MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Concours du second degré

Rapport de jury

Concours : CAPES externe

Section : Mathématiques

Session 2014 exceptionnelle

Rapport de jury présenté par : Xavier SORBE, président du jury

Conseil aux futurs candidats

Il est recommandé aux candidats de s'informer sur les modalités du concours.

Les renseignements généraux (conditions d'accès, épreuves, carrière, etc.) sont donnés sur le site du ministère de l'éducation nationale (système d'information et d'aide aux concours du second degré) :

http://www.education.gouv.fr/pid63/siac2.html

Le jury du CAPES externe de Mathématiques met à disposition des candidats et des formateurs un site spécifique :

http://capes-math.org

Les épreuves écrites de la session exceptionnelle se sont tenues les 19 et 20 juin 2013.

Les épreuves orales se sont déroulées du 12 au 27 avril 2014,
dans les locaux du lycée Jean Lurçat, Paris 13^{e}.
Le jury tient à remercier chaleureusement Madame le Proviseur
et l'ensemble des personnels du lycée pour la qualité de leur accueil.

Table des matières

1. PRÉSENTATION DU CONCOURS

1.1 Composition du jury

ADAM Emmanuelle	professeur agrégé
ALARIC Bernard	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
ALDEBERT Didier	professeur agrégé
ALLARD Anne	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
ALT Christine	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
ANGELI Yann	professeur agrégé
ARMAND Véronique	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
ASSET Laurent	professeur agrégé
BAILLOEUIL Mélissa	professeur agrégé
BAJI Bruno	professeur agrégé
BARNET Christophe	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BAUDU Jean-Charles	professeur agrégé
BECHATA Abdellah	professeur de chaires supérieures
BELAUD Yves	maître de conférences
BENZIDIA Abdelaziz	professeur agrégé
BERNE Corinne	professeur agrégé
BESBES Mourad	maître de conférences
BESSIÈRE Arnaud	professeur agrégé
BILLAULT Eric	professeur de chaires supérieures
BILLET Emmanuel	professeur agrégé
BILLOT Ludovic	professeur agrégé
BLANCHARD Emmanuel	professeur agrégé
BLOND Elisabeth	professeur agrégé
BLOTTIÈRE David	professeur agrégé
BLUTEAU-DAVY Véronique	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BODY Bernard	professeur agrégé
BOILLAUD Romain	professeur agrégé
BONTEMPELLI Alain	professeur agrégé
BOUCHEL Olivier	professeur agrégé
BOUDARN Dalia	professeur agrégé
BOUQUET Marie-Odile	professeur agrégé
BOURDEAU Marie-Françoise	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BOVANI Michel, vice-président	inspecteur général de l'éducation nationale
BOZON Marie-Pierre	professeur agrégé
BRANDEBOURG Patrick	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BREHERET Richard	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BRETONNIÈRE Laurent	professeur agrégé
BROISE Anne	maître de conférences
BRUCKER Christian	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BUGNET Gaëlle	professeur agrégé
CAM Emmanuel	professeur agrégé
CANTINEAU Christine	professeur de chaires supérieures
CHAPOULY Marianne	professeur agrégé
CHARPENTIER-TITY Charles	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
CHAUVET Emmanuel	professeur agrégé
CHOMEL DE JARNIEU Anne	professeur agrégé
COHEN-APTEL Véronique	professeur agrégé
COLESSE Sylvie	professeur agrégé
COLLEU Frederic	professeur agrégé

COQ-BURNOL Cécile	professeur de chaires supérieures
CORBLIN Agnès	professeur agrégé
CORTEZ Aurélie	maître de conférences
CRELEROT Michèle	professeur agrégé
CROUZET Antoine	professeur agrégé
DANIEL Amélie	professeur agrégé
DANNE Laurent	professeur agrégé
DÉAT Joëlle	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
DEBARGE Régis	professeur agrégé
DEGORCE Eric	professeur agrégé
DESROUSSEAUX Pierre-Antoine	professeur agrégé
DESTRUHAUT FABRICE	professeur agrégé
DEZELEE Charlotte	professeur agrégé
DI GRIGOLI cécile	professeur agrégé
DIDIER Antony	professeur agrégé
DIDRY Manon	professeur agrégé
DONATI-MARTIN Catherine	professeur des universités
DOS SANTOS Rui	professeur agrégé
DUBOULOZ Georges	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
DUDOGNON Marylène	professeur agrégé
DUMAS Laurent	professeur des universités
DUPIN Xavier	professeur agrégé
DUSSART Delphine	professeur agrégé
EGGER Damien	professeur agrégé
EL AMRANI Mohammed	maître de conférences
ESCOFFIER Jérôme	professeur agrégé
FAUBOURG Ludovic	professeur agrégé
FAUCHON Magali	professeur agrégé
FAURE Christian	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
FÉRACHOGLOU Robert	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
FEVOTTE Philippe	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
FIOL Clarisse	professeur agrégé
FITAMANT Christelle	professeur agrégé
FLICHE Françoise	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
FOISSY Loic, vice-président	professeur des universités
FONTAINE-ROBICHON Sophie	professeur agrégé
FONTY Hélène	professeur agrégé
FRANCOIS Claudine	professeur agrégé
GAMAIN Frédéric	professeur agrégé
GARCIA Thomas	professeur agrégé
GAROT Sébastien	professeur agrégé
GAUCHARD Xavier, vice-président	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
GAUTIER Sébastien	professeur agrégé
GEORGELIN Christine	maître de conférences
GERARD Danièle	professeur agrégé
GICQUEL Cécile	professeur agrégé
GIRAULT Dominique	professeur agrégé
GOSSE Michel	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
GOUY Michel	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
GRENIER-BOLEY Nicolas	maître de conférences
GRILLOT Michèle	maître de conférences
GRUNER Ilme	professeur agrégé
GUYONVARC'H Bertrand	professeur agrégé
HERMANS Yann	professeur agrégé

HEZARD David	professeur agrégé
HEZARD Marie	professeur agrégé
HONVAULT Pascal	maître de conférences
HUBERT Nicolas	professeur agrégé
HUNAULT Ollivier	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
JACQUIN Martine	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
JAMET Pierre-Yves	professeur de chaires supérieures
JOURDEN Gilbert	professeur de chaires supérieures
KAYSER Paul	professeur agrégé
KERSALÉ Marie	professeur agrégé
LA FONTAINE François	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LABROSSE Jean	professeur agrégé
LAC Philippe	professeur agrégé
LAFARGUE Benoît	professeur agrégé
LAGRAIS Alain	professeur agrégé
LAMPLE Hélène	professeur agrégé
LATHÉLIZE Arnaud	professeur agrégé
LAURENT REIG Céline	professeur agrégé
LAVAU Françoise	professeur agrégé
LE BORGNE Stéphane	maître de conférences
LE GALL Pol	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LEFORESTIER Céline	professeur agrégé
LEGROS Stéphane	professeur de chaires supérieures
LEGRY Ludovic	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LEROY Richard	professeur agrégé
LORIDON Geneviève, vice-présidente	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LOUVRIER Pascale	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LOVERA Stéphanie	professeur agrégé
MAGNIN Nicolas	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
MAILLE Vincent	professeur agrégé
MALLEGOL Pascale	professeur de chaires supérieures
MALLET Nathalie	professeur agrégé
MANESSE Sophie	professeur agrégé
MANSUY Anthony	professeur agrégé
MARCUS Sophie	professeur agrégé
MARI Pierre	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
MARQUIER Soisick	professeur agrégé
MARTEAU Jean-Luc	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
MARTINEZ Isabelle	professeur agrégé
MARTINEZ-LABROUSSE Isabelle	professeur agrégé
MASSELIN Vincent	professeur de chaires supérieures
MASSON-ROLLAND Claudie	professeur agrégé
MATHAUX Valérie	professeur agrégé
MEGARD Marie, vice-présidente	inspecteur général de l'éducation nationale
MENINI Chantal	maître de conférences
MICHAU Nadine	professeur agrégé
MOUEZ Stéphane	professeur agrégé
MULLAERT Chloé	professeur agrégé
NICOLLE Véronique	professeur agrégé
NOE Laurent	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
NOGUES Maryse	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
OBERT Marie-Christine	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
OLLIVIER Gilles	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
PAGOTTO Eric	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional

