ministère Éducation nationale

EBE MAT 2
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2009

CONCOURS EXTERNE DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS CERTIFIÉS ET CONCOURS D'ACCÈS À LA LISTE D'APTITUDE

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Notations et présentation du sujet

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul. Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a < b$ on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X) \in K[X]$ on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$. On note $P'(X)$ le polynôme dérivé de $P(X)$.

Enfin, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O.

Ce sujet traite de quelques aspects géométriques liés aux racines de polynômes. Il se compose de quatre parties. Les parties A et B sont destinées à donner des majorations des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Dans les parties suivantes, on s'intéresse à localiser les racines du polynôme dérivé par rapport aux racines du polynôme. Dans la partie C on établit à ce sujet un théorème de Lucas et dans la partie D on démontre un raffinement de ce théorème pour des polynômes de degré 3.

Partie A : une majoration des modules des racines d'un polynôme

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On se propose de montrer que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|\}$$

1) **Exemple numérique**

On considère les nombres complexes $a_0 = 6 - 2i, a_1 = -3 - 5i, a_2 = -2 + 3i$, et on définit le polynôme $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ par :

$$p(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

1.1) Montrer que $p(X)$ possède une racine réelle.

1.2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$

1.3) Vérifier que les racines de $p(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\}$.

2) **Étude du cas général**

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. On pose, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{et} \qquad D_i = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant r_i\}$$

2.1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On pose $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ où $v_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2.1.a) Montrer que pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$|\lambda v_i| \leqslant r_i \max_{k \in [\![1,n]\!]} (|v_k|)$$

2.1.b) En déduire que : $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

2.2) Au polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, est associée la matrice carrée d'ordre n notée M_P, appelée matrice compagnon de P, et définie par :

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

c'est à dire la matrice $M_P = (m_{ij})$ avec :

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 \quad \text{si } i - j = 1 \\ m_{in} = -a_{i-1} \\ m_{ij} = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

2.2.a) Montrer que pour tout nombre complexe z on a :

$$\det\big(M_P - zI_n\big) = (-1)^n P(z)$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.

2.2.b) En déduire que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|\}$$

PARTIE B : La borne de Cauchy

Dans cette partie on se propose de donner un autre encadrement des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

1) **Un résultat préliminaire**

Soient $(c_i)_{i \in [\![0, n-1]\!]}$ des réels positifs non tous nuls. On considère le polynôme $H(X)$ défini par :

$$H(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

et on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction h par :

$$h(x) = -\frac{H(x)}{x^n}$$

1.1) Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

1.2) En déduire que le polynôme $H(X)$ admet une unique racine réelle strictement positive qu'on note α et montrer que cette racine est une racine simple.

1.3) Soit ζ une racine complexe de $H(X)$. On suppose que $|\zeta| > \alpha$, montrer alors que :

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$$

1.4) En déduire que toutes les racines de $H(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon α.

2) **Une application**

On considère un entier $m \geqslant 2$ et un polynôme $F(X) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ de degré $m-1$ tel que a_i soit un réel strictement positif pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$. On pose $\gamma = \max_{i \in [\![1,m-1]\!]} \left\{ \frac{a_{i-1}}{a_i} \right\}$ et on considère une racine complexe ζ du polynôme $F(X)$.

2.1) En considérant le polynôme $F_\gamma(X) = (X - \gamma)F(X)$, montrer que

$$|\zeta| \leqslant \gamma$$

2.2) On pose $\gamma' = \min_{i \in [\![1,m-1]\!]} \left\{ \frac{a_{i-1}}{a_i} \right\}$. Montrer que :

$$\gamma' \leqslant |\zeta|$$

3) **La borne de Cauchy**

Soit $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ soient non tous nuls.

3.1) Montrer que l'équation d'inconnue x

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$$

possède une unique solution réelle strictement positive.

Cette racine est appelée **borne de Cauchy** de $f(X)$ et sera notée dans la suite $\rho(f)$.

