similitudes planes directes et indirectes.

d) Classification des déplacements et des isométries du plan et des déplacements de l'espace à partir de l'ensemble des points invariants.

e) Exemples de recherche du groupe des isométries laissant globalement invariante une configuration du plan ou de l'espace. Exemples de recherche de transformations affines transformant une configuration en une autre.

4. Emploi des nombres complexes en géométrie

a) Racines de l'unité et polygones réguliers.

b) Adjonction d'un point à l'infini au plan complexe.

c) Transformations $z \longmapsto a\overline{z} + b$ et $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$

§ d) Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto z - a$, $z \mapsto \mathrm{Arg}(z - a)$, $z \mapsto \left|\frac{z-a}{z-b}\right|$ et $z \mapsto \mathrm{Arg}\,\frac{z-a}{z-b}$.

Exemples de familles de courbes orthogonales associées à des transformations simples du plan complexe.

3. ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

I. Suites et fonctions

1. Suites de nombres réels et de nombres complexes

a) Suites convergentes, divergentes ; suites extraites.

Opérations algébriques sur les limites. Relations de comparaison : domination (u est dominée par v), prépondérance (u est négligeable devant v) et équivalence (u est équivalente à v). Notations $u = O(v), u = o(v)$ ou $u \ll v$, et $u \sim v$.

b) Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute suite croissante majorée de nombres réels converge. Suites adjacentes. Développement décimal d'un nombre réel. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

c) Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes converge. De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une suite convergente. Théorème du point fixe pour une application contractante d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

§ d) Étude du comportement asymptotique de suites. Approximation d'un nombre réel ou complexe au moyen de suites : rapidité de convergence et performance d'un algorithme. Accélération de convergence : méthode de Richardson–Romberg.

§ e) Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par une condition initiale.

Approximation d'une solution d'une équation numérique. Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives ; méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et d'ajustement linéaire.

2. Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

a) Limite d'une fonction en un point ; continuité en un point. Opérations sur les limites et sur les fonctions continues. Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point domination, prépondérance et équivalence.

b) Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

3. Espaces vectoriels normés, réels ou complexes

Les applications étudiées dans ce paragraphe sont définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.

a) Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Norme, distance associée, boules. Parties bornées, diamètre d'une partie.

Distance d'un point à une partie non vide. Applications lipschitziennes. Produit d'une famille finie d'espaces normés.

Exemples de normes usuelles sur les espaces de suites et de fonctions.

b) Voisinages d'un point d'un espace vectoriel normé, ouverts, fermés ; adhérence, intérieur et frontière d'une partie, parties denses, points isolés, points d'accumulation.

Distance induite sur une partie ; voisinages d'un point, ouverts et fermés d'une partie.

c) Limite d'une application suivant une partie, continuité en un point.

Applications continues, caractérisation par image réciproque des ouverts ou des fermés. Continuité d'une application composée ; homéomorphismes. Applications uniformément continues.

d) Suites convergentes, divergentes. Caractérisation des points adhérents et des applications continues à l'aide de suites.

e) Caractérisation des applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue. Normes équivalentes.

Exemples de normes matricielles.

f) Opérations algébriques sur les limites. Algèbre des fonctions numériques continues.

Algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, base canonique de cette algèbre.

4. Espaces complets

a) Suites de Cauchy, espaces complets ; $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. Parties complètes ; les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées.

b) Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé. Séries convergentes, divergentes, absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum \|u_n\| < +\infty$). Dans un espace de Banach, critère de Cauchy pour la convergence d'une série, convergence des séries absolument convergentes.

c) Théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace complet.

d) Critère de Cauchy pour les applications (existence d'une limite en un point).

5. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Équivalence des normes. Toute suite de Cauchy est convergente. De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires.

b) Définition (séquentielle) des parties compactes. Les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Image continue d'un compact, application aux fonctions numériques. Continuité uniforme d'une application continue sur un compact.

6. Espaces préhilbertiens réels ou complexes

Produit scalaire (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche), norme associée, inégalité de Cauchy–Schwarz, identité du parallélogramme.

Théorème de Pythagore. Famille orthonormale, méthode de Schmidt.

Existence d'une base orthonormale dans un espace de dimension finie. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un tel sous-espace.

Exemples de suites de polynômes orthogonaux.

7. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach

Convergence simple, convergence uniforme. Pour des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: convergence uniforme sur tout compact. Continuité et limite d'une application définie comme limite d'une suite uniformément convergente.

Critère de Cauchy de convergence uniforme. l'espace des applications bornées d'un ensemble dans un espace de Banach, muni de la norme uniforme, est complet. Il en est de même pour l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues d'un espace normé dans un espace de Banach.

8. Notions sur la connexité

Parties connexes ; les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image d'une partie connexe par une application continue, théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs ; elle implique la connexité et, dans le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, elle lui équivaut.

II. Fonctions d'une variable réelle : calcul différentiel et intégral

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle non réduit à un point et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

1. Approximation des fonctions sur un segment

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier ; approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions continues affines par morceaux et par des fonctions polynomiales. Interpolation de Lagrange.

2. Dérivation

a) Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

b) Inégalité des accroissements finis pour une fonction continue sur un intervalle et dérivable sur son intérieur ; caractérisation des fonctions constantes et des fonctions lipschitziennes. Prolongement des fonctions de classe C^1 sur un intervalle privé d'un point.

c) Extrémums locaux des fonctions dérivables à valeurs réelles. Théorème de Rolle.

d) Fonction de classe C^k (k entier naturel ou k infini) Si deux fonctions sont de classe C^k, leur composée l'est encore. Caractérisation des C^k-difféomorphismes parmi les fonctions de classe C^k. Formule de Leibniz. Définition des fonctions de classe C^k par morceaux : une fonction f est dite de classe C^k par morceaux sur un segment $[a, b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe C^k sur $[a_i, a_{i+1}]$; elle est dite de classe C^k par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est de classe C^k par morceaux.

e) Fonctions à valeurs réelles : fonctions convexes. Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1 par la croissance de la dérivée première et par la position de la courbe par rapport aux tangentes.

3. Intégration sur un intervalle compact

Les seules connaissances exigibles portent sur l'intégration des fonctions continues par morceaux.

a) Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notations : $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$; $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Linéarité. Si $a \leqslant b$, $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, inégalité de Cauchy–Schwarz.

c) Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration. Approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ par des sommes de Riemann associées à des subdivisions de $[a, b]$.

d) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral : soit f une fonction continue sur I ; pour tout point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant au point a ; inversement, pour toute primitive F de f sur I, et pour tout couple (a, b) de points de I, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. En particulier, pour toute fonction g de classe C^1 sur I, et pour tout couple (a, b) de points de I, $g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Intégration par parties, changement de variable.

Exemples de calculs de primitives.

e) Inégalité des accroissements finis relative à un couple de fonctions de classe C^1, l'une vectorielle, l'autre réelle. Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe C^{p+1} ; inégalité de Taylor–Lagrange.

§ f) Calcul des valeurs approchées d'une intégrale. Méthode du milieu (ou des tangentes). Méthode des trapèzes, méthode de Simpson : majoration du reste. Algorithmes d'approximation d'une intégrale par ces deux méthodes.

4. Étude locale des fonctions

a) Développements limités, opérations sur les développements limités.

b) Exemples simples de développements asymptotiques.

Intégration des relations de comparaison au voisinage d'un point entre des fonctions continues ; intégration des développements limités. Théorème de Taylor–Young (existence d'un développement limité d'ordre p pour une fonction de classe C^p).

5. Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles et logarithmes, fonctions puissances, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

b) Fonctions circulaires directes et réciproques. Fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{at}$, où a est complexe.

c) Équations fonctionnelles des fonctions linéaires, exponentielles ; logarithmes et puissances.

6. Intégrales impropres

a) Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Emploi de l'intégration par parties.

b) Intégrales de fonctions positives. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration des relations de prépondérance et d'équivalence au voisinage de $+\infty$: cas des intégrales convergentes, cas des intégrales divergentes.

7. Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Passage à la limite uniforme dans les intégrales de fonctions continues sur un segment : application à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1.

Exemples de passage à la limite dans les intégrales impropres.

b) Continuité et intégration des fonctions de la forme $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$, où f est continue ; dérivation lorsqu'en outre $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.

Exemples d'étude de fonctions définies par des intégrales.

c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique : normes associées.

III. Séries

1. Séries de nombres réels ou complexes

a) Séries à termes positifs. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence ; cas des séries convergentes, cas des séries divergentes.

Comparaison à une série géométrique : règles de Cauchy et de d'Alembert.

Comparaison à une intégrale impropre, Convergence des séries de Riemann ; comparaison à une série de Riemann.

b) Séries à termes réels ou complexes. Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

c) Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire. Série produit de deux séries absolument convergentes : $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

d) Exemples d'encadrement ou d'évaluation asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

§ e) Recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

2. Séries de fonctions

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

a) Convergence simple, convergence uniforme sur un ensemble d'une série de fonctions ; convergence normale (pour la norme uniforme).

b) Continuité et limite en un point de la somme d'une série uniformément convergente. Intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur un segment ; application à la dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1.

c) Exemples d'étude de fonctions définies par des séries.

3. Séries entières

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Séries entières d'une variable complexe ; rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence, convergence normale sur tout compact du disque de convergence.

b) Séries entières d'une variable réelle : intégration et dérivation terme à terme dans l'intervalle (ouvert) de convergence.

Développement en série entière de $\mathrm{e}^x, \ln(1+x)$ et $(1+x)^\alpha$ où α est réel.

c) Définition de $\exp z$ (ou e^z), $\cos z$ et $\sin z$ pour z complexe.

Exponentielle d'une somme, extension des formules de trigonométrie.

4. Séries de Fourier

a) Polynômes trigonométriques ; orthogonalité des fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{inx}$. Coefficients et série de Fourier d'une fonction f 2π-périodique continue par morceaux à valeurs complexes (expression sous forme exponentielle, expression en cosinus et sinus). Sommes partielles $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{ikx}$ de la série de Fourier de f ; propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique.

b) Lorsque f est continue par morceaux, convergence de S_n vers f en moyenne quadratique ; formule de Parseval. Théorème de Dirichlet ; convergence de $S_n(x)$ vers la demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point x lorsque f est de classe C^1 par morceaux. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux.

5. Emploi des séries entières et des séries de Fourier

Exemples de recherche de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle.

§ Exemples d'utilisation de tels développements pour obtenir des valeurs approchées d'une fonction.

Exemples d'emploi de séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

IV. Équations différentielles

1. Systèmes linéaires d'ordre 1

a) Écriture matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ où A (respectivement B) désigne une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (théorème admis). Dimension de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation $X' = A(t)X$. Méthode de variation des constantes.

b) Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme ; application au problème de Cauchy. Résolution du système $X' = AX$ par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire.

2. Équations linéaires scalaires

a) Équation $X'' + a(t)X' + b(t)X = c(t)$, où a, b, c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Système d'ordre 1 associé, étude du problème de Cauchy ; solutions de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation sans second membre associée ne s'annulant pas sur I.

b) Équations linéaires à coefficients constants. Dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Cas où le second membre est une exponentielle polynôme.

3. Notions sur les équations non linéaires

a) Solutions d'une équation différentielle $X' = f(t, X)$ (resp. $X'' = f(t, X, X')$), où f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

§ b) Recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

c) Résolution des équations des types suivants (en liaison avec la géométrie) : équation associée à une forme différentielle exacte, équation à variables séparables, équation homogène : $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$

d) Exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction (en liaison avec des propriétés d'invariance), d'échange de la variabIe et de la fonction, de paramétrages.

§ e) Exemples d'étude qualitative des courbes intégrales d'une équation différentielle. Exemples de recherche des courbes intégrales d'un champ d'éléments de contact ou d'un champ de vecteurs dans le plan.

V. Notions sur les fonctions de plusieurs variables réelles

1. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

a) Limite, continuité, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Applications de classe C^1 (ou continûment différentiables).

b) Développement limité à l'ordre 1 d'une application de classe C^1 ; différentielle, matrice jacobienne, jacobien. Si deux applications sont de classe C^1, leur composée l'est encore ; difféomorphismes. Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe C^1). Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe C^1. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1 ; caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe.

c) Dérivées partielles d'ordre k ; théorème de Schwarz. Définition des applications de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (k entier naturel ou k infini). Si deux applications sont de classe

C^k, leur composée l'est encore ; définition des C^k-difféomorphismes.

d) Gradient d'une fonction numérique de classe C^1, points critiques. Formule de Taylor–Young pour une fonction numérique de classe C^1. Étude de l'existence d'un extrémum local (c'est-à-dire d'un maximum local ou d'un minimum local) d'une fonction numérique de deux variables de classe C^2 en un point critique où $rt - s^2 \neq 0$.

2. Calcul intégral

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions de ce paragraphe.

a) Champs de vecteurs. Divergence, rotationnel. Intégrales curvilignes. Potentiel scalaire ; condition nécessaire et suffisante d'existence pour un champ de classe C^1 sur un ouvert étoilé.

b) Intégrales doubles et intégrales triples. Linéarité, croissance ; additivité par rapport aux ensembles. Calcul par intégrations successives. Changements de variables ; passage en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques. Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

VI. Notions de géométrie différentielle

1. Courbes et surfaces

l'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour ce paragraphe sont admises.

a) Définitions diverses d'une courbe (plane ou non) et d'une surface, par paramétrages ou par équations.

b) En un point régulier : tangente à une courbe, plan normal ; plan tangent à une surface, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

c) Étude locale d'une courbe paramétrée plane : position de la courbe par rapport à une droite ; concavité en un point birégulier, rebroussements, inflexions. Étude de branches infinies. Construction de courbes paramétrées.

d) Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace : plan osculateur en un point birégulier, étude locale en un point trirégulier.

e) Enveloppe d'une famille de droites dans le plan, donnée par une équation $a(t)x+b(t)y+c(t) = 0$, sur un intervalle où $ab' - ba'$ ne s'annule pas.

f) Étude des courbes planes définies par des coordonnées polaires : étude locale, comportement asymptotique, construction.

2. Propriétés métriques des courbes planes

Longueur d'un arc paramétré de classe C^1, abscisse curviligne. Pour un arc birégulier du plan orienté, repère de Frenet, courbure, centre de courbure, développée, développantes.

3. Cinématique du point

a) Vitesse, accélération. Trajectoire, loi horaire. Moment cinétique, dynamique. Énergie cinétique.

b) Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, mouvements circulaires. Mouvements à accélération centrale ; oscillateurs harmoniques, mouvement des planètes.

4. Probabilités et statistiques

1. Espaces probabilisés Expériences aléatoires. Événements. Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste à propos des opérations sur les événements.

Tribus. Probabilités. Espace probabilisé (Ω, A, P). Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales ; formule de Bayes. Indépendance (en probabilité) d'événements ; indépendance mutuelle d'un nombre fini d'événements ; indépendance deux à deux.

Les candidats devront savoir utiliser sur des exemples simples la formule donnant la probabilité d'une réunion finie d'événements (formule de Poincaré, ou de crible). La théorie des espaces probabilisés produits n'est pas au programme. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les espaces probabilisés.

2. Variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire réelle, ou plus généralement à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Événements liés à une variable aléatoire. On admettra que la somme et le produit de deux variables aléatoires sont des variables aléatoires. Les propriétés générales des variables aléatoires sont hors programme. L'objectif est la mise en fonctionnement de ce concept sur les exemples décrits dans les trois alinéas qui suivent. La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ n'est pas au programme.

a) Variables aléatoires réelles discrètes.

Loi de probabilité. Fonction de répartition $F(x) = P[X \leqslant x]$. Moments : espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type. Variables centrées, variables réduites. Variable aléatoire $y = g(X)$ fonction d'une variable aléatoire discrète X, où g est définie sur l'ensemble des valeurs de X. Lois discrètes usuelles : loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.

b) Vecteurs aléatoires (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) discrets.

Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Lois marginales. Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires réelles. Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Indépendance de n variables aléatoires réelles. Linéarité de l'espérance mathématique. Espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires. Covariance. Coefficient de corrélation linéaire. Stabilité pour la somme des lois binomiales, des lois de Poisson.

Dans de nombreuses situations, on rencontre des exemples simples de fonctions de plusieurs variables aléatoires (sommes, produits). On admettra que si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, toute fonction de $(X_1, \dots, X_p)$ est indépendante de toute fonction de $(X_{p+1}, \cdots, X_n)$. Aucune théorie générale des fonctions de plusieurs variables aléatoires n'est au programme.

c) Variables aléatoires à densité.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction à valeurs réelles positives ayant un nombre fini de points de discontinuité et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Moments, espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type. Variable centrées, variables réduites. Exemples simples de fonctions d'une variable aléatoire (tels que $aX + b$, X^2, e^X, ...). Lois définies par une densité usuelle : loi uniforme, exponentielle, normale (ou de Laplace–Gauß). Densité d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Indépendance de deux variables aléatoires réelles à densité. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur ces questions.

3. Convergence des suites de variables aléatoires. Inégalité de Bienaymé–Tchebychev (cas des variables discrètes et des variables à densité). Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres. Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale. Approximation de la loi binomiale par la loi de Gauß, par la loi de Poisson.

Énoncé du théorème limite central.

L'étude de la convergence en loi n'est pas au programme.

4. Notions de statistiques.

a) Statistique descriptive : paramètres de position (moyenne, médiane, quantiles, modes) et de dispersion (écart-type, variance). Divers modes de représentation graphique.

b) Échantillons. Intervalle de confiance d'une moyenne ou d'une fréquence.

c) Tests d'hypothèse ; les deux types de risque d'erreur.

d) Tests de paramètres : estimation du paramètre d'une loi binomiale, de la moyenne m d'une loi normale. Test unilatéral, bilatéral.

Comparaison de deux moyennes.

ANNEXE II

Instructions et commentaires

Ils figurent au BOÉN n° 33 du 26 septembre 1991 et au BO Spécial n° 5 du 21 octobre 1993.

Pour les épreuves écrites les candidats doivent se munir de calculatrice afin de s'en servir lorsque ce sera autorisé.

Pour les épreuves orales les calculatrices personnelles sont interdites. Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du CAPES.

1.3 Statistiques

1.3.1 Évolution et résultats généraux

Année	Postes	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Présents aux deux épreuves orales	Admis
CAPES 2001	990	6972	5676	2109	1946	990 *
CAFEP 2001	215	1095	889	200	194	113
CAPES 2002	1125	6166	4948	2213	2065	1125 *
CAFEP 2002	230	906	745	192	189	118
CAPES 2003	1195	5755	4428	2328	2174	1195
CAFEP 2003	230	846	636	214	209	116
CAPES 2004	1003	5604	4194	2040	1900	1003
CAFEP 2004	177	933	658	205	192	103
CAPES 2005	1310	6086	4074	2473	2236	1310
CAFEP 2005	177	1051	644	279	265	139
CAPES 2006	952	5787	3983	2043	1796	952
CAFEP 2006	135	1096	689	283	265	126
CAPES 2007	952	5388	3875	2102	1840	952
CAFEP 2007	160	1019	693	267	250	123
CAPES 2008	806	4711	3453	1802	1564	806
CAFEP 2008	155	964	631	200	191	90
CAPES 2009	806	4243	3160	1836	1641	806
CAFEP 2009	109	901	633	268	236	109
CAPES 2010	846	4020	2695	1919	1635	846
CAFEP 2010	155	879	554	308	277	119

** En 2001 et 2002, des listes complémentaires avaient été publiées.*

1.3.2 Résultats par catégories

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites.