PASSAT Isabelle	professeur agrégé
PASSERAT Stéphane	professeur agrégé
PELLERIN Sebastien	professeur agrégé
PERRIN Ghislaine	professeur agrégé
PETIT Francis	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
PICAMOLES Xavier	professeur agrégé
PICARD Sandrine	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
PLANTEVIN Frédérique	maître de conférences
POLLET Sandrine	professeur agrégé
PRÉAUT Nicolas	professeur agrégé
PREBET Hubert	professeur agrégé
QUELET Béatrice	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
RASKINE Anne	professeur agrégé
REGNAUD Antoine	professeur agrégé
REMY Pascal	professeur agrégé
RICOMET Vincent	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
RODDIER Jean-Alain	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
RODOZ-PLAGNE Sophie	professeur agrégé
ROIGNAN SOARES Nathalie	professeur agrégé
ROLAND Audrey	professeur agrégé
ROUANET Véronique	professeur de chaires supérieures
ROUDNEFF Evelyne	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SAAI Mustapha	professeur agrégé
SAGEAUX Thierry	professeur agrégé
SALARDON Rémi	professeur agrégé
SALDANA Amandine	professeur agrégé
SALEUR Benoît	professeur agrégé
SALVI Karine	professeur agrégé
SATABIN Anabel	professeur agrégé
SCHWER Sylviane, vice-présidente	professeur des universités
SEITZ Jean-Jacques	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SENECHAUD Pascale	maître de conférences
SERRA Eric	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SIDOKPOHOU Olivier, vice-président	professeur agrégé
SIGWARD Eric	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SINTEFF Raphaël	professeur agrégé
SINTUREL Émile	professeur agrégé
SORBE Xavier, président du jury	inspecteur général de l'éducation nationale
SOROSINA Eric	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SPAGNESI Marion	professeur agrégé
STEFANI Stéphane	professeur agrégé
STRAUB Odile	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SZWARCBAUM Elia	professeur agrégé
TABKA Jalel	maître de conférences
TALEB Monique	professeur agrégé
TERREAU Corinne	professeur agrégé
TERRIER Loïc	professeur agrégé
TRUCHAN Alain	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
TUDESQ Christian	professeur agrégé
VANTROYS Fanny	professeur agrégé
VASSARD Christian	professeur agrégé
VAUGON Claude	professeur agrégé
VÉDRINE Mickaël	professeur agrégé
VIALE Alexandra	professeur agrégé

VOLTE Emmanuel	professeur agrégé
WEISSE Jean-François	professeur agrégé
WILKE Stéphane	professeur agrégé
WIRIG Gilles	professeur agrégé
XUEREB Thierry	professeur agrégé
YGÉ Jérôme	professeur agrégé
YILMAZ Dilek	professeur agrégé
ZINE Mehdi	professeur agrégé
ZOLNET Joffrey	professeur agrégé
ZWERTVAEGHER Karine	professeur agrégé

1.2 Définition des épreuves

Arrêté du 28 décembre 2009 fixant les sections et les modalités d'organisation des concours du certificat d'aptitude au professorat du second degré (MENH0931286A)

Section mathématiques

A. — Épreuves d'admissibilité

1° Première composition écrite (durée : cinq heures, coefficient 3).
2° Deuxième composition écrite (durée : cinq heures, coefficient 3).
Le sujet de chaque composition est constitué d'un ou de plusieurs problèmes.
Le programme de ces épreuves est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée (STS et CPGE).
L'usage de calculatrices scientifiques est autorisé selon la réglementation en vigueur.

B. — Épreuves d'admission

1° Leçon portant sur les programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs.
Durée de la préparation : deux heures et demie ; durée de l'épreuve : une heure ; coefficient 3.
Le candidat choisit un thème, parmi deux qu'il tire au sort.
Dans un premier temps (quinze minutes maximum), le candidat expose un plan d'étude détaillée du sujet qu'il a choisi.
Dans un second temps (quinze minutes maximum), le candidat développe une partie de ce plan d'étude, choisie par le jury.
L'épreuve se termine par un entretien avec le jury portant sur ce développement, puis sur d'autres aspects relevant du sujet choisi par le candidat.
Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.

2° Epreuve sur dossier comportant deux parties : 14 points sont attribués à la première partie et 6 points à la seconde. Durée de la préparation : deux heures et demie ; durée totale de l'épreuve : une heure ; coefficient 3.
Première partie : épreuve d'exercices ; durée : quarante minutes.
L'épreuve permet au candidat de montrer :

- sa culture mathématique et professionnelle ;
- sa connaissance des contenus d'enseignement et des programmes ;
- sa réflexion sur l'histoire et les finalités des mathématiques et leurs relations avec les autres disciplines.

L'épreuve s'appuie sur un dossier fourni par le jury, portant sur un thème des programmes de mathématiques du collège, du lycée ou des sections de techniciens supérieurs. Ce thème est illustré par l'énoncé d'un exercice, pouvant être complété par des extraits de manuels, des productions d'élèves ou des passages des programmes officiels. Le dossier comprend des questions permettant d'apprécier la réflexion pédagogique du candidat. Ces questions portent sur l'énoncé de l'exercice et sa résolution ou d'autres aspects pédagogiques liés au contenu du dossier.
Pendant vingt minutes, le candidat expose ses réponses aux questions posées dans le dossier et propose, en motivant ses choix, plusieurs exercices s'inscrivant dans le thème du dossier.
Cette première partie se termine par un entretien avec le jury, portant sur l'exposé du candidat, en particulier sur les exercices qu'il a proposés, aussi bien en ce qui concerne leur résolution que les stratégies mises en œuvre.
Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.
Le programme de cette première partie d'épreuve est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs.
Seconde partie : interrogation portant sur la compétence Agir en fonctionnaire de l'Etat et de façon éthique et responsable. (Présentation dix minutes, entretien avec le jury : dix minutes.)
Le candidat répond pendant dix minutes à une question, à partir d'un document inclus dans le dossier qui lui a été remis au début de l'épreuve, question pour laquelle il a préparé les éléments de réponse durant le temps de préparation de l'épreuve. La question et le document portent sur les thématiques regroupées autour des connaissances, des capacités et des attitudes définies, pour la compétence désignée ci-dessus, dans le point 3 « les compétences professionnelles des maîtres » de l'annexe de l'arrêté du 19 décembre 2006.
L'exposé se poursuit par un entretien avec le jury pendant dix minutes.

1.3 Programme

Épreuves écrites

Le programme est constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée (STS et CPGE) en vigueur au titre de l'année scolaire 2012-2013 et de ceux en vigueur au titre de l'année scolaire 2011-2012.

Épreuves orales

Le programme est constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs en vigueur au titre de l'année scolaire 2013-2014 et de ceux en vigueur au titre de l'année scolaire 2012-2013.