3.2) Montrer que pour toute racine complexe ζ de $f(X)$ on a :

$$|\zeta| \leqslant \rho(f)$$

3.3) Soit $(\zeta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de $f(X)$ avec

$$0 \leqslant |\zeta_1| \leqslant |\zeta_2| \leqslant \cdots \leqslant |\zeta_n| \leqslant \rho(f)$$

3.3.a) Montrer que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leqslant \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binômial : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3.3.b) En déduire que :

$$\rho(f)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}$$

3.3.c) En déduire que :

$$\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\rho(f) \leqslant |\zeta_n|$$

3.3.d) On suppose que 0 n'est pas racine de $f(X)$ et on pose $g(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$. On note $\rho(g)$ la borne de Cauchy de $g(X)$. Montrer que :

$$\frac{1}{\rho(g)} \leqslant |\zeta_1| \leqslant \frac{1}{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\rho(g)}$$

3.4) En reprenant le polynôme $p(X)$ de la question 1) de la partie A, déterminer à la calculatrice une valeur approchée de la borne de Cauchy de $p(X)$ et vérifier pour ce polynôme les résultats obtenus aux questions 3.2), et 3.3.c).

4) **Un raffinement de la borne de Cauchy**

On considère toujours $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ soient non tous nuls.

On pose

$$f_1(X) = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$$

On se propose de montrer que les racines de $f(X)$ appartiennent à $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ où $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont les disques définis par :

$$\mathcal{D}_0 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant \rho(f_1)\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_1 = \left\{z \in \mathbb{C},\ \left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leqslant \rho(f_1)\right\}$$

et où $\rho(f_1)$ désigne la borne de Cauchy de $f_1(X)$.

4.1) Montrer que $\rho(f_1) \leqslant \rho(f)$.

4.2) Soit ζ une racine de f n'appartenant pas à $\mathcal{D}_0$. Montrer que :

$$|a_{n-1} + a_n\zeta| \leqslant \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\rho(f_1)^k = |a_n|\rho(f_1)$$

4.3) Conclure.

PARTIE C : un théorème de Lucas

On dit qu'une partie Γ du plan $\mathcal{P}$ est convexe si pour tout couple (A, B) de points de Γ, le segment $[AB]$ est contenu dans Γ : c'est à dire, en notant a et b les affixes respectives des points A et B, si pour tout $\lambda \in [0,1]$, le point M_λ d'affixe $\lambda a + (1-\lambda)b$ appartient à Γ. (*En particulier, l'ensemble vide est convexe*).

1) **Préliminaires**

1.1) Soit P une partie de $\mathcal{P}$ et E l'ensemble des parties de $\mathcal{P}$ qui sont convexes et qui contiennent P. On pose

$$\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$$

Montrer que $\mathcal{E}(P)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant P. Cette partie $\mathcal{E}(P)$ est appelée **l'enveloppe convexe** de P.

1.2) Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}$ et notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres de familles finies de points de P affectés de coefficients positifs. Montrer que $\mathcal{E}(P) = \mathcal{B}$.

2) Soit $f(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et soit $f'(X)$ son polynôme dérivé. Soit $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ l'ensemble des racines de $f(X)$ et soit α_j l'ordre de multiplicité de la racine r_j pour tout $j \in [\![1, m]\!]$.

2.1) Montrer que pour tout nombre complexe z n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$, on a :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{z - r_j}$$

2.2) Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de $f'(X)$ n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0$$

et déduire que le point d'affixe r est barycentre des points M_1, M_2,$\cdots$,M_m d'affixes respectives r_1, r_2,$\cdots$, r_m.

2.3) Montrer alors que l'ensemble des points dont les affixes sont les racines de $f'(X)$ est inclus dans l'enveloppe convexe des points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$. (*Théorème de Lucas*)

2.4) Illustrer ce résultat pour le polynôme $p(X)$ défini dans la question 1) de la partie A.