CAPES EXTERNE MATHÉMATIQUES

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	4020	2695	1919	846
Femmes	1710	1242	876	434
Français et U. E.	3991	2685	1912	846
Union Européenne	25	13	4	2
Étrangers hors U. E.	29	10	7	0
Moins de 30 ans	2892	2225	1635	770
Moins de 25 ans	1726	1500	1187	608

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	720	234	142	41
ELEV.IUFM.1ANN.	1341	1249	958	536
ETUDIANT	801	573	447	169
SANS EMPLOI	401	155	108	32
VAC.2ND DEGRE	98	60	40	15
CONT.2ND DEGRE	392	241	117	23
ASSISTANT EDUC.	267	183	107	30

catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	1574	1333	1007	545
ETUDIANT	801	573	447	169
AG.NON TIT.MEN	861	536	290	77
HORS FP SS EMPL	784	253	175	55

CAFEP-CAPES MATHÉMATIQUES

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	879	554	308	119
Femmes	463	320	169	78
Moins de 30 ans	519	401	237	95
Moins de 25 ans	246	219	146	73

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	77	27	13	4
ELEV.IUFM.1ANN.	171	149	99	56
ETUDIANT	126	93	66	24
CADRE CONV.COL	34	12	9	4
SECT.TERTIAIRE	16	6	4	1
SANS EMPLOI	83	29	17	5
MAIT.OU DOC DEL	22	13	5	1
VAC.2ND DEGRE	40	26	11	3
MA	213	143	60	12
CONT.2ND DEGRE	75	44	19	6
ASSISTANT EDUC.	22	12	5	3

catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	190	155	103	58
ETUDIANT	126	93	66	24
AG.NON TIT.MEN	366	227	97	25
ENSEIGN PRIVE	28	16	5	1
AG.FONC.PUB.ETA	11	7	3	1
HORS FP SS EMPL	158	56	34	10

1.3.3 Résultats par académie

CAPES EXTERNE MATHÉMATIQUES

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	205	137	79	26
BESANÇON	85	67	55	30
BORDEAUX	153	119	90	43
CAEN	93	79	56	25
CLERMONT-FERRAND	72	64	51	27
DIJON	74	58	54	22
GRENOBLE	174	119	92	53
LILLE	277	207	144	71
LYON	202	130	109	63
MONTPELLIER	128	74	45	23
NANCY METZ	115	78	64	29
POITIERS	104	81	65	27
RENNES	168	129	101	36
STRASBOURG	135	87	58	24
TOULOUSE	213	139	89	36
NANTES	141	107	81	37
ORLÉANS TOURS	115	82	55	23
REIMS	74	52	40	15
AMIENS	77	50	41	22
ROUEN	98	75	44	18
LIMOGES	46	30	19	5
NICE	142	94	63	22
CORSE	15	7	3	1
RÉUNION	89	50	30	11
MARTINIQUE	57	30	18	5
GUADELOUPE	87	53	17	7
GUYANNE	21	3	1	0
PARIS/CRÉTEIL/VERSAILLES	798	456	339	138
NOUVELLE CALÉDONIE	30	15	9	6
POLYNÉSIE	25	18	7	1
MAYOTTE	7	5	0	0

CAFEP-CAPES MATHÉMATIQUES

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	25	12	8	5
BESANÇON	14	11	5	1
BORDEAUX	35	26	17	5
CAEN	19	13	5	0
CLERMONT-FERRAND	15	9	4	1
DIJON	7	5	1	0
GRENOBLE	43	26	13	7
LILLE	80	62	37	12
LYON	49	31	22	11
MONTPELLIER	41	27	16	6
NANCY METZ	18	11	6	3
POITIERS	20	12	7	3
RENNES	78	55	28	14
STRASBOURG	20	13	4	0
TOULOUSE	42	25	16	10
NANTES	83	61	39	18
ORLÉANS TOURS	24	14	6	2
REIMS	15	9	6	2
AMIENS	20	17	9	4
ROUEN	17	12	7	1
LIMOGES	3	1	1	0
NICE	23	15	5	1
CORSE	2	1	0	0
RÉUNION	3	2	0	0
MARTINIQUE	1	0	0	0
GUADELOUPE	2	0	0	0
GUYANNE	2	0	0	0
PARIS/CRÉTEIL/VERSAILLES	171	82	45	13
NOUVELLE CALÉDONIE	1	0	0	0
POLYNÉSIE	6	2	1	0

1.3.4 Répartition des notes

CAPES EXTERNE MATHÉMATIQUES

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	13	10	6	14	11	9	15	13	11
Épreuve 2 (sur 20)	12	10	6	13	11	9	14	12	11
Total écrit (sur 40)	24	19	13	26	22	18	29	25	22

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			Écrit 1			Écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	1	1	0	5	5	1	6	6	1
19	20	20	6	22	22	8	32	32	8
18	56	56	22	99	99	54	111	111	53
17	127	127	68	206	206	126	184	184	104
16	208	208	122	259	259	168	253	253	151
15	287	287	184	367	367	248	325	325	204
14	393	393	272	487	487	332	447	447	292
13	557	557	388	700	699	473	615	615	404
12	764	764	530	877	876	566	833	832	539
11	1007	1007	667	1151	1144	680	1059	1056	645
10	1286	1286	760	1384	1363	754	1365	1355	741
9	1552	1552	811	1618	1570	801	1562	1541	787
8	1784	1784	842	1850	1751	827	1768	1717	823
7	1997	1919	846	2025	1849	841	1957	1830	842
6	2153	1919	846	2211	1899	845	2123	1892	845
5	2280	1919	846	2333	1914	846	2259	1915	846
4	2417	1919	846	2444	1918	846	2382	1917	846
3	2523	1919	846	2554	1919	846	2494	1919	846
2	2602	1919	846	2629	1919	846	2608	1919	846
1	2673	1919	846	2705	1919	846	2683	1919	846
0	2695	1919	846	2747	1919	846	2702	1919	846

Écrit 1

Écrit 2

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	14	9	5	17	14	10
Épreuve 2 (sur 20)	14	10	7	15	13	11
Total général (sur 80)	51	42	33	56	50	45

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	37	37	12	12
19	0	0	96	96	41	40
18	4	4	158	156	71	70
17	20	20	220	213	118	111
16	57	57	299	287	199	186
15	113	113	373	354	320	296
14	226	226	464	431	428	381
13	377	377	542	497	555	474
12	542	542	627	553	702	575
11	723	723	696	592	810	636
10	930	846	804	654	941	694
9	1114	846	892	703	1050	739
8	1298	846	1010	747	1178	781
7	1455	846	1100	780	1288	805
6	1555	846	1172	798	1351	819
5	1615	846	1237	809	1409	827
4	1637	846	1324	820	1474	836
3	1639	846	1392	826	1518	840
2	1639	846	1484	833	1571	841
1	1639	846	1581	840	1622	845
0	1639	846	1644	846	1639	846


Oral 1

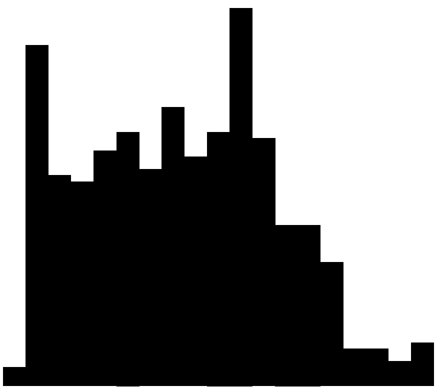

Oral 2

CAFEP-CAPES MATHÉMATIQUES

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	11	8	5	13	11	9	15	12	11
Épreuve 2 (sur 20)	10	7	4	12	10	9	13	12	10
Total écrit (sur 40)	22	15	9	24	21	17	26	24	22

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			Écrit 1			Écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	4	4	2	7	7	3	7	7	4
17	8	8	3	17	17	11	11	11	6
16	13	13	7	29	29	23	17	17	10
15	22	22	16	43	43	33	23	23	14
14	34	34	25	56	56	42	43	43	27
13	51	51	37	82	82	55	69	69	43
12	97	97	68	119	118	72	95	95	60
11	140	140	89	169	166	90	135	134	77
10	177	177	101	211	207	101	196	193	99
9	229	229	106	252	242	111	237	233	105
8	274	274	117	294	270	115	274	260	110
7	328	308	119	342	292	118	319	284	116
6	379	308	119	400	301	118	354	296	117
5	411	308	119	440	306	119	395	304	118
4	451	308	119	477	307	119	433	308	119
3	484	308	119	500	307	119	466	308	119
2	511	308	119	521	307	119	500	308	119
1	541	308	119	549	307	119	555	308	119
0	554	308	119	567	308	119	558	308	119


Écrit 1


Écrit 2

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
Épreuve 1 (sur 20)	13	8	4	16	14	9
Épreuve 2 (sur 20)	13	10	6	16	12	10
Total général (sur 80)	47	38	32	54	48	44

Oral et total général (sur 20)						
	Total		Oral 1		Oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	4	4	2	2
19	0	0	9	9	4	4
18	0	0	18	18	13	13
17	1	1	23	23	19	19
16	4	4	34	33	33	31
15	9	9	47	45	46	41
14	22	22	65	59	59	51
13	44	44	83	73	78	58
12	62	62	90	75	96	69
11	89	89	96	80	122	86
10	129	119	109	86	144	92
9	167	119	127	96	168	99
8	212	119	147	104	190	106
7	239	119	163	113	204	108
6	259	119	179	115	227	113
5	273	119	191	115	236	115
4	277	119	210	117	252	118
3	277	119	229	118	262	118
2	277	119	250	119	272	119
1	277	119	265	119	277	119
0	277	119	279	119	277	119

Oral 1

Oral 2

Moyennes sur 20 au total des épreuves d'admissibilté

moyenne des candidats	CAPES	CAFEP
présents	9,42	7,75
admissibles	11,44	10,65

Moyennes sur 20 au total des épreuves d'admission

moyenne des candidats	CAPES	CAFEP
présents	9,81	9,11
admis	12,90	12,62

Moyennes sur 20 au total général des 4 épreuves

moyenne des candidats	CAPES	CAFEP
présents	10,50	9,82
admis	12,83	12,33

1.4 Les épreuves écrites

Les épreuves écrites avaient lieu le mardi 9 et le mercredi 10 mars 2010.

Il est rappelé que l'absence à une épreuve entraîne l'élimination du candidat. Le retard est aussi une cause d'élimination, les candidats arrivant après la distribution des sujets n'étant pas autorisés à composer.

La définition des épreuves proprement dites, les buts généraux qu'elles poursuivent, ainsi que le programme auquel elles sont limitées, sont détaillées dans les documents officiels (voir la partie qui leur est consacrée dans le rapport).

Les correcteurs élaborent leurs grilles de correction lors d'une réunion plénière, tenue après qu'ils aient eu le temps d'analyser les sujets et de lire un échantillon de copies. Chaque copie est ensuite corrigée deux fois, de manière totalement indépendante. Les deux correcteurs jumelés se concertent à la fin de leur travail pour décider de la note finale.

Aucun commentaire, aucune annotation particulière ne figure sur les copies. Seule la note finale après harmonisation y est inscrite. Les candidats qui souhaitent après coup revoir leur travail pour mieux comprendre le résultat obtenu peuvent, conformément aux dispositions de la loi n^{o} 78.753 du 17 juillet 1978, obtenir satisfaction en s'adressant à la DGRH qui conserve les copies pendant un an à cet effet.

De manière générale, les sujets des épreuves écrites sont construits dans le but de discriminer l'ensemble des candidats, des meilleurs aux plus faibles ; c'est pourquoi de très bonnes notes ont pu être attribuées à des copies n'abordant pas, et même de loin, l'ensemble du sujet. Ce fait que l'on peut trouver contestable s'explique aussi par le souci qu'ont les auteurs de sujets de construire des problèmes offrant un contenu suffisamment construit, notamment aboutissant à un ou des résultats significatifs, et aussi par la nécessité de ne pas trop centrer le texte sur une partie trop réduite du programme. Les questions qui recevront un poids particulièrement significatif dans le classement des candidats ne sont pas distinguables dans l'énoncé (d'autant qu'elles ne s'imposent parfois qu'au moment de la correction des copies), ce qui empêche d'estimer raisonnablement la note à la lecture d'une copie isolée.

1.5 Les épreuves orales

1.5.1 Organisation

Elles ont eu lieu du 25 juin au 19 juillet 2010 au lycée Jean Lurçat, 48, avenue des Gobelins, 75013 PARIS. Les interrogations avaient lieu tous les jours, dimanches et 14 juillet inclus. Le jury était séparé en 24 commissions de trois personnes. La composition de ces commissions est déterminée en tenant compte de l'obligation de croiser les compétences, ce qui conduit à faire travailler ensemble des personnes intervenant aux divers niveaux possibles, enseignement secondaire, enseignement post-baccalauréat, enseignement supérieur, université et IUFM, inspection pédagogique régionale. La présence de personnels enseignant en IUFM fait pour chaque cas l'objet d'une réflexion appropriée, le but poursuivi étant d'arbitrer au mieux entre deux nécessités contradictoires : d'un côté, éviter autant que possible des situations où il y aurait confusion des rôles de formateur et d'évaluateur, et d'un autre côté, éviter de trop distendre les liens avec les centres de formation.
Les candidats sont convoqués en début d'après-midi pour l'épreuve d'exposé et le lendemain matin pour l'épreuve sur dossier. Ils passent devant deux commissions jumelées qui échangent leurs candidats pour la seconde épreuve. Chaque commission fait passer les deux

types d'épreuves. Un membre de la présidence accueille les candidats avant chaque épreuve afin d'en préciser les modalités et rappeler quelques instructions à son sujet.

Les candidats pouvaient fournir une adresse électronique lors de leur inscription. Immédiatement après signature de la liste des admissibles, les résultats ont été transmis aux adresses connues (plus de 98 % des candidats admissibles ont été dans ce cas cette année).

1.5.2 Conseils pratiques.

Les demandes de déplacements ou reports de la date de la convocation ne sont pas examinées par la présidence du jury, sauf dans les deux cas qui suivent :

— coïncidence entre deux convocations à des concours de recrutement de l'Éducation Nationale auxquels le candidat est simultanément admissible (CAPES et agrégation, ou CAPLP, ou CRPE par exemple) ;

— cas de force majeure, maladie, ou événement familial d'importance majeure.

Lorsque ces demandes sont prises en considération, il n'est pas toujours possible d'y répondre favorablement. Réaliser les arrangements correspondants n'est pas une obligation du jury. La convocation aux épreuves orales se fait par courrier électronique et par courrier postal à l'adresse indiquée par le candidat. Une confirmation par voie électronique est demandée au candidat. Cette expérience mise en œuvre à la session 2008 a montré que plus de 96 % des candidats l'utilisent. Les candidats négligeant cette procédure compliquent et accroissent la tâche de la présidence. En effet, l'organisation quotidienne des convocations ne permet de tenir compte de demandes légitimes de report de convocation que si la présidence du jury est en mesure de trouver les « places »vacantes laissées par les candidats qui, pour diverses raisons, renoncent à passer les épreuves orales.

Il est rappelé aux candidats que l'adresse qu'ils fournissent lors de leur inscription doit être une adresse permanente, valable pour toute la durée des épreuves et pour la phase d'affectation. Ils doivent éventuellement prendre toute disposition pour que le courrier puisse les atteindre pendant toute la période concernée (cf. B.O. spécial n° 13 du 31 août 1995, p. 13).

Une tenue vestimentaire correcte est souhaitable : ce qui est convenable en villégiature ne l'est pas nécessairement devant le jury d'un concours de recrutement. L'utilisation des téléphones portables est interdite dans les locaux du concours, tant pour éviter d'éventuelles fraudes que pour ne pas déranger les candidats par des sonneries intempestives.

Les oraux sont publics. Le nombre important des visiteurs conduit la présidence du jury à réglementer leurs déplacements dans les locaux du concours. Ils ne peuvent y pénétrer que pour accompagner une vague de candidats dans les salles de commission et ne doivent en aucun cas parler aux candidats ou stationner dans les couloirs. Afin de ne pas trop perturber ni les candidats ni le bon fonctionnement du concours, le nombre des visiteurs est limité à au plus trois dans la même salle de commission.

Le CAPES et le CAFEP sont des concours et non des examens ; comme à l'écrit, la note d'oral sert à classer les candidats les uns par rapport aux autres. Cette note a une valeur relative et ne peut refléter ce qui serait la valeur objective d'une épreuve. Il est difficile voire impossible dans les faits pour le candidat de s'évaluer lui-même, et donc de prévoir la note qu'il recevra.

Les notes des épreuves orales font l'objet de deux saisies informatique indépendantes, suivies d'une confrontation des deux saisies et de l'édition de listes, soumises aux commissions pour vérification. Ces dispositifs rendent l'hypothèse d'une erreur de transmission improbable autant qu'il est humainement possible.

1.5.3 L'évaluation des épreuves orales

À un concours de recrutement de l'enseignement secondaire, l'on se trouve au croisement d'exigences de nature assez diverses.

On pourrait se demander pourquoi l'évaluation des compétences purement disciplinaires est présente dans un tel concours, puisque celui-ci s'adresse aux titulaires d'une licence, et que les candidats ont ainsi déjà fait leurs preuves en ce domaine. Cette position mérite d'être discutée, et réfutée, avec soin.

Les licences délivrées par des systèmes de formations assez largement autonomes sont loin d'être uniformes, ce qui justifie déjà le maintien de la présence d'une évaluation disciplinaire au sein du CAPES. De plus, les licences ne peuvent pas toujours suffire en elles-mêmes si leur contenu n'a pas été prévu de manière spécifique pour convenir à un futur enseignant du secondaire. Enfin, il est prévu que certaines personnes, quoique non titulaires d'une licence, ont le droit de se présenter au concours. Tous ces facteurs plaident pour le maintien d'une évaluation disciplinaire forte dans les épreuves du CAPES.

Par leur position professionnelle, une majorité des interrogateurs aux épreuves orales sont naturellement attentifs en premier lieu au contenu proprement disciplinaire des prestations. En composant les commissions de manière à varier au mieux les points de vue, il est possible de faire en sorte que la capacité proprement professionnelle soit correctement prise en compte. Même si la vérification finale de l'aptitude à « tenir »devant les élèves repose sur l'évaluation du stage, il est demandé au candidat, lors des deux épreuves orales, de montrer qu'il dispose des qualités nécessaires en matière de communication et de présence devant les auditeurs que sont les membres du jury.

Il n'y a pas de grille chiffrée d'évaluation pour les épreuves orales ; l'on peut simplement définir trois types de compétences pour lesquelles une insuffisance flagrante amène la commission à abaisser la note de manière significative ou déterminante :

— Les compétences en communication : élocution, clarté, attitude envers la commission et capacité de prendre en compte les questions, présentation du tableau, maîtrise du temps, de l'écrit au tableau, de la calculatrice et du rétroprojecteur, etc.

— Les compétences disciplinaires et techniques : l'absence de propositions ou d'affirmations mathématiquement inexactes, la présence relativement au thème traité de connaissances et de résultats cohérents, l'absence de lacune fondamentale relativement à ce thème, le respect des consignes associées au thème et notamment celles concernant l'usage des calculatrices.

— Les compétences de nature pré-professionnelle : connaissance des programmes, capacité à construire des exposés et des choix d'exercices adaptés et progressifs, maîtrise à un niveau suffisant des propositions, démonstrations, solutions que le candidat propose de lui-même.