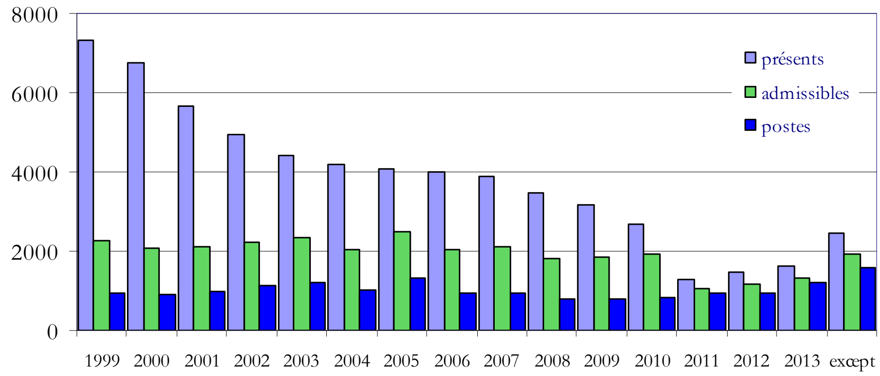
2. QUELQUES STATISTIQUES

2.1 Historique

La session exceptionnelle 2014, dont les épreuves d'admissibilité se sont déroulées en juin 2013, a été organisée pour faire face aux importants besoins de recrutement. Ce dispositif transitoire, ouvert aux candidats inscrits en première année d'études en vue de l'obtention d'un master, a offert la possibilité à ceux qui ont été admissibles d'exercer des fonctions d'enseignement dans le cadre d'un contrat d'une année scolaire entre les épreuves d'admissibilité et celles d'admission.

L'augmentation du nombre de candidats présents aux épreuves écrites est une conséquence directe du calendrier particulier de cette session. En effet, plus de 800 candidats qui étaient admissibles à la session 2013 ont logiquement souhaité passer les épreuves écrites de la session exceptionnelle, par sécurité, dans la mesure où celles-ci se tenaient quelques jours avant le début des oraux de la session 2013.

CAPES	postes	présents aux deux épreuves écrites	admissibles	admis		présents / postes	admis / présents
1999	945	7332	2274	945		7,8	13%
2000	890	6750	2067	890		7,6	13%
2001	990	5676	2109	990		5,7	17%
2002	1125	4948	2213	1125		4,4	23%
2003	1195	4428	2328	1195		3,7	27%
2004	1003	4194	2040	1003		4,2	24%
2005	1310	4074	2473	1310		3,1	32%
2006	952	3983	2043	952		4,2	24%
2007	952	3875	2102	952		4,1	25%
2008	806	3453	1802	806		4,3	23%
2009	806	3160	1836	806		3,9	26%
2010	846	2695	1919	846		3,2	31%
2011	950	1285	1047	574		1,4	45%
2012	950	1464	1176	652		1,5	45%
2013	1210	1613	1311	816		1,3	51%
2014 except.	**1592**	**2454**	**1903** *	**794**			



* Parmi les 1903 admissibles à la session exceptionnelle du CAPES, 681 ont été admis en 2013 à un concours de recrutement d'enseignant.
662 d'entre eux, reçus au CAPES ou au CAFEP ou à l'agrégation de Mathématiques, presque tous nommés professeurs stagiaires à la rentrée 2013, n'avaient a priori aucune raison de subir à nouveau les épreuves orales (six ont néanmoins choisi de se présenter une nouvelle fois).
Ainsi, le nombre de candidats admissibles réellement concernés par les épreuves orales était en fait 1247 (1903–662+6).
Seulement 1041 candidats se sont déplacés pour prendre part aux épreuves orales.
De sorte que lors de cette session la part d'admis parmi les admissibles présents aux oraux a atteint le niveau record de 76% (72% en 2013, 62% en 2012, 61% en 2011, 52% en 2010).

CAFEP	postes	présents aux deux épreuves écrites	admissibles	admis
1999	210	847	107	57
2000	206	1030	145	78
2001	215	889	200	113
2002	230	745	192	118
2003	230	636	214	116
2004	177	658	205	103
2005	177	644	279	139
2006	135	689	283	126
2007	160	693	267	123
2008	155	631	200	90
2009	109	633	268	109
2010	155	554	308	119
2011	90	276	198	90
2012	75	319	214	75
2013	105	359	272	105
exceptionnelle	**155**	**493**	**342** **	**155**

** Pour les mêmes raisons qu'au CAPES externe, il est plus juste de retenir un effectif de 259 admissibles. 219 d'entre eux se sont déplacés pour prendre part aux épreuves orales.

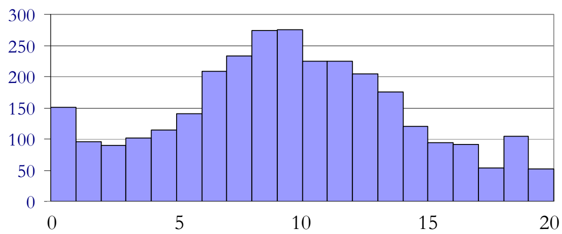
2.2 Répartition des notes

Les données suivantes concernent les concours CAPES et CAFEP confondus.
Sauf mention contraire, les notes indiquées sont sur 20.

2.2.1 Épreuves d'admissibilité

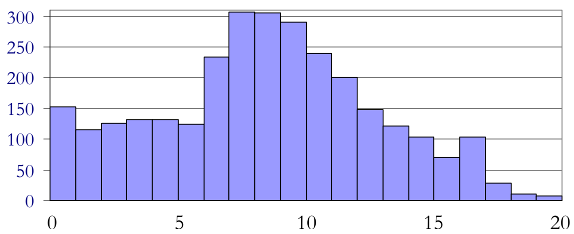
Première composition

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,43	4,76	6,40	9,47	12,54



Deuxième composition

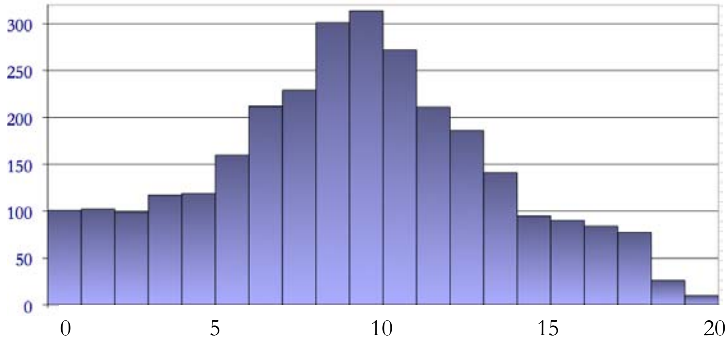
Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
8,42	4,31	5,63	8,45	11,26



Le coefficient de corrélation linéaire entre les notes des deux épreuves écrites est 0,86.
La barre d'admissibilité a été fixée à 6,02 sur 20.

Moyenne écrit

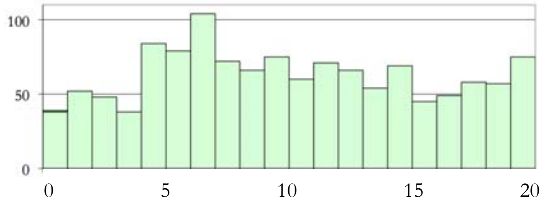
Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,03	4,31	6,24	9,09	11,88



2.2.2 Épreuves d'admission

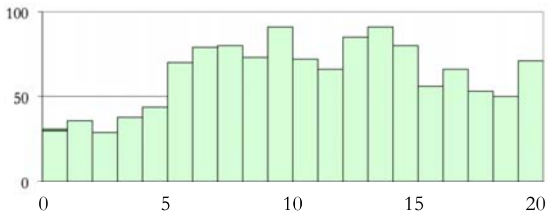
Leçon

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,80	5,49	5,60	9,50	14,00



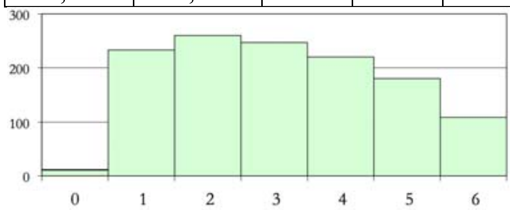
Dossier / Exercice

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
10,52	5,15	6,40	10,40	14,40