PARTIE D : théorème de Lucas et polynômes de degré 3

On se propose dans cette partie de démontrer un raffinement du théorème de Lucas pour des polynômes de degré 3. Plus précisément, on se propose de montrer le résultat suivant :

Soit $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3. On note M_1, M_2 et M_3 les points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$ et on suppose que M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés. Alors les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ sont les affixes :

- ◇ *des foyers de l'ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leurs milieux si $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral*
- ◇ *du centre du cercle inscrit dans le triangle $M_1M_2M_3$ s'il équilatéral.*

1) **Étude du cas où $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral**

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \in \mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés.

1.1) Montrer que $f'(X)$ possède une racine double ω si et seulement si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral et son centre de gravité a pour affixe ω.

1.2) Conclure.

2) **Une propriété de la tangente à l'ellipse**

Soit a un réel strictement positif et soient F et F' deux points distincts du plan tels que $FF' < 2a$. On appelle ellipse de foyers F et F' et de demi-axe focal a l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 2a$$

Soit $t \mapsto M(t)$ une paramétrisation de classe C^1 de l'ellipse. Pour tout point $M(t) \in (\mathcal{E})$, on note $\vec{\tau}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F}\right)$ un vecteur directeur de la tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ et on pose

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{M(t)F}\,\overrightarrow{M(t)F} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(t) = \frac{1}{M(t)F'}\,\overrightarrow{M(t)F'}$$

2.1) Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F'}\right)$$

2.2) Montrer que le produit scalaire $\Big(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)\Big).\vec{\tau}(t)$ est nul.

2.3) En déduire que la tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ est une bissectrice du couple de droites $((M(t)F), (M(t)F'))$.

3) **Un théorème de Poncelet**

Soit P un point strictement « extérieur » à l'ellipse $(\mathcal{E})$ (c'est à dire un point P tel que $PF + PF' > 2a$) : on admet qu'il existe toujours deux tangentes issues de P à $(\mathcal{E})$ et on note T_1 et T_2 les points de tangences.

3.1) Soit F_1 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_1). Montrer que $F'F_1 = 2a$.

3.2) On note de même F_2 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_2). Montrer que (PF') est la médiatrice de $[F_1F_2]$.

3.3) On se propose de montrer que les angles de droites $((PT_1), (PF))$ et $((PF'), (PT_2))$ sont égaux. Pour toute droite D du plan, on note $\mathcal{S}_D$ la réflexion d'axe D.

3.3.a) Déterminer $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}(F_1)$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de la composée $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}$.

3.3.b) Déterminer de la même façon la nature et les éléments caractéristiques de la composée $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$ et conclure.

4) **Étude du cas où $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral**

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \in \mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés et que le triangle $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral.

On note w et w' (avec $w \neq w'$) les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ et F et F' les points d'affixes respectives w et w'.

4.1) Justifier qu'il existe une ellipse $(\mathcal{E})$ de foyers F et F' et passant par le milieu de $[M_1M_2]$.

4.2)

4.2.a) Montrer que dans $\mathbb{C}[X]$ on a l'égalité :

$$3(X-w)(X-w') = (X-r_1)(X-r_2) + (X-r_2)(X-r_3) + (X-r_3)(X-r_1)$$

4.2.b) En déduire que :

$$12\,\frac{w - \dfrac{r_1+r_2}{2}}{r_1 - r_2} = \frac{r_2 - r_1}{w' - \dfrac{r_1+r_2}{2}}$$

puis que la droite (M_1M_2) est tangente à $(\mathcal{E})$.

4.3)

4.3.a) Montrer que :

$$\frac{r_2 - r_1}{w - r_1} = 3\frac{w' - r_1}{r_3 - r_1}$$

4.3.b) En déduire que (M_1M_3) est la deuxième tangente à $(\mathcal{E})$ issue de M_1.

4.4) Conclure.

FIN