1.5.4 Première épreuve : exposé sur un thème donné.

Le texte qui suit s'appuie sur la note parue dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993, qui définit les épreuves du CAPES externe de mathématiques.

La première épreuve orale dure 45 minutes réparties en :

• 25 minutes pour l'exposé, le candidat gère son temps et sa présentation comme il l'entend, le jury n'intervenant pas sur le contenu, et n'interrompant en aucune manière le candidat, sauf éventuellement en cas de problème pratique.

• 20 minutes d'entretien avec la commission.

Les candidats tirent au sort deux thèmes d'exposé et en choisissent un. Ils disposent de deux heures pour préparer l'épreuve. Ils ne disposent d'aucun document autre que les programmes et les instructions relatives au concours. Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils utilisent l'un des modèles disponibles. (voir annexe 5.2). Ils peuvent utiliser des transparents ; le jury ne les fournissant pas, il leur est demandé d'apporter des transparents vierges, qui seront dûment identifiés comme tels avant emploi ; les transparents utilisés sont retenus par le jury. Leur nombre n'est pas limité.

Le programme de cette épreuve (cf. B.O. spécial n° 8 du 24 mai 2001 et partie I.2 de ce rapport) est extrait du programme de l'écrit du concours. Les candidats peuvent faire appel à l'intégralité du programme complémentaire (titre B) au cours de cette épreuve, que ce soit pendant leur exposé ou pendant l'entretien avec le jury. Cependant, aucun thème proposé ne peut porter sur les paragraphes extraits du programme complémentaire complétant le programme de cette épreuve (voir partie I.2), ni a fortiori sur d'autres points du programme complémentaire. Pendant l'entretien, le jury a toute latitude pour interroger le candidat sur les programmes de l'enseignement secondaire (titre A, partie I.2). Toute notion abordée par le candidat peut aussi faire l'objet de questions : il est attendu d'un futur enseignant qu'il ne présente à ses élèves que des notions dont il peut parler de manière un tant soit peu construite ; par conséquent, une allusion ou une ouverture sur un point hors du programme de cette épreuve n'est susceptible de valoriser le travail du candidat que si elle repose sur des connaissances suffisamment cohérentes, et si elle s'inscrit de manière logique comme un prolongement acceptable devant une classe du sujet traité. Les thèmes d'exposé proposés forment un ensemble couvrant le programme dans son intégralité et les couplages sont conçus de manière à proposer un vrai choix au candidat, deux thèmes jugés trop proches étant normalement écartés.

L'organisation actuelle du concours ne permet pas l'évaluation des compétences des candidats en matière de TICE au sens ou il n'y a pas d'épreuve devant ordinateur. Cette dimension de l'enseignement est abordée à travers l'usage de calculatrices rétroprojetables, dont la puissance permet d'aborder l'usage élémentaire de tableurs, ainsi que de logiciels — il est vrai rudimentaires — de géométrie. Pour une partie, de plus en plus importante, des sujets, l'illustration de telle ou telle propriété sur une calculatrice est expressément conseillée dans l'intitulé du sujet. Il est vivement conseillé aux candidats de prendre en compte ce conseil.

1.5.5 Seconde épreuve : épreuve sur dossier

L'épreuve sur dossier dure au maximum 45 minutes. Le temps est réparti de la façon suivante :

• Pendant 25 minutes au maximum le candidat expose les réponses aux questions contenues dans le dossier, et notamment son choix d'exercice (objectifs, illustration du thème...).

• Pendant 20 minutes au minimum un entretien s'instaure entre la commission et le candidat, au cours duquel le candidat sera amené à résoudre, entièrement ou en partie, au moins un exercice choisi par la commission parmi l'exercice proposé par le jury et les exercices proposés par le candidat.

Les remarques concernant les TICE sont identiques à celles données pour la première épreuve orale (voir partie 5.4 ci-dessus). Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils empruntent l'un des modèles disponibles (voir annexe 5.2). Il y a cependant une différence importante entre les deux épreuves. En effet, les tâches que le candidat doit accomplir pendant sa préparation, ainsi que pendant l'épreuve proprement dite, incluent pour une partie appréciable des dossiers des tâches devant explicitement être réalisées sur calculatrice. Il est bien évident que le non-respect de cette consigne se traduit de manière forte dans la notation de l'épreuve.

Les candidats peuvent utiliser des transparents ; le jury ne les fournissant pas, il leur est demandé d'apporter des transparents vierges, qui seront dûment identifiés comme tels avant emploi ; les transparents utilisés sont retenus par le jury. Leur nombre n'est pas limité.

L'épreuve sur dossier se place au niveau de l'enseignement secondaire (cf. B.O. n° 21 du 26 mai 1994). Il n'y a aucune extension de programme dans ce cas.

Chaque dossier fait référence à un thème, dont l'intitulé plus ou moins long (le contenu correspondant étant plus ou moins large) figure dans l'en-tête du dossier. Il est essentiel pour le candidat d'interpréter de manière très précise cet intitulé ; notamment, le ou les exercices qu'il adjoint à celui proposé par le jury doivent constituer des illustrations de ce thème tel qu'il est défini, dans toute son ampleur.

Les candidats ont deux heures pour préparer l'épreuve et peuvent utiliser les ouvrages imprimés disponibles dans le commerce, vierges de toute annotation manuscrite. Ils peuvent les apporter ou en emprunter à la bibliothèque du concours. Le jury peut s'opposer à l'utilisation de certains ouvrages s'il juge que cela risque de dénaturer l'épreuve (cf. B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993).

La bibliothèque possède un certain nombre de manuels usuels, et pour quelques éditions un assez grand nombre, mais la fourniture d'un ouvrage déterminé ne peut en aucun cas être garantie. C'est pourquoi nous rappelons ici aux candidats qu'ils ont le droit d'utiliser leurs propres manuels. Afin que tous les candidats puissent disposer d'un réel choix, chacun ne peut emprunter plus de cinq ouvrages simultanément.

1.5.6 Commentaires sur l'utilisation de la calculatrice

Un certain nombre de sujets de première épreuve comportent une mention invitant les candidats à illustrer leur exposé par un ou plusieurs exemples nécessitant l'usage d'une calculatrice. Les candidats ont la possibilité de projeter l'écran de la calculatrice qu'ils utilisent, comme ils le feraient devant une classe. Par ailleurs, une partie significative des dossiers de seconde épreuve inclut de manière explicite et obligatoire l'usage de la calculatrice.

L'appréciation par le jury de l'usage des calculatrices — avec ou sans rétroprojection — met en évidence que, si souvent cet usage n'apporte pas de valeur ajoutée à la prestation du candidat (il s'agit par exemple de l'usage de la calculatrice à de simples fins opératoires), les utilisations à but pédagogique pertinent, et les démonstrations brillantes, deviennent nettement plus nombreuses d'année en année.

Les candidats et futurs candidats au CAPES externe de mathématiques doivent prendre en compte le fait que, pour le moment, l'aptitude à utiliser les TICE n'y est évaluée qu'à travers l'usage des calculatrices scientifiques. Les modèles admis au concours contiennent tous les fonctions attendues dans les programmes : tableur et logiciel de géométrie ; ils contiennent aussi des fonctions de calcul formel.

Les conditions de rétroprojection dépendent des salles, mais chaque commission a fait de son mieux pour installer les appareils de manière à pouvoir évaluer convenablement les prestations des candidats sur ce point, en faisant naturellement abstraction de la qualité technique de la projection.

2 ÉNONCES ET ANALYSE DES ÉPREUVES ÉCRITES

2.1 Énoncé de la première épreuve

INTRODUCTION

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On étudie la série de terme général a_n. On montre qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée γ, et appelée **Constante d'Euler**. Pour cela on commence par étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

PARTIE I : PREMIÈRE APPROCHE DE LA CONSTANTE D'EULER

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, montrer que

$$0 \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

3) Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p}\,\mathrm{d}t,$$

puis montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

4) En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geqslant 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

5) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que

$$0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

PARTIE II : Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dira que f est ***intégrable*** *sur I si l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.*

On admettra le résultat suivant : *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles positives, définies, continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle I. Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux et si la série numérique $\sum \int_I u_n$ converge, alors, la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et on a :*

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

1) Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes **:**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

b) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \dfrac{1}{t}$ quand $t \to 0^+$.

c) Conclure.

2) Dans cette question on se propose de démontrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\, \mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a}.$$

Soient x et y deux réels strictement positifs.

a) Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\, \mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

b) Montrer que pour $a \leqslant b$ on a pour tout réel $z > 0$:

$$\mathrm{e}^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-az} \ln \frac{b}{a}$$

c) Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\, \mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a}.$$

3) Une première représentation intégrale de la constante d'Euler.

a) Démontrer que pour pour tout réel $t > 0$ on a :
$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t} \right).$$

b) En déduire que pour pour tout réel $t > 0$ on a :
$$\mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t} \right).$$

c) Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a :
$$1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \geqslant 0.$$

d) Retrouver alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$ et démontrer l'égalité :
$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

4) Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler.

Soit y un réel strictement positif.

a) Calculer $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t$, puis déduire que
$$\lim_{y \to 0^+} \left(\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t \right) = 0.$$

b) Démontrer que :
$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^y \mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t.$$

c) En déduire que :
$$\lim_{y \to 0^+} \left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \right) = 0.$$

d) Démontrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t = \lim_{y \to 0^+} \left(\mathrm{e}^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \right).$$

e) Conclure alors que :
$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \; \mathrm{d}t.$$

PARTIE III : POUR UNE VALEUR APPROCHÉE DE LA CONSTANTE D'EULER

1) **a)** Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right) \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t.$$

(**Indication** : *on pourra calculer chacune des deux intégrales*).

b) En utilisant l'égalité obtenue en II.3)d), démontrer que :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$$

2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$.

(On rappelle que $H_0 = 0$ et pour $k \geqslant 1, H_k = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$.)

a) Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F'(x) - F(x) = \frac{1}{x}(\mathrm{e}^x - 1).$$

c) Montrer alors que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$$

3) Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\gamma + \ln x = \mathrm{e}^{-x} F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$$

4) Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit un entier $a \geqslant 2$. Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leqslant \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \leqslant \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}.$$

(**Indication** : *on pourra admettre et utiliser l'inégalité :* $n! \geqslant \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.)

5) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\left| \gamma + \ln n - \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k \right| \leqslant \frac{a}{a-1} \frac{\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an} + \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

6) Décrire une méthode permettant le calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-10} près. (On ne demande pas le calcul d'une telle valeur approchée.)

PARTIE IV : LA CONSTANTE D'EULER SOMME DE LA SÉRIE DE VACCA (1910)

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on pose :

$$v_p = p\left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k}\right).$$

1) **a)** En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs dans l'expression de v_p, montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$ on a :

$$v_p = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p) \qquad \text{où} \qquad \sigma_p = \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

c) Montrerque pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d) En utilisant le développement asymptotique de H_n, obtenu en **I. 5)**, conclure que la série de terme général v_p est convergente et qu'on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (-1)^n \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{n}$$

où $\log_2$ désigne la fonction logarithme en base 2 et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

a) Expliquer pourquoi le critère spécial des séries alternées ne permet pas de montrer la convergence de la série de terme général u_n.

b) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\left|\sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

puis en déduire que :

$$\left|\sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}.$$

c) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{p=0}^{n} v_p + \mathcal{O}\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

et en déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.$$

3) On pose pour tout entier naturel n :

$$r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

a) Montrer que la série de terme général r_n est absolument convergente.

b) Exprimer v_k en fonction de k, r_k et r_{k+1}. Montrer ensuite que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1}.$$

Conclure que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right)$$

PARTIE V : La formule de Gosper (1972)

Dans cette partie on désigne par $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. Si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{F}$, on notera aussi $x[k]$ le terme x_k de la suite x. On considère l'endomorphisme Δ de $\mathcal{F}$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathcal{F}, \forall\, k \in \mathbb{N},\ \Delta(x)[k] = x[k] - x[k+1].$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ^n l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ obtenu en composant Δ avec lui même n fois et on pose $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $p \in [0, n]$, $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binômial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x_{p+k}.$$

(**Indication** : *écrire* $\Delta = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}} - T$ *où* T *est l'endomorphisme de* $\mathcal{F}$ *défini, pour tout* $x \in \mathcal{F}$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$, par : $T(x)[k] = x[k+1]$.)

2) Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et de limite ℓ. On se propose de montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \ell.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\frac{\binom{n}{p}}{2^n} \right)_{n \geqslant p}$ converge vers 0.

b) On suppose dans cette question $\ell = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = 0.$$

(**Indication :** *On pourra utiliser l'égalité suivante :*

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p} u_p + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p$$

et, étant donnée un réel $\varepsilon > 0$, *choisir un entier* k *suffisamment grand pour que l'on ait* $\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.)

c) Conclure pour le cas général où ℓ est quelconque.

3) Dans cette question, on se propose de démontrer la propriété suivante : Soit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. Si la série $\sum (-1)^k x_k$ converge, alors, la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$U_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x_k \qquad \text{et} \qquad V_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

a) Démontrer que

$$V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=0}^{N} \binom{N+1}{q+1} U_q.$$

(*on pourra observer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^k x_k = U_k - U_{k-1}$, *avec, par convention,* $U_{-1} = 0$).

b) En déduire que la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k.$$

4) On considère dans cette question un entier $n \geqslant 1$ ainsi que la suite $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_j = \frac{1}{2^n + j}.$$

a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 0$ on a :

$$\Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

Indication : *On pourra admettre et utiliser le résultat suivant : Pour* $m, n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}$$

b) En déduire que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

c) Conclure que la constante d'Euler peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE

2.2 Commentaires sur la 1^re^ épreuve écrite

Le sujet dont la difficulté était très progressive n'utilisait que des connaissances de base et on aurait pu a priori espérer que ces connaissances fussent dominées par des étudiants possédant une licence de mathématiques.

Globalement, les correcteurs notent une rédaction de faible qualité et une rigueur trop souvent absente :

- ◇ les quantificateurs (dans les rares copies où ils apparaissent) sont souvent mal employés et génèrent souvent des phrases mathématiques incohérentes ;
- ◇ nombre de candidats utilisent de façon systématiques des équivalences avec des écritures comme $f \leqslant g \Leftrightarrow \int f \leqslant \int g$;
- ◇ les hypothèses des théorèmes utilisés sont rarement citées et, lorsqu'elles le sont, sont encore plus rarement vérifiées par les candidats ;
- ◇ de graves lacunes apparaissent dans les manipulations d'inégalités (soustraction membre à membre, obtention d'encadrements faux par choix d'une valeur par approchée par excès de la borne inférieure obtenue et bien sûr d'une valeur approchée par défaut de la borne supérieure)

Les candidats ont majoritairement abordé les parties I, II et III ; les deux dernières parties n'ont été traitées que très partiellement et dans de très rares copies.

Partie I

Cette partie a été abordée par l'ensemble des candidats.

- la notion de majorant est mal comprise par un nombre important de candidats ;
- si presque tous les candidats rédigent une réponse, il y a bien peu de copies dans lesquelles on trouve une rédaction correcte : il s'agit pourtant d'un développement asymptotique classique. Beaucoup de candidats ne maîtrisent pas les équivalents ;
- il est très inquiétant de voir que peu de candidats obtiennent le bon encadrement

Partie II

C'est dans cette partie que les candidats ont traité le plus de questions et c'est aussi celle où les erreurs et les imprécisions de rédaction sont les plus nombreuses.

- un nombre important de candidats semble ignorer les règles qui permettent de conclure quant à la nature d'une intégrale impropre ; même chez les candidats qui évoquent le critère de Riemann ou la comparaison avec une fonction intégrable, la rédaction est le plus souvent lacunaire.
- les candidats « manipulent » les intégrales impropres sans se préoccuper de savoir si les objets existent ou pas : on voit ainsi fleurir des sommes dans lesquelles apparaissent $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ ou encore $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$;
- bon nombre de candidats alignent des égalités de limites sans savoir si ces limites existent ;
- dans la question 1.b. trop peu de candidats présentent une rédaction correcte : certains se contentent d'énoncer le résultat exact sans justification, d'autres pensent que la limite est nulle !

Partie III

De manière surprenante, seule une minorité de candidats semblent avoir des notions concernant les séries entières (en particulier le rayon de convergence est souvent négligé) ; pour les autres, la fonction F de la question 2 est tout simplement un polynôme (de degré infini) donc pour lequel la question de dérivabilité ne se pose même pas. Pour ce qui concerne l'équation différentielle, on lit de façon très exceptionnelle une référence au théorème de Cauchy–Lipschitz mais sans aucune vérification des hypothèses.

Les parties suivantes n'ont été que très peu traitées : quelques bonnes copies abordent la partie V mais même dans ces copies la rédaction manque de rigueur (par exemple l'utilisation de la formule du binôme pour le calcul de $(\mathrm{Id} - T)^n$ n'est jamais justifié par le fait que Id et T commutent).

L'ensemble des copies montre des lacunes importantes dans l'utilisation des outils essentiels de l'analyse (et de l'algèbre) : le jury ne peut que conseiller aux étudiants de consacrer à la maîtrise de ces outils le temps nécessaire à une appropriation réelle.

2.3 Enoncé de la seconde épreuve

Notations

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ sera noté plus simplement (a_n). On note (0) la suite constante dont tous les termes sont nuls et on rappelle que deux suites (a_n) et (b_n) sont égales si et seulement si, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a $a_k = b_k$.
- Soient (a_n) et (b_n) deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on définit leur somme $(a_n) + (b_n)$, leur produit $(a_n) \times (b_n)$ et le produit d'une suite par un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ respectivement par :

  $$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

  $$(a_n) \times (b_n) = (c_n) \text{ où, pour tout entier } n \in \mathbb{N} : c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

  $$\lambda \cdot (a_n) = (\lambda a_n)$$
- On admet que $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +\right)$ est un groupe commutatif d'élément nul (0).
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on notera X^p la suite $(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par :

  $$\begin{cases} x_p = 1 \\ x_n = 0 \quad \text{si } n \neq p \end{cases}$$

  On écrira aussi X^0 et X^1 respectivement 1 et X.
- Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal à $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Partie I : série génératrice d'une suite (a_n)

1) Propriétés algébriques

1.a) Montrer que $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times\right)$ est un anneau commutatif dont on précisera l'élément neutre.

1.b) Montrer que $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times\right)$ est intègre. (Indication : *si (a_n) est un élément non nul de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pourra considérer le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$.*)

1.c) Montrer qu'un élément (a_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est inversible dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.

1.d) Montrer que $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Les résultats précédents montrent que toute suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ peut s'écrire formellement sous la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$. Lorsqu'on note $A(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ ou $A = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$, alors $A(X)$ ou A sera appelée série génératrice de la suite (a_n). On remarque que par définition du produit des suites on a $X^p \times X^q = X^{p+q}$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. D'autre part, si A est une série génératrice, pour tout entier $k \geqslant 2$, A^k désigne le produit $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ facteurs}}$.

On remarquera aussi que s'il existe un entier p tel que $a_p \neq 0$ et tel que pour tout entier $n > p$ on a $a_n = 0$ alors la série génératrice de la suite (a_n) n'est autre qu'un polynôme de degré p qu'on notera $\sum_{n=0}^{p} a_n X^n$.