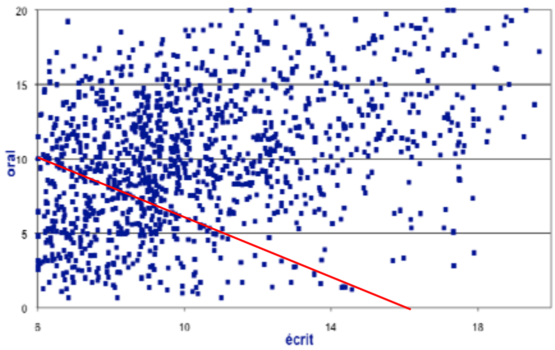
Dossier / Agir en fonctionnaire (notes sur 6)

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
3,12	1,59	2	3	4



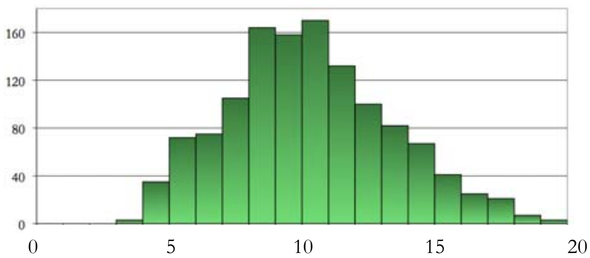
La note sur 20 de l'épreuve sur dossier est constituée de la partie « Exercice » sur 14 (représentée ici sur 20) et de la partie « Agir en fonctionnaire » sur 6.

Le nuage ci-dessous illustre la répartition des candidats en fonction de leurs moyennes à l'écrit et à l'oral.



Moyenne générale (écrit et oral)

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
10,38	3,08	8,01	10,08	12,32



La barre d'admission (représentée plus haut en rouge, sans tenir compte des notes 0 éliminatoires) a été fixée à 8,00 sur 20.
La moitié des postes offerts ont été pourvus. Compte tenu du nombre de candidats présents et du niveau d'exigence que requiert le recrutement de professeurs certifiés, il n'a pas été possible d'aller au-delà.

Au CAFEP, le rapport candidats / postes nettement plus favorable a permis de pourvoir tous les postes (moyenne du dernier admis : 8,43 sur 20).

2.3 Autres données

Les données suivantes concernent les concours CAPES et CAFEP confondus, en distinguant les candidats présents aux épreuves écrites, les admissibles et les admis (CAPES : 794 admis et un à titre étranger, CAFEP : 155 admis). Elles ont été établies à partir des renseignements fournis par les candidats au moment de leur inscription.

Sexe	présents		admissibles		admis	
Femmes	1246	42%	962	43%	431	45%
Hommes	1701	58%	1283	57%	519	55%
	2947		2245		950	

Âge	présents		admissibles		admis	
entre 20 et 25 ans	647	22%	609	27%	340	36%
entre 25 et 30 ans	1074	36%	886	39%	323	34%
entre 30 et 35 ans	376	13%	260	12%	102	11%
antre 35 et 40 ans	306	10%	172	8%	73	8%
entre 40 et 45 ans	252	9%	141	6%	50	5%
entre 45 et 50 ans	141	5%	91	4%	30	3%
plus de 50 ans	151	5%	86	4%	32	3%

Académie d'inscription	présents		admissibles		admis	
AIX-MARSEILLE	136	5%	93	4%	36	4%
AMIENS	44	1%	33	1%	13	1%
BESANCON	65	2%	55	2%	27	3%
BORDEAUX	115	4%	93	4%	33	3%
CAEN	55	2%	48	2%	18	2%
CLERMONT-FERRAND	59	2%	47	2%	24	3%
CORSE	8	0%	4	0%	1	0%
DIJON	56	2%	47	2%	20	2%
GRENOBLE	154	5%	131	6%	65	7%
GUADELOUPE	33	1%	19	1%	6	1%
GUYANE	3	0%	0	0%	0	0%
LA REUNION	57	2%	33	1%	13	1%
LILLE	202	7%	155	7%	56	6%
LIMOGES	26	1%	23	1%	10	1%
LYON	174	6%	125	6%	57	6%
MARTINIQUE	23	1%	13	1%	4	0%
MAYOTTE	4	0%	2	0%	0	0%
MONTPELLIER	103	3%	76	3%	36	4%
NANCY-METZ	112	4%	87	4%	35	4%
NANTES	152	5%	108	5%	44	5%
NICE	98	3%	74	3%	28	3%
NOUVELLE CALEDONIE	22	1%	19	1%	8	1%
ORLEANS-TOURS	72	2%	61	3%	36	4%
PARIS -CRETEIL-VERSAILLES	560	19%	409	18%	180	19%
POITIERS	66	2%	61	3%	25	3%
POLYNESIE FRANCAISE	6	0%	3	0%	1	0%
REIMS	63	2%	56	2%	24	3%
RENNES	170	6%	132	6%	61	6%
ROUEN	74	3%	59	3%	25	3%
STRASBOURG	95	3%	73	3%	24	3%
TOULOUSE	140	5%	106	5%	40	4%

Catégorie	présents		admissibles		admis	
étudiants	1461	50%	1316	59%	590	62%
maitre-auxiliaire	142	5%	90	4%	40	4%
contractuel 2d degré	325	11%	201	9%	63	7%
vacataire du 2d degré	67	2%	43	2%	17	2%
assistant d'éducation	90	3%	50	2%	16	2%
autres (éducation nationale ou supérieur)	182	6%	109	5%	43	5%
cadres du secteur privé	142	5%	88	4%	37	4%
sans emploi	332	11%	225	10%	80	8%
autres	206	7%	123	5%	64	7%

3. ANALYSES ET COMMENTAIRES

3.1 Épreuves écrites

Le sujet de la **première épreuve** était composé de deux problèmes : un d'analyse et probabilités (sommes de Riemann, applications à l'étude de suites et aux probabilités) et un d'analyse (construction de la fonction exponentielle, évolution d'une population).

Le jury a prêté une attention particulière aux compétences suivantes.

- *Rédiger de façon rigoureuse une démonstration simple*
  58% des candidats ont traité correctement au moins une des questions A.1.3 ou A.1.5 du problème 2.
- *Rédiger un raisonnement par récurrence*
  52% ont rédigé correctement le raisonnement par récurrence de la question A.2.2 du problème 2.
- *Citer à bon escient un théorème d'analyse*
  34% ont cité le théorème attendu à la question A.1 du problème 1 (théorème de Heine) ou à la question B.1 du problème 2 (théorème de Cauchy-Lipschitz).
- *Écrire un algorithme*
  11% des candidats ont traité correctement la question A.6.2 du problème 1.
- *Calculer une intégrale*
  46% des candidats ont traité correctement au moins une des questions C.1 ou D.1.2 du problème 1.

Ces constats appellent plusieurs remarques pouvant orienter la préparation des futurs candidats :

- rédiger de manière rigoureuse une démonstration simple est une composante essentielle du métier de professeur de mathématiques ; il est attendu que les raisonnements, en particulier ceux qui relèvent du collège ou du lycée, soient rédigés avec toute la précision voulue ;
- le raisonnement par récurrence est mieux traité que lors des sessions précédentes, même si la place des quantificateurs est encore trop souvent hasardeuse ;
- les connaissances mathématiques de base, indispensables au recul indispensable à tout enseignant de mathématiques, doivent être mieux maîtrisées et énoncées avec précision lorsqu'elles sont utilisées ;
- l'algorithmique, comme cela a été mentionné dans le rapport de la session précédente, est une composante majeure de l'activité mathématique au lycée ; à ce titre, elle doit faire l'objet d'une préparation spécifique, cette démarche ayant une place naturelle dans de nombreux domaines du programme ;
- mener à terme proprement un calcul d'intégrale est un attendu exigible de la part de futurs professeurs de mathématiques.