D'après la question 1.c) *ci-dessus, la série génératrice* $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ *est inversible si et seulement si* $a_0 \neq 0$. *Dans toute la suite, si la série génératrice* $A(X)$ *est inversible, on écrira son inverse sous la forme* $\frac{1}{A(X)}$. *Plus généralement si la série génératrice* $A(X)$ *est inversible et si* $B(X)$ *est une série génératrice quelconque, le produit* $B(X)\times \frac{1}{A(X)}$ *sera noté* $\frac{B(X)}{A(X)}$. *Si de plus* $B(X)$ *et* $A(X)$ *sont des séries génératrices sous la forme de polynômes alors* $\frac{B(X)}{A(X)}$ *peut être assimilée à une fraction rationnelle sur* $\mathbb{K}$ *et on admet que les techniques de décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{K}$ *restent valables pour* $\frac{B(X)}{A(X)}$.

2) Éléments inversibles

2.a) Montrer que la série génératrice inversible $\sum_{n\geqslant 0} X^n$ a pour inverse $1-X$, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n\geqslant 0} X^n$$

2.b) Soit $a \in \mathbb{K} - \{0\}$, montrer que :

$$\frac{1}{1-aX} = \sum_{n\geqslant 0} a^n X^n$$

2.c) Soient $a \in \mathbb{K} - \{0\}$, $b \in \mathbb{K} - \{0\}$ avec $a \neq b$, montrer que :

$$\frac{1}{(1-aX)\times(1-bX)} = \left(\frac{a}{a-b}\right)\frac{1}{1-aX} + \left(\frac{b}{b-a}\right)\frac{1}{1-bX}$$

3) L'opérateur de dérivation

L'opérateur de dérivation, $D : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est défini par :

$$D : A = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \mapsto D(A) = \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} n a_n X^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}X^n$$

3.a) Montrer que D est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Soient A et B deux séries génératrices. Montrer que :

3.b) $D(A\times B) = D(A)\times B + A\times D(B)$
(*on pourra commencer par traiter le cas où* $A = X^p$ *et* $B = X^q$ *où* $(p,q)\in\mathbb{N}^2$).

3.c) Si B est inversible

$$D\Big(\frac{A}{B}\Big) = \frac{D(A)\times B - A\times D(B)}{B^2}$$

4) Quelques exemples

4.a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la série génératrice est :

$$A(X) = \frac{1}{(1-X)^2}$$

est définie pour tout entier n par $a_n = n+1$.

4.b) Monter que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(a_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dont la série génératrice est

$$A_p(X) = \frac{1}{(1-X)^p}$$

est définie pour tout entier n par :

$$a_{p,n} = \binom{n+p-1}{n}$$

4.c) Soit $A(X)$ la série génératrice d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\dfrac{A(X)}{1-X}$ est la série génératrice de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

4.d) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{k} = \binom{n+p}{n}$$

Partie II : séries génératrices et suites récurrentes

1) On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{n+1} = 2a_n + n \end{cases}$$

On se propose de déterminer la formule explicite de a_n en fonction de n. On note $A(X)$ la série génératrice de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.a) Montrer que :

$$A(X) = 2X \times A(X) + X^2 \times \sum_{n\geqslant 0}(n+1)X^n$$

1.b) Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ de la fraction rationnelle

$$\frac{X^2}{(1-X)^2 \times (1-2X)}.$$

1.c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

2) On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

et on note $F(X)$ la série génératrice de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.a) Montrer que :

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 X} - \frac{1}{1-\alpha_2 X}\right)$$

où

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

2.b) En déduire l'expression de F_n en fonction de n.

3) Suites récurrentes linéaires d'ordre k ($k \geqslant 1$).

Soit $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^k$, avec $a_k \neq 0$. On considère l'ensemble $\mathcal{U}$ des suites complexes (u_n) définies par la donnée de $(u_0, \dots, u_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant k,\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}.$$

(*On utilisera, sans le démontrer, le fait que* $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel).*

Soit $(u_n) \in \mathcal{U}$. On note S la série génératrice de (u_n), et (E) l'équation caractéristique de (u_n) :

$$z^k = a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + \cdots + a_k \qquad (E).$$

3.a) Montrer que $\phi : (u_n) \in \mathcal{U} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ est un isomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{C}^k$.

3.b) On pose $Q(X) = 1 - a_1 X - \cdots - a_k X^k$ et $P(X) = Q(X) \times S(X)$. Montrer que $P(X)$ est un polynôme de degré au plus $k-1$, à coefficients dans $\mathbb{C}$.

3.c) On note $z_1, \cdots, z_p$ les racines dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) et $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ les ordres de multiplicité respectifs de $z_1, \cdots, z_p$.
Montrer qu'il existe des nombres complexes $b_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant \alpha_i$ tels que :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{b_{i,j}}{(X - 1/z_i)^j} \right).$$

3.d) Montrer alors qu'il existe des polynômes $R_1, \dots, R_p$ tels que pour tout n

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} R_i(n) z_i^n \text{ où } \forall i, deg(R_i) < \alpha_i.$$

3.e) On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des suites (v_n) dont le terme général s'écrit $v_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n) z_i^n$ où pour tout $i \in \{1, 2 \cdots, p\}$, P_i est un polynôme tel que $deg(P_i) < \alpha_i$.
Démontrer que $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont la dimension vérifie l'inégalité $\dim \mathcal{V} \leqslant k$ et déduire que $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Partie III : Nombre de partitions d'un ensemble

Soient $k \geqslant 1$ un entier et S un ensemble non vide, on dit que $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ est une partition de S en k classes si :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \cdots, k\}, S_i \neq \varnothing \\ \forall (i,j) \in \{1, \cdots, k\}^2,\ S_i \cap S_j = \varnothing \text{ si } i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{k} S_i = S \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $k \in \{1, \cdots, n\}$ on note $\left\{ {n \atop k} \right\}$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k classes. On pose par convention :

◇ pour tout entier $n \geqslant 1$: $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$

◇ pour tout entier $k > n$: $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$

◇ $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$

1) Donner toutes les partitions de l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en 2 classes.
Cette question montre que $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$. On se propose dans ce qui suit de calculer $\left\{ {n \atop k} \right\}$ en fonction de n et k.

2) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$$

(*On fixera un élément $s \in S$ et on considèrera les partitions contenant le singleton $\{s\}$ et les partitions qui ne le contiennent pas*).

3) On considère la série génératrice

$$A_k(X) = \sum_{n \geqslant 0} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} X^n$$

3.a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$A_k(X) = X \times A_{k-1}(X) + kX \times A_k(X)$$

3.b) En déduire que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$A_k(X) = \frac{X^k}{\prod_{m=1}^{k} (1 - mX)}$$

3.c) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{\prod_{m=1}^{k} (1 - mX)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_r}{1 - rX}$$

où, pour tout $r \in \{1, \cdots, k\}$, $\alpha_r = (-1)^{k-r} \dfrac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}$

3.d) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant k$:

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}$$

4) Application : nombre de surjections

On considère un ensemble E de cardinal n et un ensemble F de cardinal p où n et p sont deux entiers strictement positifs. On se propose de calculer le nombre $S(n, p)$ de surjections de E sur F.

4.a) Que vaut $S(n, p)$ lorsque $p > n$?

4.b) Que vaut $S(n, n)$?

4.c) On suppose maintenant que $p \in \{1, \cdots, n\}$. Montrer que :

$$S(n, p) = p! \begin{Bmatrix} n \\ p \end{Bmatrix}$$

Partie IV : Nombre de dérangements

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.
Un dérangement de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans point fixe c'est-à-dire telle que pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\sigma(i) \neq i$. On note d_n le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

On pose $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $p_n = \dfrac{d_n}{n!}$.

1) Calculer d_1, d_2 et d_3.

2) Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on note B_k l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement k points fixes.

2.a) Montrer que le cardinal de B_k vérifie l'égalité : $\operatorname{Card}(B_k) = \dbinom{n}{k} d_{n-k}$ et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$$

2.b) Soit P la série génératrice de la suite (p_n). Montrer que

$$E(X) \times P(X) = \sum_{n \geqslant 0} X^n, \text{ où } E(X) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} X^n.$$

2.c) Déterminer la série génératrice inverse de $E(X)$.

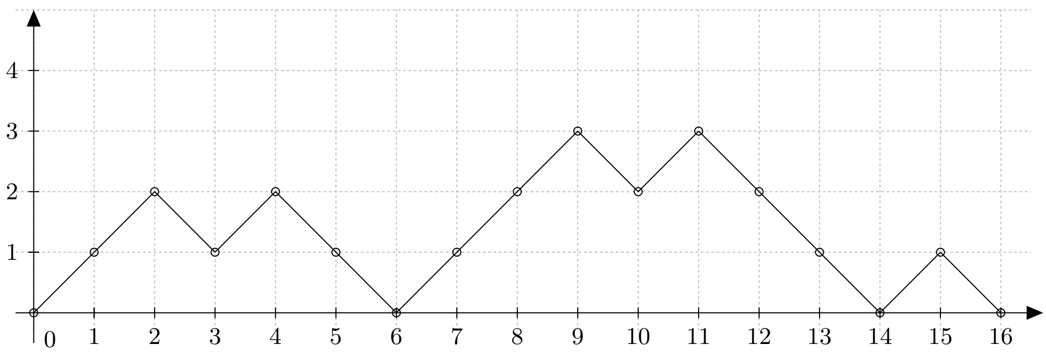
2.d) En déduire que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Partie V : Nombres de Catalan

1) Chemins de Dyck

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$, toute suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de points du plan dont les coordonnées sont des entiers positifs tels que $s_0 = (0, 0)$, $s_{2n} = (2n, 0)$ et, tels que, pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, 2n-1\}$, s_{k+1} est l'image de s_k par la translation de vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ ou de vecteur $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.
Voici un chemin de Dyck de longueur 16.



On note c_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. Les nombres c_n sont appelés **nombres de Catalan**. Pour tout chemin de Dyck $\mathcal{C} = (s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de longueur $2n$ on note $k(\mathcal{C})$ le plus petit entier tel que $s_{k(\mathcal{C})}$ soit d'ordonnée nulle et d'abscisse non nulle.

1.a) Justifier que $k(\mathcal{C})$ est un entier pair.

1.b) Montrer que le nombre de chemins de Dyck $\mathcal{C}$ de longueur $2n$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2n$ est égal à c_{n-1}.

1.c) Montrer que le nombre de chemins de Dyck $\mathcal{C}$ de longueur $2n$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2p$ avec $p \in \{1, \cdots, n-1\}$ est égal à $c_{p-1}c_{n-p}$.(Par convention, on pose $c_0 = 1$).

1.d) En déduire que la suite (c_n) vérifie la relation de récurrence :

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} c_{j-1}c_{n-j}$$

2) Expression des nombres de Catalan

Soit r un nombre rationnel positif. On définit les coefficients binomiaux généralisés par :

$$\begin{cases} \dbinom{r}{0} = 1 \\ \dbinom{r}{n} = \dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(r-k)}{n!} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique série génératrice $S(X) = \sum\limits_{n\geqslant 0} s_n X^n$ telle que :

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ S(X)^2 = 1 - 4X \end{cases}$$

et que cette série génératrice est donnée par :

$$S(X) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n X^n$$

2.a) Montrer que :

$$S(X) = 1 - \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{n+1} \binom{2n}{n} X^{n+1}$$

2.b) On pose

$$H(X) = \frac{1}{2}\Big(1 - S(X)\Big)$$

Vérifier que $H(X) = X + \Big(H(X)\Big)^2$

3) Soit $C(X)$ la série génératrice de la suite (c_n) des nombres de Catalan.

3.a) Montrer que :

$$X \times C(X) = X + (X \times C(X))^2$$

3.b) En déduire que, pour tout entier n, on a :

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

puis que, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

FIN DE L'ÉPREUVE

2.4 Commentaires sur 2$^{\text{de}}$ épreuve écrite

Le sujet de l'épreuve 2 abordait cette année les séries génératrices : leur construction était explicitée dans l'introduction, on établissait ensuite quelques propriétés algébriques puis on traitait de leurs applications aux suites récurrentes et à des problèmes de dénombrement. L'épreuve comportait cinq parties. La partie I établissait les principales propriétés algébriques liées à l'addition et à la multiplication, ainsi qu'à la multiplication par un scalaire : structures, éléments inversibles, opérateur de dérivation. On terminait par une application simple à un calcul de somme. La partie II était consacrée aux suites récurrentes, avec pour but l'expression du terme général a_n en fonction de n. Après un exemple ($a_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0, a_{n+1} = 2a_n + n$), on s'intéressait aux suites récurrentes linéaires : une fois traité le cas particulier de la suite de Fibonnacci, on obtenait l'expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre quelconque en fonction des racines de l'équation caractéristique. La partie III traitait du dénombrement des partitions d'un ensemble, et on obtenait en particulier l'expression du nombre de surjections d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal p.

La partie IV était aussi consacrée à du dénombrement, établissant grâce aux séries génératrices que le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ est $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. La dernière partie avait pour but l'expression des nombres de Catalan, introduits par les chemins de Dyck.

Analyse des prestations

Si un effort de présentation est généralement constaté, un manque général de rigueur est à signaler : expressions du type « de proche en proche » qui se substituent à un raisonnement par récurrence dont on ne peut manifestement faire l'économie, explications laborieuses en particulier en dénombrement, calcul d'inverses sans se préoccuper de leur existence.

Par ailleurs, de trop nombreux candidats ne sont pas attentifs aux objets qu'ils manipulent (confusion entre la suite (a_n) et le réel a_n) ce qui les conduit à ne pas comprendre certaines questions.

D'une manière générale, on rappelle ici qu'il est exigé de futurs professeurs une maîtrise minimale des concepts de base des mathématiques, et que l'utilisation d'un théorème se fasse dans le cadre d'hypothèses précises devant être clairement énoncées. Les questions relatives aux structures de base, à l'algébre linéaire (est-il raisonnable de confondre endomorphisme et isomorphisme ?) et au dénombrement ont montré la nécessité d'insister sur ces points.

La fin de la partie II et la partie IV ont été les moins abordées, sauf pour cette dernière le tout début par de nombreuses copies qui se contentent d'interminables explications pour glaner quelques points en dénombrement.

Partie I : beaucoup de candidats n'ont pas compris ce qu'était une série génératrice et ont confondu un coefficient d'une telle série avec la série elle-même (écriture du type $a_n + \lambda b_n = (c_n)$), ce qui a été très sévèrement sanctionné. Du coup, cela a donné lieu ensuite à de nombreux contresens : certains ont par exemple confondu avec les séries numériques, invoquant des questions de convergence ou des séries géométriques. Cette partie a aussi révélé la méconnaissance totale par certains candidats des bases de l'algèbre et de l'algèbre linéaire (anneaux, espaces vectoriels, endomorphismes).

Partie II : le début a souvent été correctement traité mais beaucoup n'ont ensuite pas compris l'utilisation des séries génératrices pour la suite de Fibonnacci. Le cas général a été peu abordé, et les réponses apportées à la question 3.a) sur l'isomorphisme ont laissé le jury pantois : confusion entre insomorphisme et endomorphisme, linéarité qui se résume à $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Un effort sur la maîtrise des concepts de base de l'algèbre linéaire doit manifestement être entrepris. Pour finir, la décomposition en éléments simples a donné lieu à des pratiques suspectes.

Partie III : souvent abordée et relativement bien traitée. On déplore cependant que pour ajouter des cardinaux d'ensembles, peu d'étudiants invoquent le caractère disjoint de la réunion.

Partie IV : le début est souvent abordé, mais peu de candidats savent utiliser avec profit les résultats démontrés dans la partie I sur les séries génératrices pour obtenir l'expression de d_n.

Partie V : de nombreuses copies traitent les questions 1.a) jusqu'à 1.d) sur les chemins de Dyck, mais très peu sont capables d'exposer un raisonnement clair sur ces questions de dénombrement. L'intime conviction l'emporte souvent en lieu et place d'arguments précis (cardinal d'un produit cartésien, addition des cardinaux d'une union disjointe, et c.), ce qui est gênant pour des futurs professeurs qui auront à enseigner par exemple les probabilités.

3 SUJETS ET ANALYSE DES ÉPREUVES ORALES

3.1 Liste des exposés (première épreuve orale)

1. Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations.
2. Exemples de problèmes dont la résolution fait appel à l'utilisation de graphes, orientés ou non.
3. Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.
4. Description mathématique d'une expérience aléatoire : événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini).
5. Probabilité conditionnelle ; indépendance de deux événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilité.
6. Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.
7. Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples.
8. Séries statistiques à deux variables numériques. Nuage de points associé. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
9. Propriétés axiomatiques de $\mathbb{N}$. Construction de $\mathbb{Z}$.
10. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, unicité du quotient et du reste. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
11. PGCD de deux entiers naturels. Nombres premiers entre eux. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
12. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Égalité de Bézout. Résolution dans $\mathbb{Z}$ d'une équation de la forme $ax + by = c$.
13. Nombres premiers ; existence et unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Exemple(s) d'algorithme(s) de recherche de nombres premiers. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
14. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
15. Construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Propriétés.
16. Construction du corps $\mathbb{C}$ des complexes. Propriétés.
17. Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.
18. Interprétation géométrique des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $z \mapsto z + b$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \overline{z}$, où a et b appartiennent à $\mathbb{C}$, a non nul. Exemples d'application à l'étude de configurations géométriques du plan.
19. Étude de la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f : z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$, où a, b, z sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.
20. Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.

21. Définition vectorielle d'une droite du plan, d'une droite et d'un plan de l'espace. Représentations paramétriques. Génération des demi-droites, des segments. Parallélisme.
22. Équation cartésienne d'une droite du plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes.
23. Droites et plans dans l'espace. Positions relatives ; plans contenant une droite donnée.
24. Théorème de Thalès. Applications à la géométrie du plan et de l'espace.
25. Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Application à l'étude de configurations du plan ou de l'espace.
26. Homothéties et translations ; transformation vectorielle associée. Effet sur l'alignement, les directions, les distances... Applications à l'action sur les configurations usuelles.
27. Composées d'homothéties et de translations du plan. Groupe des homothéties-translations. Applications.
28. Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation...).
29. Définition et propriétés du produit scalaire dans le plan ; expression dans une base orthonormale. Application au calcul de distances et d'angles.
30. Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.
31. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité. Applications.
32. Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.
33. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle quelconque. Applications.
34. Droites remarquables du triangle : bissectrices, hauteurs, médianes, médiatrices... (dans l'ordre que l'on voudra).
35. Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension trois. Point de vue géométrique, point de vue analytique. Applications.
36. Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté : calculs de distances, d'aires, de volumes, d'angles...
37. Orthogonalité dans l'espace affine euclidien : droites orthogonales, droite orthogonale à un plan, plans perpendiculaires. Applications.
38. Réflexion du plan échangeant deux points donnés ; médiatrice, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit...).
39. Réflexions du plan échangeant deux droites sécantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangentes à un cercle...).
40. Recherche des isométries du plan conservant un carré, un losange, un parallélogramme, un rectangle (dans l'ordre que l'on voudra).
41. Rotations planes. Notion d'angle. (On pourra traiter ces notions dans l'ordre que l'on voudra.)
42. Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.
43. Étude des transformations du plan euclidien qui conservent les rapports de distances.
44. Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier ; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone...).
45. Réflexion de l'espace échangeant deux points donnés ; plan médiateur, régionnement associé. Étude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.