Si l'inégalité triangulaire est mise en œuvre correctement, les candidats multiplient souvent une inégalité par un réel sans se soucier du signe de ce dernier, élèvent au carré ou passent à l'inverse sans aucune précaution. Ils ne distinguent pas toujours une inégalité large d'une inégalité stricte.
Par ailleurs, les propriétés de la valeur absolue sont méconnues ou posent des problèmes à de nombreux candidats.

De façon générale, les candidats vérifient trop rarement les hypothèses avant d'appliquer un théorème ou une propriété établie antérieurement, ou encore lors des questions de synthèse.
Dans la recherche de limites, le théorème des gendarmes est très souvent invoqué à juste titre, mais rarement est signifiée l'existence de la limite. Seul le deuxième volet de ce théorème, permettant d'obtenir la valeur de la limite, est évoqué.
Dans de nombreux raisonnements ou calculs, on observe une utilisation intempestive, voire irréfléchie du symbole d'équivalence.

Dans la partie A du problème 1, on note une confusion trop fréquente entre continuité et continuité uniforme, voire une méconnaissance de cette dernière notion. Les candidats identifient aussi trop systématiquement un taux de variation et sa limite.
Dans la partie D du problème 1, la loi binomiale est bien reconnue. En revanche, la formule des probabilités totales ne semble pas connue ; sans être citée, on ne la voit pas mise en acte. Cependant, les candidats semblent moins hésiter que lors des sessions précédentes à aborder la partie probabilités.

Dans le début du problème 2, trop nombreux sont les candidats qui n'ont pas lu l'énoncé correctement et ont supposé connue la fonction exponentielle. Dans le cas contraire, le début de ce problème est bien traité et les candidats qui ont abordé l'épreuve en commençant par ce problème l'ont plutôt bien réussi.

Le sujet de la **deuxième épreuve** était composé de deux problèmes. Le premier, classique mais nécessitant une bonne maîtrise des notions d'algèbre linéaire et de réduction des matrices, consistait en une étude des matrices dont une des puissances est égale à l'identité. Le second, dont le point de départ s'appuyait sur des connaissances arithmétiques élémentaires, proposait une exploration de la notion de développement décimal d'un réel.
Les candidats ont abordé ces deux problèmes de façon variée, certains préférant traiter de façon approfondie un seul des deux, d'autres essayant de traiter une partie de chaque problème. Les deux attitudes étaient également valables et ont pu donner lieu à de bonnes notes, à condition que ce qui était traité le fût avec précision et rigueur.

Le jury a prêté une attention particulière aux compétences suivantes.

- *Rédiger de manière rigoureuse un raisonnement simple*
  Seulement 23% des copies ont fourni une réponse correcte à la première question du problème 2, 59% une réponse erronée et 18% aucune réponse. Plusieurs candidats se sont contentés de simples affirmations, ou d'exemples numériques. On ne saurait trop conseiller à de futurs professeurs de prendre le temps d'exposer précisément et rigoureusement des notions qu'ils seront ensuite amenés à enseigner. La stratégie consistant à traiter superficiellement les premières questions pour ne se consacrer qu'aux questions délicates n'est donc pas ici une bonne stratégie.
- *Rédiger un raisonnement par récurrence*
  73% des candidats ont rédigé correctement au moins une démonstration par récurrence dans l'un des deux problèmes.
- *Connaître et utiliser les propriétés de la division euclidienne*
  51% des copies ont su utiliser correctement la division euclidienne dans l'une des questions où elle apparaissait. Dans les autres, les conditions portant sur le reste étaient souvent absentes ou erronées.
- *Connaître et utiliser la notion de valeur propre*
  Moins d'un quart des copies (23%) ont traité correctement la question A.2.3 du problème 1, qui proposait de montrer que les valeurs propres étaient des racines de l'unité.

Dans le problème 1, outre une bonne maîtrise de la démonstration par récurrence, les candidats ont pour la plupart montré un certain savoir-faire en matière de calcul matriciel. En revanche, les théorèmes de réduction et les notions de valeur propre et de vecteur propre sont connus de manière trop approximative.

Dans le problème 2, les premières questions ont montré une maîtrise très inégale des méthodes et des théorèmes d'arithmétique. Les questions portant sur les convergences de série ont été mieux traitées, même si les justifications de convergence sont parfois absentes ou incomplètes. La fin de la partie B, les parties C et D comportaient des questions plus fines et délicates et n'ont été réellement abordées que par les meilleures copies. Le jury constate avec satisfaction que l'algorithme de la partie B a été souvent traité, la plupart du temps de manière satisfaisante, ce qui témoigne d'une évolution positive des compétences des candidats dans ce domaine.

Enfin, il faut rappeler que l'évaluation d'une copie est très sensible à sa lisibilité, qui repose notamment sur le respect des notations, la rigueur des démonstrations et la capacité à conclure une argumentation.

3.2 Épreuves orales

L'objectif des épreuves orales est l'évaluation des compétences notionnelles, didactiques et pédagogiques relevant des programmes de mathématiques des classes de l'enseignement secondaire ou des sections de techniciens supérieurs. Il s'agit donc non seulement de prouver ses compétences en mathématiques, mais également de montrer, d'une part, ses capacités à introduire, développer, illustrer et appliquer ces notions pour un public d'élèves, d'autre part, son aptitude à participer, comme représentant d'une institution et membre d'une équipe éducative, à la formation de ces élèves. L'évaluation de chacune des deux épreuves tient compte de ces différents aspects.
L'épreuve de leçon et l'épreuve sur dossier sont indépendantes et évaluées par deux commissions différentes. Il ne suffit pas, mais c'est le minimum attendu, de pouvoir démontrer tous les théorèmes et propositions que l'on utilise, et de savoir faire tous les exercices pour obtenir une bonne note. Une certaine connaissance des programmes, une bonne maîtrise du temps de présentation, des média de communication mis à disposition (tableau, vidéoprojecteur, logiciels, bibliothèque numérique), une élocution claire, un niveau de langage adapté, un vocabulaire mathématique précis, une attitude d'écoute envers le jury sont des facteurs importants de la notation.
Le jury a pu constater une utilisation de plus en plus pertinente des moyens numériques, en particulier dans l'emploi du tableur – même si certains candidats refusent encore son utilisation comme moyen de preuve dans les situations où le nombre de cas à traiter est fini – et des logiciels de géométrie dynamique. Il a également apprécié le recours de plus en plus fréquent à l'algorithmique.
Le jury regrette de voir encore certains candidats se contenter de recopier au tableau, sans aucun regard vers lui, leurs notes manuscrites ou un manuel. L'utilisation alternée du vidéoprojecteur et du tableau, ponctuée de commentaires, permet de faire une présentation bien rythmée et attrayante, sans qu'il soit nécessaire de passer trop de temps à la préparation des documents au dépend des contenus.
Enfin, il semble utile de rappeler que les questions du jury ne visent en rien à déstabiliser le candidat, mais au contraire à lui permettre de corriger certaines erreurs ou imprécisions ou encore à le valoriser en l'orientant vers des pistes inexplorées. Fort heureusement, plusieurs candidats l'ont bien compris et ont obtenu des notes maximales à chaque épreuve.
Comme pour tout concours, une préparation soigneuse de chacune des épreuves sur une durée suffisamment longue reste le meilleur gage de réussite. Rappelons que les paragraphes introductifs des programmes, les attendus du socle commun et les documents d'accompagnement sont des ressources essentielles pour la préparation à un concours de recrutement d'enseignants.

3.2.1 Leçon

L'épreuve de leçon consiste à traiter de façon synthétique un sujet tiré au choix parmi deux issus de la liste officielle des leçons et portant sur une ou plusieurs notions mathématiques relevant des programmes des classes de l'enseignement secondaire ou des sections de techniciens supérieurs. Cette épreuve se compose de trois parties :

- *l'exposé d'un plan* : une structure claire permet d'introduire les diverses notions de façon progressive, sous forme de définitions et propriétés illustrées d'exemples, contre-exemples, d'applications ; le jury – qui n'intervient pas pendant cet exposé - doit y trouver matière au choix du développement ;
- *le développement d'une partie du plan* choisie par le jury – qui n'intervient pas pendant cet exposé – permet au candidat de montrer sa maîtrise du sujet et sa bonne compréhension des éléments exposés dans le plan, à travers la démonstration d'une propriété, la résolution d'un exercice, la mise en œuvre d'un logiciel, etc. ;
- *l'entretien* constitue un moment d'échange avec le jury permettant au candidat de clarifier certains éléments du plan ou du développement et de valoriser ses connaissances en prenant du recul par rapport au thème abordé.

Pour cette épreuve, le jury n'attend pas du candidat qu'il se réfère à une situation d'enseignement précise ni qu'il traite le sujet « comme devant une classe ». En revanche, la posture attendue est proche de celle d'un enseignant : l'aisance, la clarté du discours, la mise en perspective, le souci de se faire bien comprendre et de préciser le contexte de la leçon sont autant de points qui sont systématiquement valorisés. S'il est bienvenu de savoir se référer ponctuellement aux notes prises durant la préparation, par exemple pour vérifier un calcul, il est important de pouvoir s'en détacher la plupart du temps.

Parmi les leçons choisies, le jury a apprécié la nette amélioration des leçons concernant les probabilités — sauf la loi de Poisson et la loi normale —, l'algorithmique et les leçons transverses. Ces dernières sont rarement choisies, mais valorisent fortement les candidats qui les ont bien préparées. En revanche, les sujets qui posent le plus de difficultés concernent encore l'arithmétique, les graphes, les matrices, les séries statistiques à deux variables, la fluctuation d'échantillonnage, et le traitement de certains thèmes du collège, comme la proportionnalité et la notion de fonction. Les leçons « produit scalaire » et « calcul vectoriel » sont souvent malencontreusement confondues.

Un plan de qualité doit être synthétique et cohérent, mais également bien contextualisé, riche et attrayant. Présenter une succession de titres ne suffit pas et est fortement pénalisé. Le jury attend des énoncés (définitions, propositions, théorèmes) formulés avec clarté et rigueur, bien articulés et des illustrations (exemples, contre-exemples, exercices d'application, schémas et graphiques) riches et variées. Un plan suffisamment hiérarchisé permet aux candidats de valeur de faire la part des choses entre ce qui doit être vidéoprojeté, écrit au tableau et ce que l'on peut se contenter d'exposer oralement. Le jury attend des candidats qu'ils soient vigilants quant au statut des énoncés, qu'ils distinguent soigneusement conjecture et preuve et qu'ils utilisent correctement les connecteurs et quantificateurs logiques.

Le développement, qui relève du choix du jury, doit constituer une prestation personnelle : se limiter à lire une démonstration directement extraite d'un manuel est naturellement sanctionné. Il est donc nécessaire de s'assurer de la maîtrise de toutes les notions et exercices que l'on propose. Le jury a relevé trop de connaissances approximatives des fonctions de référence et de leurs courbes, des difficultés à démontrer des propriétés exigibles en Terminale comme celles portant sur les limites, la dérivée de la fonction racine carrée, le lien entre dérivée nulle en un point et maximum, le théorème des valeurs intermédiaires, des confusions entre les suites d'expressions $u_n=f(n)$ et $u_n=f(u_{n-1})$, les graphes, les démonstrations par récurrence, le maniement des connecteurs et des quantificateurs logiques.
Le jury est très sensible à la qualité des exercices proposés dans la leçon, et la présentation de problèmes ouverts pertinents pouvant se décliner à différents niveaux est toujours valorisée. En particulier, l'introduction de problèmes issus de la géométrie dans l'espace pour des thèmes comme *optimisation, problèmes conduisant à la résolution d'équations, calculs de longueurs* permet d'enrichir élégamment une leçon.

3.2.2 Exercice

La partie *Exercice* de l'épreuve sur dossier permet d'évaluer les candidats dans le cadre d'une mise en situation professionnelle :

- l'analyse de productions d'élèves, d'extraits de programmes officiels ou la recherche des compétences visées par un énoncé amène à porter un regard pédagogique conforme aux exigences du métier ;
- la correction d'un exercice comme on le ferait en situation d'enseignement oblige à exposer les arguments de façon claire et précise à un niveau adapté, ainsi qu'à anticiper sur certaines difficultés prévisibles ;
- le choix d'exercices sur un thème donné conduit à s'interroger sur les objectifs visés ainsi que sur la variété des applications ou des méthodes possibles.

La mise à disposition du sujet au format numérique et l'emploi du vidéoprojecteur ont permis à bon nombre de candidats une gestion optimisée du temps de présentation. Les candidats maîtrisent de mieux en mieux les logiciels (géométrie dynamique et tableur notamment). Cependant certains ne sont pas assez synthétiques et n'ont pas suffisamment de temps pour présenter leurs exercices, ce qui les pénalise.

Le jury a constaté que l'analyse des productions d'élèves est cette année encore en progrès. Les points positifs de ces productions, notamment en termes de stratégies pertinentes mais non abouties, sont mieux mis en valeur. En revanche, il est regrettable que ces analyses ne soient pas le support de construction des corrections proposées et de propositions de remédiation, ce qui est pourtant l'objectif de l'analyse des productions d'élèves.

La notion de compétence reste souvent mal cernée. Les ressources institutionnelles sur le sujet sont pourtant riches et il conviendrait que les candidats s'en préoccupent davantage lors de la préparation du concours. Par exemple, une réflexion préalable sur la notion de tâche complexe pourrait utilement aider l'analyse de certaines productions d'élèves et également procurer des entrées pertinentes pour le choix d'exercices complémentaires variés.

L'exercice figurant dans le dossier proposé pour la préparation met toujours quelques candidats en difficulté. La consigne de correction « comme devant une classe » est trop peu respectée. Le jury n'attend pas la démonstration d'un parfait savoir faire professionnel ; il s'agit plutôt de démontrer sa capacité à adopter une posture d'enseignant, à proposer des réponses et des explications claires. En particulier, une trace écrite de la correction est attendue, de même que des qualités de communication affirmées.

La proposition d'exercices par le candidat obéit à plusieurs impératifs :

- de nature variée (distincts de celui du jury), ils doivent offrir un intérêt mathématique, s'inscrire dans le thème indiqué et, lorsque celui-ci s'y prête, couvrir plusieurs niveaux;
- leur présentation ne consiste pas à copier les énoncés au tableau ou à les vidéoprojeter ; mais à en préciser l'objet de façon vivante, à motiver ses choix pédagogiques en explicitant les compétences que l'on souhaite développer et à prévoir d'éventuels aménagements de leur contenu ;
- enfin, les conseils concernant le choix des exercices de leçon conviennent également pour cette épreuve, en particulier le candidat doit obligatoirement se montrer capable de résoudre les exercices qu'il propose, faute de quoi son choix se trouve largement discrédité.

Durant cette partie de l'épreuve, certains candidats se sont réellement mis en valeur en justifiant la pertinence de leur choix, tant du point de vue didactique que pédagogique. Ce sont souvent les mêmes qui parviennent à rattacher à une même problématique un choix varié d'exercices. Pour certains sujets, des consignes complémentaires sont imposées quand au choix des exercices (optimisation, modélisation, utilisation d'un algorithme) qu'il convient de respecter.