46. Réflexions et rotations de l'espace. Effet sur les distances, les angles... Applications à l'action sur les configurations usuelles.
47. Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangente ; interprétation cinématique.
48. Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.
49. Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
50. Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
51. Exemples de représentation paramétrique des coniques ; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.
52. Suites monotones, suites adjacentes. Approximation d'un nombre réel, développement décimal. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
53. Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Limites et relation d'ordre.
54. Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.
55. Étude des suites de terme général a^n, n^b et $n!$ ($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$). Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
56. Étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
57. Exemples d'étude de la rapidité de convergence d'une suite réelle $(u_n)_n$ vers une limite ℓ : Cas où $|u_n - \ell|$ est dominé par n^{-a}, par q^n... L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
58. Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fonction en un point. Exemples.
59. Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
60. Image d'un intervalle par une fonction continue, cas d'un segment. Cas d'une fonction continue strictement monotone.
61. Dérivée en un point, meilleure approximation affine, interprétation géométrique. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
62. Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.
63. Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Étude de la continuité, de la dérivabilité. Exemples.
64. Comparaison des fonctions : domination, prépondérance, équivalence. Exemples et applications.
65. Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

66. Théorème de Rolle. Applications.
67. Formules de Taylor. Applications.
68. Développements limités, opérations sur les développements limités.
69. Fonctions polynômes.
70. Fonctions logarithmes.
71. Fonctions exponentielles.
72. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
73. Caractérisation des fonctions exponentielles réelles par l'équation fonctionnelle : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
74. Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
75. Applications de la dérivation à l'étude des extrémums éventuels d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
76. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.
77. Intégration par parties, par changement de variable. Exemples et applications.
78. Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
79. Méthodes d'approximation des zéros d'une fonction numérique réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
80. Étude des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Exemples.
81. Exemples d'approximation d'une solution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

3.2 Liste des sujets de l'épreuve sur dossier (seconde épreuve orale)

date	thème	
26 juin 2010	Étude de suites	
27 juin 2010	Probabilités	
28 juin 2010	Équations différentielles	
29 juin 2010	Calcul de grandeurs	longueurs, aires, volumes
30 juin 2009	Arithmétique	
1er juillet 2010	Nombres complexes	
2 juillet 2010	Géométrie	Recherche de lieux géométriques
3 juillet 2010	Intégration	
4 juillet 2010	Fonctions	et équations
7 juillet 2010	Probabilités	
8 juillet 2010	Arithmétique	
9 juillet 2009	Fonctions	Utilisation des variations d'une fonction
10 juillet 2009	Géométrie dans l'espace	
11 juillet 2009	Divers types de raisonnement	
12 juillet 2009	Géométrie	Étude de configurations
13 juillet 2009	Propriétés des fonctions	
14 juillet 2009	Probabilités	
15 juillet 2009	Équations différentielles	
16 juillet 2009	Arithmétique	

3.3 Analyse des épreuves orales

Les épreuves orales ont été définies par un arrêté ministériel du 30 avril 1991 modifié par un arrêté du 3 août 1993. Les instructions les concernant ont été publiées dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993. Les objectifs communs aux deux épreuves orales sont précisés dans ces paragraphes, extraits des textes cités :

Les épreuves orales visent d'abord à évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné. A l'exception des quelques sujets d'exposé (première épreuve) où il est fait référence au programme complémentaire, il convient de se placer au niveau de l'enseignement secondaire, c'est-à-dire de ne pas dépasser le niveau du baccalauréat. Le candidat peut cependant être amené à faire appel aux connaissances acquises dans ses études supérieures pour analyser et commenter la démarche suivie, éclairer un point conceptuel ou technique et situer la question dans son contexte mathématique et scientifique. La mise en valeur de l'enchaînement des étapes du raisonnement constitue un objectif majeur. Les candidats ne doivent en aucun cas se borner à l'exposé, si parfait soit-il formellement, d'une liste de définition, de théorèmes, d'exemples et d'exercices : il est indispensable de dégager l'articulation mutuelle des divers éléments.

3.3.1 Commentaires sur la première épreuve

On rencontre de très belles prestations, mais aussi les plus mauvaises. Les conseils qui suivent se tiennent volontairement à l'écart d'une collection de « perles » ; leur étude doit permettre à tout candidat d'améliorer sa performance, et en même temps ses capacités à exercer le métier d'enseignant.

Modalités pratiques

Rappelons brièvement le déroulement de cette épreuve. Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets. Il devra choisir l'un des deux sujets et disposera de deux heures pour sa préparation, sans document ; le candidat n'annoncera son choix que lors de sa parution devant le jury.

L'épreuve se déroule en deux phases : présentation de la leçon et questions du jury.

• La présentation de la leçon dure 25 minutes, sans interruption du jury. Cette première phase consiste à exposer un plan et à effectuer les démonstrations des propositions énoncées. Le plan doit être aussi riche que possible et peut contenir des exemples, contre-exemples et applications des outils introduits. Le candidat peut gérer son tableau à sa guise, néanmoins il serait bon de réserver une partie du tableau pour faire les démonstrations de manière à ce qu'à la fin l'ensemble du plan figure au tableau. Nous rappelons que cette partie ne fait pas un bon effet si elle se réduit à une recopie mot à mot des notes que l'on lit.

• La seconde phase, d'une durée de 20 minutes, est réservée aux questions du jury. Ces questions peuvent être de divers ordres :

• rectifier certaines erreurs ou préciser certains points obscurs dans le plan ou dans les démonstrations.

• vérifier la maîtrise et le recul du candidat sur le sujet traité. En particulier, le candidat est censé répondre sur tous les points présentés dans son plan ainsi qu'à toutes questions relatives au sujet, qu'il aurait omises volontairement ou non.

Remarques sur l'épreuve

D'une manière générale le jury souhaiterait encourager les futurs candidats à donner une touche personnelle à leurs plans, ceci ne peut se faire qu'au prix d'un travail régulier et approfondi durant l'année de préparation. Il n'est pas possible pendant les deux heures de préparation de monter une bonne leçon si le sujet n'a pas été travaillé pendant l'année de préparation au concours. Il est par ailleurs risqué de laisser de trop grandes brèches ou « impasses » ; on voit des candidats déstabilisés devant un choix comportant deux sujets fort classiques, ce qui indique a priori que des chapitres entiers ont été ignorés pendant l'année de préparation.

Sur le plan

Les plans doivent être structurés plus rigoureusement, en particulier :

• la chronologie est essentielle, elle montre la vue d'ensemble du candidat par rapport à son sujet et permet d'éviter les répétitions et les cercles vicieux.

• Le statut des énoncés est important et parfois joue un rôle important dans la qualité de la leçon : bien différencier une définition d'une proposition, un corollaire d'un théorème fondamental, etc. Par ailleurs il est important de savoir faire ressortir les points les plus importants, en les distinguant d'autres points secondaires. Pour illustrer cette idée, on peut exposer le cas d'une leçon abordant la convergence des suites de nombres réels : on peut annoncer la proposition « Une suite croissante de nombres réels est convergente si, et seulement si, elle est majorée »Mais la proposition « Toute suite convergente est majorée »est une conséquence élémentaire des définitions alors que la proposition « Toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente »qui repose sur le théorème de la borne supérieure (fondement des nombres réels) est bien plus profonde. Ainsi, du point de vue de la genèse des idées, le plan correspondant gagnera en clarté si ces deux énoncés sont présentés séparément et hiérarchiquement.

• Les définitions et les énoncés des propositions ou théorèmes doivent être écrits dans leur intégralité ; si le candidat n'écrit qu'une version abrégée, il doit s'attendre à ce que le jury lui demande une version détaillée et complète. Pour économiser du temps d'écriture, le candidat peut éventuellement utiliser des transparents.

Les plans peuvent être enrichis :

• en introduisant de nombreux exemples et contre-exemples bien choisis montrant pour les théorèmes à la fois, leur impact, la nécessité des hypothèses, les limites à leur application : un simple énoncé correct, c'est évidemment bien ; des développements tels que ceux qui viennent d'être décrits montrent que le candidat possède du recul, et une connaissance en profondeur du sujet traité.

• en donnant de nombreuses applications, y compris des applications transversales au sens où elles concernent, soit des domaines mathématiques différent du domaine usuel dans lequel s'inscrit le sujet, soit plus largement des domaines issus d'autres sciences, sciences physiques, astronomie, sciences naturelles, etc.

• en montrant des figures. En géométrie cela semble le plus naturel, mais un dessin peut se révéler très utile aussi dans les autres domaines, et particulièrement en analyse. Les figures géométriques peuvent être réalisées à main levée, ou aux instruments, ou encore préparées sur des transparents, ou enfin sur le logiciel de géométrie de la calculatrice. Il revient au candidat de choisir la méthode qui met le mieux en valeur son travail et ses compétences ; de belles figures réalisées à la main resteront appréciées pour leur élégance ; à l'opposé, des figures bien présentées à la calculatrice, éventuellement animées, témoigneront des capacités du candidat à utiliser les moyens mis à sa disposition, et à s'investir ultérieurement dans l'utilisation des TICE.

Le candidat choisit le niveau auquel il place son exposé. En conséquence :

• sa prestation lors de l'exposé doit rester cohérente avec le niveau qu'il a choisi.

• s'il aborde les diverses notions de manière trop élevée sur le plan « théorique », le jury cherchera à vérifier la solidité de l'exposé au niveau correspondant, et il essayera de faire revenir le candidat aux aspects plus concrets et aux applications plus simples.

• s'il aborde le sujet à un niveau trop faible, le jury ne se satisfera pas de devoir rester à ce niveau, ce qui amène parfois certains (surtout s'ils écoutent mal les questions par la suite) à quitter le jury inconscients de leur médiocre performance.

Sur les démonstrations

ll arrive trop souvent que des candidats présentent un plan sans aucune démonstration. Cette manière de préparer l'épreuve est à proscrire. Rappelons que le candidat est jugé sur le contenu de son plan mais aussi sur sa prestation notamment au cours des démonstrations qui sont faites, en particulier la pertinence du choix des points démontrés par rapport au sujet et la consistance de ceux-ci sont un élément important d'appréciation. Cette exigence renforce la nécessité, pour le candidat, de disposer d'un minimum de recul par rapport aux connaissances présentées, recul nécessaire pour l'aider à trouver quels sont véritablement les « points forts »de son exposé.

D'une manière générale, il est conseillé :

• De choisir le développement d'un ou de plusieurs points consistants, centraux par rapport au sujet, permettant de montrer son aptitude à raisonner sur les notions étudiées.

• De montrer ses qualités pédagogiques en s'efforçant de donner la présentation la plus naturelle possible (l'utilisation de figures est recommandée chaque fois que cela est possible), faisant ressortir clairement la démarche scientifique utilisée et en mettant bien en relief les points cruciaux des différentes preuves ; beaucoup de candidats se contentent d'aligner une suite de raisonnements, présentés artificiellement, sans être capable d'expliquer l'origine de leurs motivations.

• De bien vérifier l'absence de lacune dans l'enchaînement logique de la démonstration ; il arrive souvent qu'un candidat se trouve complètement désarçonné lorsqu'on lui demande d'éclaircir certains passages, ce qui lui fait découvrir des difficultés qui lui avaient échappé.

Sur les questions du jury

Les questions du jury peuvent porter aussi bien sur la conception, l'organisation du plan, que sur les démonstrations, abordées ou non, au cours de l'exposé. Elles peuvent également porter sur les pré-requis ou concerner certains prolongements omis, soit pour s'assurer de la solidité des connaissances, soit pour compléter un plan trop pauvre.

Nous insistons sur le fait qu'il est essentiel que les candidats aient un certain recul sur les notions qu'ils devront enseigner et ne peuvent donc en aucun cas se contenter de ne connaître que ce qui est exigible pour un élève du secondaire actuel. Par exemple, s'il est normal d'admettre lors d'un exposé le théorème « Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle », il est insuffisant de la part du titulaire d'une licence qu'il n'ait pas la moindre idée sur les propriétés permettant ce résultat. De même, si la définition rigoureuse des angles est hors de portée d'un élève, il n'est pas acceptable qu'un futur enseignant n'y ait jamais réfléchi au point d'être incapable de fournir la moindre piste pour attaquer ce délicat problème, ou plus grave, ne pas sembler comprendre l'importance de la question qui se pose.

L'entretien commence le plus souvent par la mise au point et la correction d'erreurs de détail, notamment de lapsus ou d'erreurs bénignes, de confusions de notation, etc. Le candidat ne doit pas penser que ces questions constituent des pièges. Dans la suite de l'entretien, il est important d'écouter réellement les questions : d'une part, une question mal écoutée et à laquelle on répond de manière précipitée risque de se conclure par des réponses inadaptées, et une situation défavorable au candidat ; d'autre part, on attend du futur professeur qu'il écoute et analyse les questions de ses futurs élèves, et pour cela, il lui faudra aussi « savoir écouter ».

Les questions ne sont pas de niveau constant : le jury peut souhaiter, par des questions très élémentaires, mettre le candidat en confiance ; par des questions plus profondes, il peut souhaiter donner au candidat la possibilité de montrer qu'il dispose de recul par rapport au sujet traité. Une erreur, une réponse erronée n'est pas nécessairement catastrophique : si le candidat, alerté par d'autres questions du jury, s'aperçoit de son erreur et est capable de la corriger, il laissera l'impression positive d'un futur enseignant capable de réagir valablement lorsqu'il est en difficulté.

3.3.2 Commentaires sur la seconde épreuve

L'exposé du candidat

Jouer la montre lors de l'exposé n'est pas pertinent ; le jury reporte le temps non utilisé pour l'exposé sur la seconde partie de l'épreuve, et si le candidat remplit son temps d'exposé en résolvant en détail un exercice — celui proposé par le jury ou un autre — le jury ne peut intervenir pendant cette résolution. Faire un exposé plus court que les 25 minutes maximales autorisées n'est pas considéré comme une faute. Remplir les 25 minutes en traitant des points non demandés expose le candidat au risque d'être interrogé de manière plus exigeante et plus rapide puisque le jury aura moins de temps pour l'entretien. Bien entendu, un exposé de qualité long de 25 minutes est parfaitement pris en compte et joue en faveur du candidat lorsqu'il est conforme à la définition de l'épreuve.

Interprétation du thème par les candidats, « hors-sujet »

On rappelle que l'énoncé du thème est à prendre au sens littéral de la cartouche figurant en tête du dossier. Trop de candidats, par frilosité, n'ont pas osé s'éloigner de l'exercice proposé par le jury alors même que celui-ci ne couvrait qu'une faible partie du thème. Ils se contentaient de proposer parfois de simples démarquages de l'exercice proposé par le jury.

Il a aussi été noté que trop de candidats n'osaient pas varier le niveau des exercices qu'ils proposent. Certains dossiers suggèrent fortement cette ouverture, notamment par le moyen des extraits de programmes qui y sont attachés.

Équilibre des différents éléments de l'épreuve

La présidence du concours était très attentive à ne pas laisser le travail sur l'exercice proposé par le jury envahir l'ensemble de cette épreuve. Dans cet esprit, des instructions ont été données aux commissions de sorte qu'elle répartissent convenablement le temps d'entretien entre, d'une part, les questions relatives à l'exercice du jury, résolution éventuellement comprise, et d'autre part l'étude des exercices présentés par le candidat. Des instructions cohérentes étaient données aux candidats : chaque vague est reçue séparément et reçoit une série de conseils pour préparer et passer l'épreuve dans les meilleures conditions. Parmi ces conseils figurait l'avertissement disant que le travail sur l'exercice proposé par le jury ne constituait qu'une partie de l'épreuve, et que par conséquent ils doivent penser à partager leur temps de préparation de manière adaptée à l'importance de chaque point à traiter. Cette consigne de travail s'est heurtée au fait qu'une partie des candidats arrivait devant les commissions en ayant trop peu travaillé sur leurs propres exercices. Aussi dans certains cas, l'interrogation sur les exercices proposés par les candidats se trouvait-elle quelque peu limitée. Nous avons renforcé cette demande d'équilibrage de l'épreuve en allégeant dans la mesure du possible le travail de rédaction demandé sur l'exercice proposé par le jury. L'importance des exercices proposés par les candidats se trouve ainsi très clairement réaffirmée.

Présentation du sujet

Pour éviter toute ambiguïté et à la demande de plusieurs membres du jury, lors de la session 2009, on a retiré les questions Q_i présentes dans les textes lors des sessions précédentes. On précise maintenant de manière explicite ce que le candidat aura à rédiger sur ses fiches et ce qu'il aura à présenter devant le jury.

3.3.3 Les dossiers de la 2$^{\text{de}}$ épreuve orale

Ci-dessous sont présentés les dossiers dans l'ordre de leur parution. On n'a pas jugé utile de donner ici les annexes des dossiers, c'est-à-dire les extraits de programmes qui les accompagnent.

Dossier du 26 juin 2010

Thème : Étude de suites

1. L'exercice proposé au candidat

Soit a un réel. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

1) Étudier les cas $a = 0$, $a = 1$ et $a = 2$.

   Dans toute la suite, on suppose que $a \in]0; 1[$.

2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = x(2 - x)$.
3) Montrer que, pour tout entier n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat présentera au Jury :

- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 4) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Étude de suites** ».

Dossier du 27 juin 2010

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue au hasard n tirages successifs ($n \geqslant 2$) d'une boule en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

1) 1.a) Calculer la probabilité de l'événement « toutes les boules tirées ont la même couleur ».

   1.b) Calculer la probabilité de l'événement « on obtient exactement une boule blanche ».

   On considère les deux événements A et B suivants :

   A : « on obtient des boules des deux couleurs »

   B : « on obtient au plus une boule blanche »

2) Calculer les probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$ et $P(B)$.
3) Montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si et seulement si l'entier n vérifie l'égalité $2^{n-1} = n + 1$.
4) En déduire qu'il existe une valeur unique de n pour laquelle A et B sont deux événements indépendants (on pourra considérer la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = 2^{n-1} - (n + 1)$ et montrer qu'elle est strictement croissante).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat présentera au Jury :

- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;
- ◇ sa réponse à la question 1)

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ la réponse à la question 2) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème **« Probabilités »**.

Dossier du 28 juin 2010

Thème : Équations différentielles

1. L'exercice proposé au candidat

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

1) On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à $\mathcal{C}$, on considère le point P de coordonnées $(t, 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. Montrer que la distance PN est constante.

2) Dans la suite de l'exercice f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive, dérivable et dont la fonction dérivée est strictement positive. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à la courbe représentative de f, on considère le point P de coordonnées $(t, 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

   2.a) Calculer la distance PN en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.

   2.b) Déterminer une équation différentielle (E_k) vérifiée par les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, strictement positives, dérivables et dont la fonction dérivée est strictement positive, pour lesquelles la distance PN est une constante k.

   2.c) Déterminer les fonctions f solutions de (E_k).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat présentera au Jury :

◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;

◇ sa réponse à la question 2) .

Le candidat rédigera sur ses fiches :

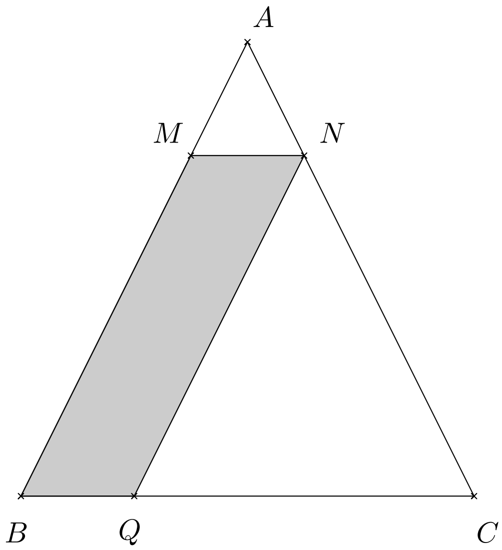
◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Équations différentielles** ».