Il va de soi que la fréquentation régulière de situations d'enseignement et la constitution d'une bibliothèque d'exercices variés durant la préparation du concours peuvent aider les candidats à aborder sereinement cette épreuve.

3.2.3 Agir en fonctionnaire de l'État

Cette partie de l'épreuve sur dossier, en vigueur sous cette forme pour la dernière session, entre pour une part importante dans la note finale de l'épreuve sur dossier. Elle permet d'apprécier la façon dont le candidat envisage les obligations du fonctionnaire et ses futures responsabilités d'enseignant et d'éducateur. Elle lui donne l'occasion d'exprimer sa conception du travail en équipe et sa vision de la place des enseignants dans la vie de l'établissement. Elle permet de mesurer sa connaissance du système éducatif.

Chaque sujet de la partie *Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable* repose sur une étude de cas complétée par un ou plusieurs documents (extraits de textes officiels, analyses statistiques, articles, etc.). Les thèmes abordés lors de la session exceptionnelle 2014 concernaient l'évaluation des élèves, la lutte contre l'échec scolaire, l'orientation, les liaisons inter-cycles, la maîtrise de la langue, le décrochage scolaire, l'accès des filles aux filières scientifiques, l'usage des TICE et d'internet, les problématiques liées aux addictions et au harcèlement, les relations avec les parents.

Les candidats sont de mieux en mieux préparés à cette épreuve et certains savent bien mettre en valeur leur expérience d'enseignement. Le jury a cependant déploré, dans des cas heureusement fort rares, la paraphrase des documents mis à disposition ou un manque d'intérêt pour les questions ne relevant pas directement de l'enseignement des Mathématiques.

4. ÉNONCÉS

4.1 Énoncés des épreuves écrites

4.1.1 Première composition

ministère
Éducation
nationale

GBE MAT 1

SESSION 2014

CAPES
CONCOURS EXTERNE
TROISIÈME CONCOURS
ET CAFEP CORRESPONDANTS

Sections :

MATHÉMATIQUES
LANGUES RÉGIONALES : BRETON

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Problème 1 : sommes de Riemann.

Dans ce problème, on suppose introduite à l'aide des fonctions en escalier la notion d'intégrale au sens de Riemann d'une fonction.

Partie A : convergence des sommes de Riemann

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et on considère les sommes de Riemann :

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{et} \quad R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Dans un premier temps, on se propose de démontrer que les suites $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et de même limite $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans un deuxième temps, on cherche à obtenir une majoration de $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)S_n(f)\right|$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

2. Soit ε un réel strictement positif.

   2.1. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall t \in [x_k, x_{k+1}], |f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

   2.2. En déduire que :
$$\forall n \geq N, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$
   puis que :
$$\forall n \geq N, \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)S_n(f)\right| \leq \varepsilon.$$

3. En déduire que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergent vers $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. *Application*

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$.

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2$.

5. Dans cette question, on suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

   5.1. Démontrer qu'il existe un réel M tel que : $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq M$.

   5.2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall t \in [x_k, x_{k+1}], |f(t) - f(x_k)| \leq M(t - x_k)$.

5.3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n^2}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)S_n(f) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

6. *Application : calcul d'une valeur approchée de* $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ *par la méthode des rectangles.*

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$.

6.1. Déterminer un réel M tel que $\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leq M$.

6.2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant les résultats obtenus dans la question 5, écrire un algorithme qui calcule une valeur approchée à ε près de $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Partie B : application à l'étude de suites

Soit f une fonction définie sur $]0,1]$, continue et décroissante sur $]0,1]$.
On considère la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et la fonction I définie sur $]0,1]$ par : $\forall x \in]0,1]$, $I(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. En additionnant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. On suppose, de plus, que $\lim\limits_{x\to 0} I(x) = l$ $(l \in \mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$. Démontrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

4. Dans cette question, on pose $f(x) = \dfrac{x^2-1}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$, pour tout réel $x \in]0,1]$.

4.1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$.
On rappelle que la somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4.2. En utilisant les questions précédentes, démontrer que la suite $\left(\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite. *On rappelle que la fonction* $x \longmapsto x\ln x - x$ *est une primitive de la fonction* $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Partie C : une suite d'intégrales

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |sin(nx)| \, \mathrm{d}x = \frac{2}{n}.$$

2. Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, \pi]$.
   2.1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|sin(nx)| \, \mathrm{d}x \leq \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

   2.2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)|sin(nx)| \, \mathrm{d}x$.

   2.3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(x)|sin(nx)| \, \mathrm{d}x$.

   2.4. Obtiendrait-on le même résultat pour une fonction f continue et décroissante sur $[0, \pi]$?

Partie D : une application aux probabilités

1. Pour tout couple d'entiers naturels (k, m), on pose $I_{k,m} = \displaystyle\int_0^1 x^k (1-x)^m \, \mathrm{d}x$.
   1.1. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, I_{k,m} = \dfrac{k}{m+1} I_{k-1,m+1}$.
   1.2. Pour tout couple d'entiers naturels (k, m), déterminer $I_{0,k+m}$ et en déduire une expression de $I_{k,m}$ en fonction des entiers k et m.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$.
   Une urne contient des boules rouges et des boules blanches. La proportion de boules rouges dans cette urne est p. On réalise dans cette urne n tirages indépendants d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
   Déterminer la loi de probabilité de X, puis donner l'espérance de X.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$.
   On dispose de N urnes U_1, ..., U_N contenant des boules rouges et des boules blanches et telles que, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, la proportion de boules rouges dans U_j est $\dfrac{j}{N}$.
   On choisit une urne au hasard et on effectue dans cette urne n tirages indépendants d'une boule avec remise. On note X_N la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
   3.1. Pour tout entier naturel k, on note $p_N(k)$ la probabilité que X_N prenne la valeur k.
   Démontrer que : $p_N(k) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}$.
   3.2. Calculer l'espérance de X_N. Quelle est la limite de cette espérance quand N tend vers $+\infty$?
   3.3. En utilisant le résultat obtenu dans la première question, déterminer $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} p_N(k)$.
   Que peut-on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(X_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$?

Problème 2 : fonction exponentielle, évolution d'une population

On établit dans la partie A l'existence d'une unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$ et on étudie dans la partie B un exemple d'équation différentielle.
Dans la partie A, les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes sont supposées ne pas être connues.

Partie A : la fonction exponentielle

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle $(E) : y' = y$, avec la condition $y(0) = 1$.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction f dérivable, solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$.
   1.1. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$.
   1.2. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   1.3. Démontrer que si g est une fonction dérivable solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$, alors $g = f$.
   On pourra considérer la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
   1.4. Démontrer que : $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a + b) = f(a) \times f(b)$.
   On pourra fixer un réel a et considérer la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{f(a+x)}{f(a)}$.
   1.5. Déduire des résultats précédents que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. On va dans cette question établir l'existence d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E) telle que $f(0) = 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout entier $n > |x|$:
   $$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}.$$
   On va montrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.
   2.1. Justifier que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont bien définies pour $n > |x|$.
   2.2. Établir par récurrence l'inégalité de Bernoulli :
   $$\forall\, a \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + a)^n \geqslant 1 + na$$
   2.3. Soit n un entier tel que $n > |x|$.
   i. Démontrer que : $u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \times \left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}$.
   ii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que : $\left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant \dfrac{1}{1 + \frac{x}{n}}$.
   iii. En déduire que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.
   2.4. Démontrer que la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante.
   2.5. Soit n un entier tel que $n > |x|$.
   i. Démontrer que : $v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)$.
   ii. En déduire que : $v_n(x) - u_n(x) \geqslant 0$.

iii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que : $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x) \times \dfrac{x^2}{n}$.