Dossier du 29 juin 2010

Thème : Calcul de grandeurs : longueurs, aires, volumes

L'exercice proposé au candidat

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AC = 5$ et $BC = 6$. Un point M se déplace sur le segment $[AB]$ en restant différent des points A et B. Le point N est l'intersection de (AC) et de la parallèle à (BC) passant par M. On désigne par Q le point du segment $[BC]$ tel que le quadrilatère $MNQB$ soit un parallélogramme. On se propose de déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du parallélogramme $MNQB$ soit maximale. Pour cela on pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire du parallélogramme $MNQB$.



1) Montrer que $MN = \dfrac{6}{5}x$ et en déduire l'aire du triangle AMN.
2) Montrer que $QC = \dfrac{6}{5}(5 - x)$ et en déduire l'aire du triangle CNQ.
3) Montrer que $f(x) = \dfrac{12}{25}(-2x^2 + 10x)$.
4) Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est maximal.

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le travail demandé au candidat

Le candidat présentera au jury :

- ◇ Les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice ;
- ◇ un énoncé à présenter en classe de Seconde pour résoudre la question 4) de l'exercice.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 1).
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : « **Calcul de grandeurs : longueurs, aires, volumes** ».

Dossier du 30 juin 2010

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $a_n = 1! + 2! + \cdots + n!$

On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite (a_n)

$a_1 = 1$
$a_2 = 3$
$a_3 = 3^2$
$a_4 = 3 \times 11$
$a_5 = 3^2 \times 17$
$a_6 = 3^2 \times 97$
$a_7 = 3^4 \times 73$
$a_8 = 3^2 \times 11 \times 467$
$a_9 = 3^2 \times 131 \times 347$
$a_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787$

1) Montrer que a_n n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.
2) Peut-on affirmer que a_n est divisible par 11 à partir d'un certain rang ?
3) Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, a_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 3) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

Le candidat présentera au jury :

◇ le contenu de ses fiches ;

◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 1er juillet 2010

Thème : Nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

Pour chaque question, une seule des 4 propositions est exacte. Cochez pour chacune d'elle la bonne réponse sans justification.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z} + |z| = 6 + 2i$. L'écriture algébrique de z est :

☐ $\dfrac{8}{3} - 2i$ ☐ $-\dfrac{8}{3} - 2i$ ☐ $\dfrac{8}{3} + 2i$ ☐ $-\dfrac{8}{3} + 2i$

2) Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1| = |z + i|$ est la droite d'équation :

☐ $y = x - 1$ ☐ $y = -x$ ☐ $y = -x + 1$
☐ $y = x$

3) Soit n un entier naturel. Le nombre $(1 + i\sqrt{3})^n$ est réel, si et seulement si, n s'écrit sous la forme

☐ $3k + 1$ ☐ $3k + 2$ ☐ $3k$ ☐ $6k$

4) Soit l'équation (E) : $z = \dfrac{6 - z}{3 - z}$ $(z \in \mathbb{C})$. Une solution de (E) est :

☐ $-2 - \sqrt{2}i$ ☐ $2 + \sqrt{2}i$ ☐ $\sqrt{3} + i$
☐ $\sqrt{3} + 2i$

5) Dans le plan complexe, A et B étant les points d'affixes respectives $z_A = -2$ et $z_B = 2i$, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant la relation $\arg\left(\dfrac{z + 2}{z - 2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est inclus dans :

☐ La droite d'équation $y = -x$ ☐ Le cercle de centre $I(1 + i)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$
☐ La droite d'équation $y = x$ ☐ Le cercle de diamètre $[AB]$

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ une justification des réponses aux questions 3) et 5) du QCM ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Nombres complexes** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ pour chaque item de ce QCM, les méthodes et les savoirs mis en jeu pour trouver la réponse exacte.

Dossier du 2 juillet 2010

Thème : Recherche de lieux géométriques

1. L'exercice proposé au candidat

On dira qu'un triangle ABC non aplati possède la propriété P si ses deux médianes issues de A et de B sont perpendiculaires.

1) On suppose qu'un triangle ABC a pour côtés $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{3}$. Vérifier que le triangle ABC est rectangle et possède la propriété P.
2) Les deux points A et B étant fixés, on cherche à déterminer l'ensemble Γ des points C tels que le triangle ABC possède la propriété P. Trouver le lieu des points G, isobarycentre des trois points A, B, C, lorsque C décrit Γ. En déduire l'ensemble Γ.
3) Soit ABC un triangle possédant la propriété P. On pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$. Montrer que l'on a la relation $a^2 + b^2 = 5c^2$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2) et un énoncé plus détaillé de cette question à proposer à des élèves de première S ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Recherche de lieux géométriques** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 3 juillet 2010

Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\, e^{1-x}$$

1) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$

 1.a) Démontrer que, pour tout réel t positif on a : $t + 2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$

 1.b) En déduire que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $F(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \displaystyle\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$

 1.c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$$

 1.d) En déduire que, pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}$.

2) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt.$$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Intégration** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 4 juillet 2010

Thème : Fonctions, équations

1. L'exercice proposé au candidat

On considère l'équation (E) : $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

1) Montrer que si x est solution de cette équation alors x appartient à l'intervalle $[-2, 2]$
2) Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).
3) Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution en précisant la méthode utilisée.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Fonctions, équations** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 7 juillet 2010

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Dans un lycée qui ne reçoit pas d'interne, la répartition des élèves se fait de la façon suivante :

Niveau	Seconde	Première	Terminale	Total
Externes	50		85	195
Demi-pensionnaires	285	220		
Total			280	

Rappel de notation : $P_B(A)$ est la probabilité de A sachant que B est réalisé.

1) Compléter le tableau ci-dessus.
2) On rencontre un élève du lycée au hasard. On note E l'événement « l'élève rencontré est externe », T l'événement « l'élève rencontré est en terminale » et S l'événement « l'élève rencontré est en seconde ». En supposant que tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés, calculer les probabilités suivantes :
   2.a) $P(E \cap S)$.
   2.b) $P(\overline{E} \cap T)$ où $\overline{E}$ est l'événement contraire de E.
3) 3.a) Les événements E et T sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.
   3.b) Citer deux événements incompatibles.
4) Calculer les probabilités conditionnelles suivantes : $P_S(\overline{E})$ et $P_E(T)$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat présentera au Jury :

- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;
- ◇ le contenu de ses fiches.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ la réponse à la question 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème **« Probabilités »**.

Dossier du 8 juillet 2010

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

1) Déterminer deux entiers relatifs u et v tel que $7u - 13v = 1$ puis déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.

2) On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $f(n)$ le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26. On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau suivant :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $f(n)$. La lettre est alors codée par la lettre associée à $f(n)$. On sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

2.a) Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a + b & \equiv 10 \pmod{26} \\ 19a + b & \equiv 14 \pmod{26} \end{cases}$

2.b) En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

2.c) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $0 \leqslant b \leqslant 25$, tels que $\begin{cases} 5a + b & \equiv 10 \pmod{26} \\ 19a + b & \equiv 14 \pmod{26} \end{cases}$

2.d) On suppose que $a = 17$ et $b = 3$. Coder le message « GAUSS ».

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa réponse à la question 1 et à la question 2.c) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

Le candidat présentera au jury :

◇ le contenu de ses fiches ;

◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 9 juillet 2010

Thème : Utilisation des variations d'une fonction

1. L'exercice proposé au candidat

1. Pour tout réel $x > 0$, on pose : $f(x) = x - 1 - \ln(x)$.
   Étudier les variations de la fonction f et en déduire que pour tout réel $x > 0$, on a :
$$\ln(x) \leqslant x - 1.$$
2. Soient a, b et c des réels strictement positifs : on pose $m = \dfrac{a+b+c}{3}$. En appliquant l'inégalité précédente aux réels $\dfrac{a}{m}$, $\dfrac{b}{m}$ et $\dfrac{c}{m}$, montrer que :
$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc$$

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2) ;
- ◇ au moins deux méthodes différentes permettant de démontrer que pour tous réels strictement positifs a et b on a :
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$$
- ◇ un exercice se rapportant au thème « **Utilisation des variations d'une fonction** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 10 juillet 2010

Thème : Géométrie dans l'espace

1. L'exercice proposé au candidat

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes. Pour chaque question, une seule des trois propositions a), b) ou c) est exacte. On demande d'indiquer laquelle, sans justification. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1) Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ est :
   a) l'ensemble vide b) un plan c) une sphère
2) On considère les points $E(0; 1; -2)$ et $F(2; 1; 0)$. Les coordonnées du barycentre G du système de points pondérés $\{(E; 1), (F; 3)\}$ sont :
   a) $G(6; 4; -2)$ b) $G(1{,}5; 1; -0{,}5)$ c) $G(0{,}5; 1; 1{,}5)$
3) Soit d la droite de représentation paramétrique $x = 2-t; \quad y = 3t; \quad z = -3, \quad t \in \mathbb{R}$. On considère les points $A(2; 3; -3), B(2; 0; -3)$ et $C(0; 6; 0)$. On a :
   a) $d = (AB)$ b) $d = (BC)$ c) $d \neq (AB)$ et $d \neq (BC)$ et $d \neq (CA)$
4) La droite de représentation paramétrique $x = -4t; \quad y = 1+3t; \quad z = 2+2t, \quad t \in \mathbb{R}$, et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :
   a) orthogonaux b) parallèles c) ni orthogonaux ni parallèles.
5) L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ est :
   a) l'ensemble vide b) une droite c) un plan

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ une justification des réponses aux questions 3) et 4) du QCM ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Géométrie dans l'espace** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ pour chaque item de ce QCM, les méthodes et les savoirs mis en jeu pour trouver la réponse exacte.

Dossier du 11 juillet 2010

Thème : Divers types de raisonnement

1. L'exercice proposé au candidat

Les propositions suivantes sont indépendantes. Pour chacune d'elles, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1) Toute suite numérique non majorée tend vers $+\infty$.
2) La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.
3) Il existe un nombre réel a et un nombre réel b, tels que $e^{2a} + e^{2b} < 2\sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.
4) Il existe une fonction f continue en un point x_0 et non dérivable en x_0.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse aux questions 2) et 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Divers types de raisonnement** » dans des domaines variés (arithmétique, géométrie, dénombrement, analyse, etc $\cdots$).

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 12 juillet 2010

Thème : Étude de configurations

1. L'exercice proposé au candidat

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ avec $x \in]0, +\infty[$. Soit a un réel strictement positif.

1) La droite $(\mathcal{D}_a)$, tangente à $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisse a, coupe l'axe des abscisses en P_a et l'axe des ordonnées en Q_a. Déterminer les coordonnées de P_a et Q_a et montrer que l'aire du triangle OP_aQ_a est indépendante du réel a.

2) On considère un réel $k > \dfrac{2}{a}$. On note (Δ_k) la droite parallèle à $(\mathcal{D}_a)$ et passant par le point de coordonnées $(0, k)$. Montrer que lorsque k varie dans l'intervalle $]\dfrac{2}{a}, +\infty[$, la droite (Δ_k) coupe la courbe $(\mathcal{C})$ en deux points B_k et C_k et que le milieu I_k de $[B_k, C_k]$ est aligné avec O et A.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- sa réponse à la question 2) ;
- un exercice se rapportant au thème « **Étude de configurations** ».

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 13 juillet 2010

Thème : Propriétés des fonctions

1. L'exercice proposé au candidat

Les questions sont indépendantes. Dans chacun des cas suivants, proposer une fonction f qui vérifie les propriétés données. On donnera l'expression de $f(x)$.

1) f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ae^{2x} + be^{x} + c.$$

La limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 0 et $\ln 2$.

2) f est une fonction définie sur $]0, +\infty[$, $f(2) = 4$ et, pour tout x et tout y strictement positifs on a :

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

3) f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur $[-2, 2]$ est 0.

4) f est une fonction paire, non constante, définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x + 1) = f(x).$$

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse aux questions 2) et 4) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Propriétés des fonctions** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Dossier du 14 juillet 2010

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

On place dans une urne 100 billets de loterie dont seulement deux sont gagnants.

1) Un joueur achète deux billets, qu'il tire simultanément dans l'urne.
   1.a) Quelle est la probabilité de ne pas gagner ?
   1.b) En déduire la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant.
2) Soit n un entier ($n \geqslant 2$). Un joueur achète n billets, qu'il tire simultanément dans l'urne.
   Soit A_n l'événement : « Avoir 1 ou 2 billet(s) gagnant(s) en achetant n billets ».
   2.a) Décrire à l'aide d'une phrase l'événement $\overline{A_n}$, événement contraire de A_n.
   2.b) Montrer que la probabilité de l'événement $\overline{A_n}$ est :
   $$p\left(\overline{A_n}\right) = \frac{(100-n)(99-n)}{100 \times 99}.$$
   2.c) Quel est le nombre minimum n_0 de billets à acheter pour que la probabilité d'avoir au moins 1 billet gagnant soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ la réponse à la question 2.b) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Probabilités** ».

Le candidat présentera au Jury :

- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;
- ◇ le contenu de ses fiches.

Dossier du 15 juillet 2010

Thème : Équations différentielles

1. L'exercice proposé au candidat

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur $[0, +\infty[$ vérifiant la condition

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{pour tout } x \in [0, +\infty[, \quad f(x)f'(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) On se propose de démontrer qu'une fonction vérifiant la condition (1) est strictement positive sur $[0, +\infty[$.
   - 1.a) Montrer que si la fonction f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$.
   - 1.b) On suppose que la fonction f vérifie la condition (1) et qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) < 0$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, a]$.
   - 1.c) Conclure.
2) Existence et unicité de la fonction :
   - 2.a) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Déterminer une primitive de la fonction uu' sur cet intervalle.
   - 2.b) En déduire que si f est telle que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x)f'(x) = 1$ alors il existe une constante C telle que pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$(f(x))^2 = 2x + C.$$

   - 2.c) On rappelle que $f(0) = 1$. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour x réel positif.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat présentera au Jury :

- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice ;
- ◇ le contenu de ses fiches.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponses aux questions 1.b) et 2.b) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Équations différentielles** ».

Dossier du 16 juillet 2010

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

L'âge du capitaine

Le capitaine a fait naufrage. Tout ce que l'on a retrouvé sur lui est sa carte de sécurité sociale. On parvient à déchiffrer son numéro INSEE, sauf le deuxième chiffre a et le troisième chiffre b qui sont illisibles : $1ab1271153044$ clé 67

Les deux chiffres a et b qui manquent sont, dans cet ordre, les deux derniers chiffres de l'année de naissance du capitaine. On se propose d'utiliser la clé du numéro INSEE pour retrouver cette année de naissance.

1) La clé K d'un numéro INSEE est calculée de la manière suivante : $K = 97 - R$ où R est le reste de la division euclidienne par 97 de l'entier N constitué par les 13 premiers chiffres du numéro INSEE.

   1.a) Démontrer que la clé K d'un numéro INSEE est telle que $N + K \equiv 0 \pmod{97}$.

   1.b) Déduire que, pour le numéro INSEE du capitaine, on a : $N \equiv 30 \pmod{97}$.

2) On écrit $1ab1271153044 = 1ab \times 10^{10} + A$, où $A = 1271153044$.

   2.a) Calculer le reste de la division euclidienne de A par 97.

   2.b) Justifier la congruence suivante : $10^2 \equiv 3 \pmod{97}$.

   2.c) En déduire que l'on a : $10^{10} \equiv 49 \pmod{97}$.

3) 3.a) Déduire des résultats établis aux questions 1) et 2) que l'on a :

$$1ab \times 49 \equiv 73 \pmod{97}$$

   3.b) Vérifier que l'on a : $49 \times 2 \equiv 1 \pmod{97}$

   3.c) Déterminer l'année de naissance du capitaine.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas , le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 3) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

Le candidat présentera au jury :

- ◇ le contenu de ses fiches ;
- ◇ les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

4 CONCLUSION

Le travail d'un jury de concours tel que celui-ci a des répercussions importantes et durables si l'on considère qu'il s'agit de recruter les futurs enseignants de collège et de lycée. À côté d'autres voies d'accès adaptées aux personnels déjà en situation d'enseignant, mais d'importance numérique moindre, le concours externe « donne le ton »pour les jeunes étudiants en ce qui concerne les exigences attendues en matière de recrutement.

La situation actuelle permet tout à la fois de maintenir un niveau d'exigence raisonnable et de pourvoir tous les postes. En ce sens elle est tout à fait satisfaisante.

L'introduction des TICE dans un concours de cette taille se heurte à de nombreux obstacles, qui n'ont pas permis la mise en œuvre d'une épreuve sur ordinateur. Pour y suppléer en partie, l'utilisation pendant les épreuves orales de calculatrices performantes a été fortement encouragée ces dernières années. La rénovation des matériels est devenue effective et à peu près continue depuis l'introduction de prêts gracieux par les constructeurs. L'introduction de tablettes de rétroprojection a suivi. Le nombre des sujets de première épreuve pour lesquels l'utilisation d'une calculatrice est encouragé ou imposé s'est accru, et en réponse, le taux d'utilisation par les candidats augmente de manière significative. Concernant les sujets de l'épreuve sur dossier, le fait que l'utilisation des calculatrices y est rendue explicite pour une partie d'entre eux, a considérablement renforcé la place des TICE.

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour leur disponibilité et pour la motivation dont ils ont fait preuve afin de réussir une session satisfaisante à tous points de vue.

Je tiens également à remercier aussi tous nos partenaires, les éditeurs qui ont donné des manuels, les constructeurs de calculatrices qui ont prêté du matériel, les universités qui ont prêté des livres, le SIEC qui nous prête des rétroprojecteurs et qui suit de près l'organisation matérielle du concours, pour leur efficacité et leur soutien.

5 La session 2011

5.1 Programme des épreuves écrites et orales

Paru au BO spécial n° 7 du 8 juillet 2010.

ÉPREUVES ÉCRITES
Le programme est constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée (STS et CPGE) en vigueur au titre de l'année scolaire 2010–2011 et de ceux en vigueur au titre de l'année scolaire 2009–2010.

ÉPREUVES ORALES
Le programme est constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs en vigueur au titre de l'année scolaire 2010–2011 et de ceux en vigueur au titre de l'année scolaire 2009–2010.

5.2 Description des épreuves écrites et orales

Paru au JO du 6 janvier 2010.

A. — *Épreuves d'admissibilité*

1° Première composition écrite (durée : cinq heures, coefficient 3).

2° Deuxième composition écrite (durée : cinq heures, coefficient 3).

Le programme de ces épreuves est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée (STS et CPGE).

L'usage de calculatrices scientifiques est autorisé selon la réglementation en vigueur.

B. — *Épreuves d'admission*

1° Leçon portant sur les programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs :

Durée de la préparation : deux heures et demie ; durée de l'épreuve : une heure ; coefficient 3.

Le candidat choisit un thème, parmi deux qu'il tire au sort.

Dans un premier temps (quinze minutes maximum), le candidat expose un plan d'étude détaillée du sujet qu'il a choisi.

Dans un second temps (quinze minutes maximum), le candidat développe une partie de ce plan d'étude, choisie par le jury.

L'épreuve se termine par un entretien avec le jury portant sur ce développement, puis sur d'autres aspects relevant du sujet choisi par le candidat.

Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.

2° Épreuve sur dossier comportant deux parties : 14 points sont attribués à la première partie et 6 points à la seconde. (Durée de la préparation : deux heures et demie ; durée totale de l'épreuve : une heure ; coefficient 3.)

Première partie : épreuve d'exercices ; durée : quarante minutes.

L'épreuve permet au candidat de montrer :

– sa culture mathématique et professionnelle ;

– sa connaissance des contenus d'enseignement et des programmes ;

– sa réflexion sur l'histoire et les finalités des mathématiques et leurs relations avec les autres disciplines.

L'épreuve s'appuie sur un dossier fourni par le jury, portant sur un thème des programmes de mathématiques du collège, du lycée ou des sections de techniciens supérieurs. Ce thème est illustré par l'énoncé d'un exercice, pouvant être complété par des extraits de manuels, des productions d'élèves ou des passages des programmes officiels. Le dossier comprend des questions permettant d'apprécier la réflexion pédagogique du candidat. Ces questions portent sur l'énoncé de l'exercice et sa résolution ou d'autres aspects pédagogiques liés au contenu du dossier.

Pendant vingt minutes, le candidat expose ses réponses aux questions posées dans le dossier et propose, en motivant ses choix, plusieurs exercices s'inscrivant dans le thème du dossier.

Cette première partie se termine par un entretien avec le jury, portant sur l'exposé du candidat, en particulier sur les exercices qu'il a proposés, aussi bien en ce qui concerne leur résolution que les stratégies mises en oeuvre.

Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.

Le programme de cette première partie d'épreuve est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs.

Seconde partie : interrogation portant sur la compétence « Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable ». (Présentation dix minutes, entretien avec le jury : dix minutes.)

Le candidat répond pendant dix minutes à une question, à partir d'un document inclus dans le dossier qui lui a été remis au début de l'épreuve, question pour laquelle il a préparé les éléments de réponse durant le temps de préparation de l'épreuve. La question et le document portent sur les thématiques regroupées autour des connaissances, des capacités et des attitudes définies, pour la compétence désignée ci-dessus, dans le point 3 « les compétences professionnelles des maîtres » de l'annexe de l'arrêté du 19 décembre 2006.

L'exposé se poursuit par un entretien avec le jury pendant dix minutes.

5.3 Des exemples de sujets zéro

Voir le lien :
http://www.education.gouv.fr/cid49096/session-2011-exemples-de-sujets.html.

6 ANNEXES

6.1 Bibliothèque du CAPES

6.1.1 Programmes (documents disponibles dans les salles de préparation, utilisables pour les deux épreuves orales)

B.O. hors série n° 2 du 30-08-2001 : Programme de seconde générale et technologique.
B.O. hors série n° 8 du 31-08-2000 : Programme de Première ES.
B.O. hors série n° 7 du 31-08-2000 : Programme de mathématiques-informatique, Première L.
B.O. hors série n° 3 du 31-08-2001 : Programme pour l'option facultative, Première L.
B.O. hors série n° 7 du 31-08-2000 : Programme de Première S.
B.O. spécial 2 du 02-05-1991 : Programme de Première SMS, STI (sauf spécialités « Arts appliqués » et « Génie optique ») et STL.
B.O. hors série n° 8 du 02-10-1997 : Programme de Première STI spécialités « Arts appliqués » et « Génie optique ».
B.O. hors série du 24-09-1992 : Programme de Première STT (tome III, brochure 1).
B.O. hors série n° 4 du 30-08-2001 : Programme de Terminale ES.
B.O. hors série n° 3 du 30-08-2001 : Programme pour l'option facultative de Terminale L.
B.O. hors série n° 4 du 30-08-2001 : Programme de Terminale SMS, STI, STL et STT.
B.O. spécial n° 8 du 07-07-1994 : Programme de Terminale STI (sauf spécialités « Arts appliqués » et « Génie optique »).
B.O. hors série n° 8 du 02-10-1997 : Programme de Terminale STI spécialités « Art appliqués » et « Génie optique ».
B.O.E.N. spécial n° 8 du 07-07-1994 : Programme de Terminale SMS.

6.1.2 Ouvrages disponibles seulement pour l'épreuve sur dossier

Ouvrages généraux

n°	NIVEAU	TITRE	AUTEURS	ANNÉE	ÉDITEUR
1	COL	ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE	COUSIN-FAUCONNET	1995	ARMAND COLIN
2	COL	LE CALCUL LITTÉRAL		1999	IREM
3	COL	PETIT X N° 44		1996	IREM
4	COL	PETIT X N° 4		1984	IREM
5	COL	GESTION DE DONNÉES ET STAT		1997	IREM
6	COL	PETIT X N° 40		1995	IREM
7	COL	DES CHIFFRES ET DES LETTRES		1991	IREM
8	COL	AUTOUR DE THALÈS		1995	IREM
9	LYC	ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE N° 99		1995	APMEP
10	LYC	L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES	ROBERT, LATTUATI, PENNINCKX	1999	ELLIPSES
11	LYC	GÉOMÉTRIE	GAUTIER, COLOMB	1999	ELLIPSES
12	LYC	MATHS ET SCIENCES ÉCO ET SOCIALES		1996	IREM
13	LYC	POUR UNE PRISE EN COMPTE DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES EN ANALYSE		1998	IREM
14	LYC	FAIRE DES MATHS AVEC DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES	TROUCHE	1998	IREM

15	LYC	LA GÉOMÉTRIE PLANE		1989	IREM
16	LYC	MATHS ET FILIÈRE ÉCO ET SOCIALE		1996	IREM
17	LYC	AIMER FAIRE DES MATHS 3		1996	IREM
18	LYC	AIMER FAIRE DES MATHS 4		1997	IREM
19	LYC	AIMER FAIRE DES MATHS 5		1998	IREM
20	GÉN	THÉORIE ET APPLICATIONS DE LA STATISTIQUE	MURRAY R. SPIEGEL	1972	MC GRAW-HILL
21	GÉN	LE NOMBRE PI	ADCS	1992	ACDS
22	GÉN	HISTOIRE D'ALGORITHMES : DU CAILLOU À LA PUCE	CHABERT, BARBIN	1993	BELIN
23	GÉN	ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES		1989	CRDP
24	GÉN	COURS DE CALCUL DES PROBABILITÉS	CALOT	1967	DUNOD
25	GÉN	STATISTIQUE DESCRIPTIVE - TD	MONINO, KSIANSKI, LE CORNU	2000	DUNOD
26	GÉN	EXERCICES DE CALCUL DES PROBABILITÉS	CALOT	1986	DUNOD
27	GÉN	LES OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES : RÉFLEXES ET STRATÉGIES	BELHAJ SOULAMI	1999	ELLIPSES
28	GÉN	GÉOMÉTRIE	CARRAL	1995	ELLIPSES
29	GÉN	TOPOLOGIE GENERALE ET ANALYSE FONCTIONNELLE	SCHWARTZ	1970	HERMANN
30	GÉN	MÉTHODES MATHS POUR LES SCIENCES PHYSIQUES	SCHWARTZ	1965	HERMANN
31	GÉN	GROUPES ET GÉOMÉTRIES	SENECHAL	1979	HERMANN
32	GÉN	MÉTHODES MODERNES EN GÉOMÉTRIE	FRESNEL	1996	HERMANN
33	GÉN	APPROXIMATION ET OPTIMISATION	LAURENT	1972	HERMANN
34	GÉN	LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE	SORTAIS	1994	HERMANN
35	GÉN	ABRÉGÉ D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES	DIEUDONNÉ	1986	HERMANN
36	GÉN	CALCUL INFINITESIMAL	DIEUDONNÉ	1980	HERMANN
37	GÉN	GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE ET DU PLAN	SORTAIS	1988	HERMANN
38	GÉN	AUX ORIGINES DU CALCUL INFINITESIMAL	CERCLE D'HISTOIRE DES SCIENCES	1999	IREM
39	GÉN	POURQUOI PAS DES MATHÉMATIQUES		2000	IREM
40	GÉN	ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES 1		1999	IREM
41	GÉN	PROBLEME DE MISE EN ÉQUATIONS		1996	IREM
42	GÉN	DES STATISTIQUES À LA PENSÉE STATISTIQUE		2001	IREM
43	GÉN	ANGLES ROTATIONS		1993	IREM
44	GÉN	APPORTS DE L'OUTIL INFO À LA GÉOMÉTRIE		1994	IREM
45	GÉN	LE VRAI ET LE FAUX	GANDIT	2001	IREM
46	GÉN	ALGORITHMIQUE & TRADUCTION POUR CALCULATRICES	DE GRAEVE	2001	IREM
47	GÉN	RALLYE : PRÊT À AFFRONTER L'ÉPREUVE DE MATH		1998	IREM

48	GÉN	HISTOIRE DES MATHS POUR NOS CLASSES		1991	IREM
49	GÉN	INITIATION À LA CRYPTOLOGIE	COHEN, OLIVIER	2000	IREM
50	GÉN	LA JUBILATION EN MATHS	DELEDICQ	2001	IREM
51	GÉN	POURQUOI AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS		1994	IREM
52	GÉN	FRAGMENTS D'ARITHMÉTIQUE		1999	IREM
53	GÉN	UNE HISTOIRE DE CONIQUES		1996	IREM
54	GÉN	ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES 2		1999	IREM
55	GÉN	SIMILITUDES		1999	IREM
56	GÉN	INITIATION À L'ARITHMÉTIQUE		1999	IREM
57	GÉN	MATHS : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES TOME 2		1990	IREM
58	GÉN	INFO-MATHIC : ACTIVITES MATHS DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE		1998	IREM
59	GÉN	MATHS : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES		1986	IREM
60	GÉN	MATHS : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES TOME 3		2001	IREM
61	GÉN	AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS 2		1995	IREM
62	GÉN	EXERCICES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE	TRUFFAULT	1996	IREM
63	GÉN	AIRES		2000	IREM
64	GÉN	LES CONIQUES		1997	IREM
65	GÉN	COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE	TRUFFAULT, VOGEL	1995	IREM
66	GÉN	ENSEIGNER L'ARITHMÉTIQUE		2000	IREM
67	GÉN	LA RÉCURSIVITÉ EN GÉOMÉTRIE : LES FRACTALS	CUPPENS	1986	IREM
68	GÉN	MATHÉMATIQUES AU FIL DES ÂGES	GROUPE ÉPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE	1987	IREM
69	GÉN	MÉTHODES DE MATHS ET PROGRAMMATION	NIZARD	1988	LAVOISIER TEC & DOC
70	GÉN	ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES	BOURBAKI	1984	MASSON
71	GÉN	MÉTHODES NUMÉRIQUES	BAKHVALOV	1976	MIR MOSCOU
72	GÉN	RECUEIL D'EXERCICES ET DE PROBLÈMES D'ANALYSE	DEMIDOVITCH	1965	MIR MOSCOU
73	GÉN	ÉPISTÉMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES	CLERO	1990	NATHAN
74	GÉN	PROBABILITÉS ET INFÉRENCE STATISTIQUE	ABBOUD, AUDROING	1989	NATHAN
75	GÉN	DICTIONNAIRE DES MATHÉMATIQUES	BOUVIER, GEORGE, LE LIONNAIS	1996	PUF
76	GÉN	SUITES ET SÉRIES	COMBES	1982	PUF
77	GÉN	ALGÈBRE LINÉAIRE ET APPLICATIONS TOME 1	MASCART, STOKA	1984	PUF
78	GÉN	ALGÈBRE LINÉAIRE ET APPLICATIONS TOME 2	MASCART, STOKA	1985	PUF

79	GÉN	LE CALENDRIER	COUDERC	1986	QUE SAIS-JE ?
80	GÉN	LES NOMBRES ET LEURS MYSTÈRES	WARUSFEL	1961	SEUIL
81	GÉN	STATISTIQUE ET CALCUL DES PROBABILITÉS	MASIERI	1988	SIREY
82	GÉN	LE CERCLE D'EULER	COLLET, GRISO	1987	VUIBERT
83	GÉN	DICTIONNAIRE DES MATHÉMATIQUES	BOUVIER, GEORGE, LE LIONNAIS	1996	PUF
84	GÉN	ENSEIGNER LES STATS DU CM À LA SECONDE. POURQUOI ? COMMENT ?		1998	IREM

Ouvrages d'enseignement supérieur

n°	NIVEAU	TITRE	AUTEURS	ANNÉE	ÉDITEUR
1	1er CYCLE	LES MATHÉMATIQUES DE A À Z	LARROCHE, LAURENT	2002	DUNOD
2	1er CYCLE	LES SÉRIES	DELMER	1995	DUNOD
3	2e ANNÉE	BEST OF MATHÉMATIQUES : LES MEILLEURS SUJETS DE CONCOURS	BOUTILLON	2000	DUNOD
4	2e CYCLE	CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	AZE, CONSTANS, HIRIART-URRUTY	2002	DUNOD
5	2e CYCLE	THÉORIE DES GROUPES	DELCOURT	2001	DUNOD
6	2e CYCLE	INTRODUCTION À LA LOGIQUE	DAVID, NOUR, RAFFALLI	2001	DUNOD
7	2e CYCLE, AGRÉG, ÉI	ANALYSE NUMÉRIQUE	HERON, PICARD, ISSARDROCH	1999	DUNOD
8	2e CYCLE, AGRÉG, ÉI	PROCESSUS STOCHASTIQUES : PROCESSUS DE POISSON, CHAÎNES DE MARKOV ET MARTINGALES	FOATA, FUCHS	2002	DUNOD
9	2e CYCLE, ÉI	CALCUL DIFFÉRENTIEL POUR LA LICENCE	DONATO	2000	DUNOD
10	2e CYCLE, ÉI	CALCUL SCIENTIFIQUE	SAINSAULIEU	2000	DUNOD
11	2e CYCLE, ÉI	ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES	NICAISE	2000	DUNOD
12	2e CYCLE	STATISTIQUE INFERENTIELLE	FOURDRINIER	2002	DUNOD
13	2e CYCLE	ÉLÉMENTS D'INTÉGRATION ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE	EL KACIMI ALAOUI	1999	ELLIPSES
14	2e CYCLE, AGRÉG, ÉI	ANALYSE ET GÉOMÉTRIE : MÉTHODES HILBERTIENNES	ROOS	2002	DUNOD
15	AGRÉG	COURS D'ANALYSE : ANALYSE REELLE ET INTÉGRATION	DOUKHAN, SIFRE	2001	DUNOD
16	AGRÉG	COURS D'ALGÈBRE	TAUVEL	1999	DUNOD
17	AGRÉG	TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE	GONNORD, TOSEL	1996	ELLIPSES
18	AGRÉG	LEÇONS D'ALGÈBRE (PRÉPARATION À L'ORAL)	MADERE	1998	ELLIPSES

19	AGRÉG	CALCUL DIFFÉRENTIEL (THÈMES D'ANALYSE)	GONNORD, TOSEL	1998	ELLIPSES
20	AGRÉG	COURS D'ALGÈBRE	PERRIN	1996	ELLIPSES
21	AGRÉG	MODÉLISATION À L'ORAL DE L'AGRÉG : CALCUL SCIENTIFIQUE	DUMAS	1999	ELLIPSES
22	AGRÉG	THÈMES D'ANALYSE	EXBRAYAT, ALESSANDRI	1997	MASSON
23	AGRÉG	ALGÈBRE POUR L'AGRÉGATION INTERNE	TAUVEL	1996	MASSON
24	AGRÉG	ÉLÉMENTS D'ANALYSE	ZUILY, QUEFFELEC	1995	MASSON
25	ANNÉES 1&2	MATHEMATICA	COOMBES ET AL.	2000	DUNOD
26	ANNÉES 1&2	SYSTÈME D – ANALYSE	SOROSINA	1999	DUNOD
27	CAPES	ÉPREUVE ORALE D'EXPOSÉ : 33 LEÇONS POUR SE PRÉPARER EFFICACEMENT	BAJOU, SAINT-LANNES, SORBE	2003	DUNOD
28	CAPES	GÉOMÉTRIE AFFINE ET EUCLIDIENNE	DELODE	2000	DUNOD
29	CAPES	ANALYSE ET PROBAS : ÉCRITS 1996–97 (avec rappels de cours)	CHRISTOL, DECOMPS-GUILLOUX, PIQUET	1999	DUNOD
30	CAPES	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE : ÉCRITS 1996–99 (avec rappels de cours)	BORIES-LONGUET, JARRAUD	1999	DUNOD
31	CAPES	NOS 20 SUJETS PRÉFÉRÉS	BORIS-LONGUET, DECOMPS-GUILLOUX, JARRAUD, MELEARD, PIQUET	2000	DUNOD
32	CAPES	L'ÉPREUVE SUR DOSSIER À L'ORAL : GÉOMÉTRIE	ROBERT	1995	ELLIPSES
33	CAPES	L'ÉPREUVE SUR DOSSIER À L'ORAL : ANALYSE	LAMBRE	1998	ELLIPSES
34	CAPES	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE : ÉCRITS 1991–96 (avec rappels de cours)	BORIES-LONGUET, JARRAUD, LEVY-BRUHL	1997	MASSON
35	CAPES	ANALYSE ET PROBAS : ÉCRITS 199196 (avec rappels de cours)	MELEARD, PIQUET, DECOMPS-GUILLOUX	1997	MASSON
36	CAPES	ANALYSE (avec rappels de cours)	LEVYBRUHL, PIQUET, SERVIEN, VAUTHIER	1987	MASSON
37	CAPES	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE	LEVYBRUHL, PIQUET, SERVIEN, VAUTHIER	1987	MASSON
38	CAPES	34 PROBLÈMES CORRIGÉS POSES À L'ÉCRIT DU CAPES	CHEVALLET	1999	VUIBERT SUP
39	CAPES & AGRÉG	STRUCTURES ALGÉBRIQUES EN GÉOMÉTRIE	AIME	1999	ELLIPSES
40	CAPES & AGRÉG	GÉOMÉTRIE : COURS ET EXERCICES CORRIGÉS	BIGARD	1998	MASSON

41	CAPES & AGRÉG	ALGÈBRE LINÉAIRE (COURS ET EXERCICES)	ROUDIER	2003	VUIBERT
42	CAPES & AGRÉG INTERNE	COMPLEMENTS D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE	DE BIASI	2000	ELLIPSES
43	CAPES & AGRÉG INTERNE	MATHÉMATIQUES POUR LE CAPES ET L'AGRÉG INTERNE	DE BIASI	1998	ELLIPSES
44	CAPES & AGRÉG INTERNE	MATHÉMATIQUES POUR LE CAPES ET L'AGRÉG INTERNE	DE BIASI	1995	ELLIPSES
45	CNAM	INITIATION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE	THEODOR	1989	MASSON
46	CYCLES 1&2, ÉI	TOUTES LES MATHÉMATIQUES	STÖCKER	2002	DUNOD
47	DEUG	MATHÉMATIQUES	DELMER	1996	DUNOD
48	DEUG	FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES ET INTÉGRATION	DELMER	1997	DUNOD
49	DEUG 1	EXERCICES D'ANALYSE : CALCUL INTÉGRAL	BOSCHET	1997	MASSON
50	DEUG A1	ENSEIGNER AUTREMENT LES MATHÉMATIQUES		1990	IREM
51	DEUG MIAS MASS	ALGÈBRE GENERALE, TD	DENMAT, HEAULME	2000	DUNOD
52	DEUG MIAS MASS	BEST OF ANALYSE 1re ANNÉE	PARZYSZ	2001	DUNOD
53	DEUG MIAS MASS SM	ALGÈBRE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	1997	DUNOD
54	DEUG MIAS MASS SM	ANALYSE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	1997	DUNOD
55	DEUG MIAS MASS SM	ANALYSE 2e ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	1998	DUNOD
56	DEUG MIAS MASS SM	ANALYSE 2e ANNÉE	PROCHASSON	2000	DUNOD
57	DEUG MIAS MASS SM	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE 2e ANNÉE	PROCHASSON	2001	DUNOD
58	DEUG SVT	ANALYSE	BLONDEL	2000	DUNOD
59	DEUG 1	EXERCICES D'ANALYSE : 176 EXERCICES ET 105 TESTS CORRIGÉS (avec rappels de cours)	SCHMITT	1997	MASSON
60	DEUG 1	FONCTIONS D'UNE VARIABLE	CALVO	1997	MASSON
61	DEUG 1 SM	COURS DE MATHÉMATIQUES	DIXMIER	1976	GAUTHIER-VILLARS
62	DEUG 2 SM	COURS DE MATHÉMATIQUES	DIXMIER	1977	GAUTHIER-VILLARS
63	LICENCE	ALGÈBRE 3e ANNÉE	SCHWARTZ	2003	DUNOD
64	LICENCE	TOPOLOGIE ET ANALYSE	SKANDALIS	2001	DUNOD
65	LICENCE 1 MIAS MASS SM	ALGÈBRE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	2003	DUNOD
66	LICENCE 1 MIAS MASS SM	ANALYSE 1re ANNÉE	LIRET, MARTINAIS	2003	DUNOD

67	LICENCE 3, MASTER1, ÉI	INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE : APPLICATIONS SOUS MATLAB	BASTIEN, MARTIN	2003	DUNOD
68	LICENCE 1 MIAS MASS SM	LES MATHÉMATIQUES EN LICENCE TOME 1	AZOULAY, AVIGNANT, AULIAC	2003	EDISCIENCE
69	MAÎTRISE	INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE ET À L'OPTIMISATION	CIARLET	1988	MASSON
70	MAÎTRISE	INTRODUCTON À L'ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES	RAVIART, THOMAS	1988	MASSON
71	MASTER, ÉI	SIMULATION NUMÉRIQUE EN C++	DANAILA, HECHT, PIRONNEAU	2003	DUNOD
72	MASTER 1&2, AGRÉG	INTRODUCTION À LA THÉORIE SPECTRALE	LEVY-BRUHL	2003	DUNOD
73	MP	L'ORAL (ENTRAÎNEMENT AUX CONCOURS)	MONIER	2002	DUNOD
74	PRÉPA 1	ANALYSE 1 – COURS TOME 1	MONIER	1997	DUNOD
75	PRÉPA 1	ANALYSE 2 – COURS TOME 2	MONIER	1996	DUNOD
76	PRÉPA 1	ALGÈBRE 1	MONIER	2000	DUNOD
77	PRÉPA 1&2	GÉOMÉTRIE	MONIER	2000	DUNOD
78	PRÉPA 2	ALGÈBRE 2 – COURS TOME 6	MONIER	1998	DUNOD
79	PRÉPA 2	ANALYSE – TOME 3	MONIER	1997	DUNOD
80	PRÉPA 2	ANALYSE 4 – TOME 4	MONIER	1997	DUNOD
81	PRÉPA 1	ALGÈBRE 1 – COURS TOME 5	MONIER	1996	DUNOD
82	PRÉPA 1&2	GÉOMÉTRIE – TOME7	MONIER	1997	DUNOD
83	PRÉPA 2	MATHÉMATIQUES 2e ANNÉE	DESCHAMPS, WARUSFEL	2001	DUNOD
84	PRÉPA 2	ANALYSE 3 – COURS TOME 3	MONIER	1997	DUNOD
85	STS-IUT	SÉRIES DE FOURIER, TRANSFORMATION DE LAPLACE	BENICHOU, BOY, POUGET	1995	ELLIPSES
86		ANALYSE	BLONDEL	2000	DUNOD
87		LE NOMBRE D'OR ET LES NOMBRES DE FIBONACCI	MEYER STEYAERT	1981	IREM
88		PROBAS ET STATS		1996	IREM
89		L'ENSEIGNEMENT DES STATS ET PROBAS		1999	IREM
90		RMS		1998/1999	VUIBERT

Manuels scolaires

n°	NIV	SÉRIE	TITRE	REM	AUTEURS	AN	ÉDITEUR
1	6e		DÉCIMALE			1996	BELIN
2	6e		MATH ET CLIC			2000	BORDAS
3	6e		NUL EN MATHS ?			1997	BORDAS
4	6e		MATHS			1996	BORDAS
5	6e		MATH ET CLIC	PROF		2000	BORDAS
6	6e		DIMATHÈME			2000	DIDIER
7	6e		100 PROBLÈMES SANS PEINE			1998	HACHETTE
8	6e		CINQ SUR CINQ			1994	HACHETTE
9	6e		ALPHA			1994	HATIER
10	6e		TRIANGLE			1996 2000	HATIER
11	6e		DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT			1996	M.E.N.
12	6e		TRANSMATH			1996	NATHAN

13	5^e		DÉCIMALE			1997	BELIN
14	5^e		MATHS JAUNE			1997	BORDAS
15	5^e		MATHÉMATIQUES		SERRA	2001	BORDAS
16	5^e		MATHÉMATIQUES	PROF	CORRIEU BATIER		DELAGRAVE
17	5^e		DIMATHÈME			1997	DIDIER
18	5^e		DIMATHÈME			2001	DIDIER
19	5^e		CINQ SUR CINQ			1997 2000	HACHETTE
20	5^e		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF		1997	HATIER
21	5^e		TRIANGLE	PROF		1997	HATIER
22	5^e		TRANSMATH			1997	NATHAN
23	5^e		TRANSMATH	PROF		2001	NATHAN
24	4^e		DÉCIMALE			1998	BELIN
25	4^e		MATHÉMATIQUES			1998	BORDAS
26	4^e		MÉDIAMATH			2002	BORDAS
27	4^e		MÉTHODES EN PRATIQUE			1988	CRDP
28	4^e		DIMATHÈME			1998	DIDIER
29	4^e		DIMATHÈME			2002	DIDIER
30	4^e		TOUT SIMPLEMENT			1998	HACHETTE
31	4^e		CINQ SUR CINQ			2002	HACHETTE
32	4^e		CINQ SUR CINQ			1998	HACHETTE
33	4^e		DIABOLO			2003	HACHETTE
34	4^e		TRIANGLE			1998	HATIER
35	4^e		NOUVEAU PYTHAGORE			1998	HATIER
36	4^e		TOUT LE PROGRAMME EN 300 EXERCICES			1997	HATIER
37	4^e		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1988	INTER IREM
38	4^e		NOUVEAU TRANSMATH	PROF		1998	NATHAN
39	4^e		TRANSMATH	PROF		2002	NATHAN
40	4^e		TRANSMATH			1988	NATHAN
41	3^e		COMPRENDRE ET RÉUSSIR			1997	BELIN
42	3^e		MÉTHODES EN PRATIQUE			1989	CRDP
43	3^e		DIMATHÈME			1999	DIDIER
44	3^e		CINQ SUR CINQ	PROF		2003	HACHETTE
45	3^e		CINQ SUR CINQ			1999	HACHETTE
46	3^e		TOUT SIMPLEMENT			1999	HACHETTE
47	3^e		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF		1999	HATIER
48	3^e		TRIANGLE			1999	HATIER
49	3^e		TRIANGLE	PROF		2003	HATIER
50	3^e		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1989	INTER IREM
51	3^e		MATHÉMATIQUES			1999	BORDAS
52	3^e		DIABOLO			2004	HACHETTE
53	2^{de}		MATHÉMATIQUES			1998	BELIN
54	2^{de}		INDICE			2000	BORDAS
55	2^{de}		MATHÉMATIQUES	PROF		2000	BREAL
56	2^{de}		MATHÉMATIQUES			2000	BREAL
57	2^{de}		MODULOMATH			2004	DIDIER
58	2^{de}		DIMATHÈME			2000	DIDIER
59	2^{de}		REPÈRES			2004	HACHETTE
60	2^{de}		PYRAMIDE			2000	HACHETTE
61	2^{de}		DÉCLIC			1998	HACHETTE
62	2^{de}		SIGMATH			1998	HATIER
63	2^{de}		ÉNONCÉS ET SCÉNARIOS			1993	INTER IREM
64	2^{de}		LIAISON COLLÈGE SECONDE			1990	INTER IREM
65	2^{de}		HYPERBOLE			2000	NATHAN

66	2^{de}		TRANSMATH				2000	NATHAN
67	2^{de}		PHYSIQUE	PHYSIQUE	DURRAN-DEAU		2000	HACHETTE
68	1^{re}	ES	FRACTALE	OBLIG			1998	BORDAS
69	1^{re}	ES	FRACTALE	OPT			1998	BORDAS
70	1^{re}	ES	MATHÉMATIQUES				2001	BREAL
71	1^{re}	ES	DIMATHÈME	OBLIG			2001	DIDIER
72	1^{re}	ES	DIMATHÈME	OPT			2001	DIDIER
73	1^{re}	ES	DÉCLIC				2001	HACHETTE
74	1^{re}	ES	TRANSMATH				1998	NATHAN
75	1^{re}	ES	TRANSMATH				2001	NATHAN
76	1^{re}	ES	HYPERBOLE				2001	NATHAN
77	1^{re}	L	INDICE				2001	BORDAS
78	1^{re}	L	MATH INFO				2001	DELAGRAVE
79	1^{re}	L	MANUEL DE MATHÉMATIQUES				2002	ELLIPSES
80	1^{re}	L	FICHES TD TP				2002	ELLIPSES
81	1^{re}	L	MATH INFO				2003	HACHETTE
82	1^{re}	L	DÉCLIC				1999	HACHETTE
83	1^{re}	L	DÉCLIC				2001	HACHETTE
84	1^{re}	L	MATH INFO				2001	HATIER
85	1^{re}	L	TRANSMATH				2001	NATHAN
86	1^{re}	S	MATHÉMATIQUES				2001	BELIN
87	1^{re}	S	INDICE				2001	BORDAS
88	1^{re}	S	FRACTALE				2001	BORDAS
89	1^{re}	S	MATHÉMATIQUES				2001	BREAL
90	1^{re}	S	DIMATHÈME	GÉOMÉ-TRIE			2001	DIDIER
91	1^{re}	S	DIMATHÈME	ANALYSE			2001	DIDIER
92	1^{re}	S	GÉOMÉTRIE		TERRACHER		2001	HACHETTE
93	1^{re}	S	DÉCLIC				2001	HACHETTE
94	1^{re}	S	ANALYSE		TERRACHER		2001	HACHETTE
95	1^{re}	S	TRANSMATH				2001	NATHAN
96	1^{re}	S	HYPERBOLE				2001	NATHAN
97	1^{re}	SMS	DIMATHÈME				1998	DIDIER
98	1^{re}	STI	DIMATHÈME				1998	DIDIER
99	1^{re}	STT	INDICE				2003	BORDAS
100	1^{re}	STT	SIGMATH				2001	FOUCHER
101	1^{re}	STT	MATHÉMATIQUES				2002	HACHETTE
102	T^{le}	ÉS	FRACTALE	SP			1998	BORDAS
103	T^{le}	ÉS	FRACTALE	OBL			1998	BORDAS
104	T^{le}	ÉS	MATHÉMATIQUES				2002	BREAL
105	T^{le}	ÉS	MATHÉMATIQUES				1998	BREAL
106	T^{le}	ÉS	DIMATHÈME	SP			1998	DIDIER
107	T^{le}	ÉS	DIMATHÈME	OBL			1998	DIDIER
108	T^{le}	ÉS	DÉCLIC				1998	HACHETTE
109	T^{le}	ÉS	DÉCLIC				2002	HACHETTE
110	T^{le}	ÉS	LE GUIDE ABC BAC				2002	NATHAN
111	T^{le}	ÉS	TRANSMATH				2002	NATHAN
112	T^{le}	ÉS	HYPERBOLE				2002	NATHAN
113	T^{le}	L	DÉCLIC				1999	HACHETTE
114	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES				1998	BELIN
115	T^{le}	S	FRACTALE	OBL			1998	BORDAS
116	T^{le}	S	FRACTALE	SP			1998	BORDAS
117	T^{le}	S	FRACTALE	SP			2002	BORDAS
118	T^{le}	S	FRACTALE	OBL			2002	BORDAS
119	T^{le}	S	INDICE	SP			2002	BORDAS
120	T^{le}	S	INDICE	OBL			2002	BORDAS
121	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	SP			2002	BREAL
122	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	OBL			2002	BREAL
123	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	SP			1998	BREAL

124	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	OBL		1998	BREAL
125	T^{le}	S	DIMATHÈME	SP		1998	DIDIER
126	T^{le}	S	DIMATHÈME	OBL		1998	DIDIER
127	T^{le}	S	BAC AVEC MENTION			1998	ELLIPSES
128	T^{le}	S	EXERCICES			1999	ELLIPSES
129	T^{le}	S	FOR MATH			1999	ELLIPSES
130	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	SP	TERRACHER	1998	HACHETTE
131	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES	OBL	TERRACHER	1998	HACHETTE
132	T^{le}	S	DÉCLIC	SP		1998	HACHETTE
133	T^{le}	S	DÉCLIC	OBL		1998	HACHETTE
134	T^{le}	S	CORRIGÉS		TERRACHER	1998	HACHETTE
135	T^{le}	S	CORRIGÉS		TERRACHER	1996	HACHETTE
136	T^{le}	S	MATHÉMATIQUES		TERRACHER	2002	HACHETTE
137	T^{le}	S	DÉCLIC			2002	HACHETTE
138	T^{le}	S	TRANSMATH	OBL		2002	NATHAN
139	T^{le}	S	TRANSMATH	SP		1998	NATHAN
140	T^{le}	S	TRANSMATH	OBL		1998	NATHAN
141	T^{le}	S	HYPERBOLE	OBL		2002	NATHAN
142	T^{le}	S	HYPERBOLE	SP		2002	NATHAN
143	T^{le}	STI	DIMATHÈME			1997	DIDIER
144	T^{le}	STI	MATHÉMATIQUES			1998	HACHETTE
145	T^{le}	STI	MATHÉMATIQUES			1998	NATHAN
146	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1999	DIDIER
147	T^{le}	STT	DIMATHÈME			1999	DIDIER
148	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1997	FOUCHER
149	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			1997	FOUCHER
150	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			2002	HACHETTE
151	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	HACHETTE
152	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1998	HACHETTE
153	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			2002	HACHETTE
154	T^{le}	STT	COMPTABILITÉ GESTION			1998	NATHAN
155	T^{le}	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	NATHAN
156	T^{le}		ENSEIGNER LES PROBAS			1994	IREM
157	BÉP	INDUS-TRIEL	MATHÉMATIQUES 2		BARUSSAUD, FAVRE ARTIGUES, THEVENON	1994	FOUCHER
158	BÉP	INDUS-TRIEL	MATHÉMATIQUES	INDUS-TRIEL, SANI-TAIRE ET SOCIAL	ASTIER, VRIGNAUD	2002	NATHAN
159	BÉP	TER-TIAIRE	LES CAHIERS DE MATHÉMATIQUES		BARUSSAUD, NOËL	2001	FOUCHER
160	BÉP	TER-TIAIRE	MATHÉMATIQUES	TER-TIAIRE, HÔTEL-LERIE, RESTAU-RATION	ASTIER, VRIGNAUD	2002	NATHAN
161	BTS	INDUS-TRIEL	ANALYSE, ALGÈBRE LINÉAIRE, NOMBRES COMPLEXES	BÂTIMENT & LABO	VERLANT	1997	FOUCHER
162	BTS	INDUS-TRIEL					FOUCHER
163	BTS	TER-TIAIRE	ANALYSE ET ALGÈBRE LINÉAIRE TOME 1	INFOR-MA-TIQUE ET GESTION	VERLANT	1997	FOUCHER
164	BTS	TER-TIAIRE					HACHETTE

165	BTS		PROBAS ET STATS, STATS INFÉRENTIELLES			1996	IREM
166	BTS IUT		PROBAS ET STATS		GACÔGNE, FRUGIER	1990	EYROLLES

Annales

n°	NIVEAU	SÉRIE	TITRE	REM	ANNÉE	ÉDITEUR
1	BAC	ÉS	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
2	BAC	ÉS	ANNALES	SUJETS	1998	HATIER
3	BAC	ÉS	ANNALES	SUJETS	1995	VUIBERT
4	BAC	ÉS L	ANNALES	SUJETS	1997	NATHAN
5	BAC	ÉS L	ANNALES	CORRIGÉS	1997	NATHAN
6	BAC	ÉS L	ANNALES	CORRIGÉS	1998	VUIBERT
7	BAC	ÉS L	ANNALES	SUJETS	1998	VUIBERT
8	BAC	L	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
9	BAC	L	ANNALES	SUJETS	1998	HATIER
10	BAC	L	ANNALES	SUJETS	2000	HATIER
11	BAC	L	ANNALES	SUJETS	2001	HATIER
12	BAC	L	ANNALES	SUJETS	1996	VUIBERT
13	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
14	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
15	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1998	HATIER
16	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1997	NATHAN
17	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	NATHAN
18	BAC	S	ANNALES	CORRIGÉS	1998	VUIBERT
19	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1998	VUIBERT
20	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1996	VUIBERT
21	BAC	S	ANNALES	SUJETS	1995	VUIBERT
22	BAC	STT STI	ANNALES	SUJETS	1995	NATHAN
23	BAC	STT STI	ANNALES	CORRIGÉS	1996	NATHAN
24	BAC	STT STI	ANNALES	CORRIGÉS	1998	NATHAN
25	BAC	STT STI	ANNALES	SUJETS	1998	NATHAN
26	BREVET		ANNALES	CORRIGÉS	1998	HATIER
27	BREVET		ANNALES	CORRIGÉS	1997	NATHAN
28	BREVET		ANNALES	SUJETS	1997	NATHAN
29	BREVET		ANNALES	SUJETS	1998	NATHAN
30	BREVET		ANNALES	CORRIGÉS	1994	VUIBERT
31	BREVET		ANNALES	SUJETS	1994	VUIBERT
32	BREVET		ANNALES	SUJETS	1995	VUIBERT
33	BREVET		ANNALES	SUJETS	1996	VUIBERT
34	BREVET		ANNALES	SUJETS	1998	VUIBERT

Le jury remercie tous les éditeurs qui ont contribué à l'actualisation de la bibliothèque en facilitant l'acquisition de leurs ouvrages récents.

6.2 Calculatrices

Depuis la session 1994, les calculatrices personnelles sont interdites pour les deux épreuves orales (cf. B.O. n° 13 du 15-04-93). Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du CAPES.

Pour la session 2010 trois constructeurs ont permis par des prêts gracieux de proposer une quantité suffisante de modèles récents de calculatrices rétroprojetables.

Casio Classpad 300
Hewlett-Packard 49g (à ne pas confondre avec le modèle 49g+)
Texas Instruments Voyage 200
Texas Instruments Nspire CAS (à ne pas confondre avec le modèle Nspire).

Le jury, dans le souci d'aider candidats et formateurs à se préparer de manière efficace aux épreuves, a mis en ligne sur son site des documents sur ces calculatrices que tout visiteur du site peut librement utiliser. Ces documents, assortis d'une introduction, montrent dans quel esprit le jury souhaite voir utiliser ces machines. Des exemplaires imprimés de ces textes étaient mis à la disposition des candidats pendant leur préparation, de sorte qu'il leur était inutile de s'en munir.

FIN DU RAPPORT