2.6. Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la limite de la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$. Conclure.

2.7. On désigne par f la fonction qui à tout réel x associe $f(x)$, limite commune des suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$. On va démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) et vérifie $f(0) = 1$.

i. Démontrer que : $f(0) = 1$.
Dans les deux questions suivantes, on considère un réel x_0.

ii. On admet que : $\forall\,(a,k) \in \mathbb{R}^2,\ f(a+k) - f(a) \geqslant k f(a)$.
En utilisant cette relation, établir que :

$$\forall\, h \in]-1,1[,\ h\, f(x_0) \leqslant f(x_0+h) - f(x_0) \leqslant \frac{h}{1-h} f(x_0)\,.$$

iii. En déduire que f est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$. Conclure.

Partie B : évolution d'une population

Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on utilise le modèle suivant. On admet que la fonction N, représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en années) vérifie les conditions suivantes :

- N est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

  où r et K sont des constantes réelles strictement positives ;
- $N(0) = N_0$, avec $0 < N_0 < K$;
- N est définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 ;
- si g est une solution de (E) définie sur un intervalle J contenant 0 et vérifiant $g(0) = N_0$, alors J est inclus dans I.

1. Quel théorème permet de garantir l'existence et l'unicité de la fonction N ?

   On admet que I contient $[0, +\infty[$, et que pour tout réel $t \in I$, $0 < N(t) < K$.

2. *Étude qualitative*

   2.1. Démontrer que N est strictement croissante sur I.

   2.2. En déduire que N admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

   2.3. Démontrer que $\ell = K$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

3. *Détermination d'une expression de N*

   On pose, pour $t \in I$, $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

   3.1. Démontrer que g est solution sur I de l'équation différentielle (E') : $y' = -ry + \dfrac{r}{K}$.

   3.2. Résoudre l'équation différentielle (E'), puis déterminer une expression de N sur I.

   3.3. Retrouver la limite de N en $+\infty$.

4.1.2 Deuxième composition

ministère
Éducation
nationale

GBE MAT 2

SESSION 2014

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Problème 1 : matrices d'ordre fini.

Notations et définitions.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$) l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}$ (respectivement à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{Z}$).
La matrice identité de taille n est notée I_n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $Sp(A)$.
On dit que A est **d'ordre fini** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = I_n$.
Si A est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif k tel que $A^k = I_n$ est appelé **ordre** de A et noté $o(A)$.

Partie A : préliminaires

1. Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.
   1.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
      i. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
      ii. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   1.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
   Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'ordre fini. On pose $o(B) = b$.
   2.1. Démontrer que B est inversible.
   2.2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $B^k = I_n$ si et seulement si b divise k.
   2.3. Démontrer que les valeurs propres de B sont des racines b-ièmes de l'unité.
   2.4. Démontrer que B est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
   On suppose que C est diagonalisable et que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i est une racine n_i-ième de l'unité pour un certain entier n_i.
   Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note k_i le plus petit entier strictement positif tel que $\lambda_i^{k_i} = 1$.
   3.1. Démontrer que C est d'ordre fini et que son ordre divise le PPCM de $k_1, \ldots, k_n$.
   3.2. Démontrer que $o(C)$ est le PPCM de $k_1, \ldots, k_n$.

Partie B : matrices d'ordre fini à coefficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de déterminer le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles, alors $Sp(A) \subseteq \{-1, 1\}$.
2. On suppose que 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
   2.1. Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   2.2. On pose $B = P^{-1}AP$. Démontrer que B est d'ordre fini.
   2.3. Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4. En déduire que $A = I_3$.

3. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

4. On suppose que -1 est valeur propre simple de A et que 1 est valeur propre double de A.

4.1. Justifier qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. On pose $C = Q^{-1}AQ$.
Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.

4.3. Donner une expression de γ_k pour tout $k \geq 0$.

4.4. En déduire que $c = 0$.

4.5. En déduire que C et A sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

5. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est valeur propre double de A et 1 est valeur propre simple de A.

6. On suppose que A admet dans $\mathbb{C}$ au moins une valeur propre non réelle.

6.1. Démontrer qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q} \setminus \pi\mathbb{Z}$, tel que $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.
On pourra considérer le polynôme caractéristique de A.

6.2. Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est d'ordre fini si, et seulement si, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ tel que $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.

Partie C : matrices d'ordre fini à coefficients entiers

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, d'ordre fini. D'après la partie B, son spectre dans $\mathbb{C}$ est de la forme $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$, où $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

1. Démontrer que $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$.
On pourra considérer la trace de A.

2. Donner les valeurs possibles pour θ.

3. Donner les différents spectres dans $\mathbb{C}$ possibles pour A puis démontrer que $o(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

4. On cherche maintenant à construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ de chaque ordre.

4.1. Donner des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 1 et 2.

4.2. i. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le polynôme caractéristique de : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$.

ii. Construire une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ dont les valeurs propres sont 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
Démontrer que cette matrice est d'ordre 3.

iii. Construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 4 et d'ordre 6.

Problème 2 : décimales des nombres rationnels

Notations et définitions

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ désignent respectivement l'ensemble des nombres entiers naturels, celui des nombres entiers relatifs, celui des nombres décimaux et celui des nombres rationnels.
Un nombre réel x est dit *décimal* s'il existe un entier n tel que $10^n x \in \mathbb{Z}$.

On dit qu'une suite d'entiers naturels $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale si, pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq d_n \leq 9$, le premier terme d_0 étant un entier naturel quelconque.
Une suite décimale est dite *finie* si tous ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.
Elle est dite :
– *impropre* si tous ses termes sont égaux à 9 à partir d'un certain rang ;
– *propre* dans le cas contraire du précédent.
On définit pour tout réel x la partie entière de x, notée $E(x)$, par la condition : $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Le but de ce problème est de démontrer quelques propriétés des nombres décimaux, puis d'étudier les décimales des nombres rationnels non décimaux.

Partie A : nombres décimaux

1. Démontrer que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et que ces inclusions sont strictes.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ est stable pour l'addition et la multiplication.
3. Soit x un nombre rationnel positif. On pose $x = \dfrac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels premiers entre eux et $b \neq 0$.
   3.1. On suppose qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, tels que $b = 2^\alpha \times 5^\beta$. Démontrer que x est décimal.
   3.2. On suppose que x est un décimal non entier.
   Démontrer que si p est un diviseur premier de b, alors $p \in \{2, 5\}$.
   3.3. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante sur b pour que le rationnel x soit un nombre décimal.
4. On considère une suite décimale $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   4.1. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ est convergente. On note x sa limite.
   4.2. Démontrer que dans les deux cas suivants x est un nombre décimal :
   – la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est finie ;
   – la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est impropre.
   4.3. Démontrer que pour tout entier $N \geq 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leq \frac{1 + d_N}{10^N}$, avec égalité si et seulement si, pour tout $k \geq N+1, d_k = 9$.
   4.4. En déduire que si x est un réel vérifiant $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ et si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale propre, alors la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette égalité est unique.

Si $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$, avec $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décimale propre, on note alors $x = d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$ et on dit que, pour tout $n \geq 1$, d_n est la n-ième décimale du réel x.

5. Démontrer que pour tout nombre décimal positif x, il existe une unique suite décimale finie $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$.

Parte B : périodicité des décimales d'un rationnel positif non décimal

Soit x un nombre rationnel positif **non décimal**. On pose $x = \dfrac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels premiers entre eux.
On définit par récurrence deux suites d'entiers naturels $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :
- d_0 et r_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b ;
- pour tout $n \geq 0$, d_{n+1} et r_{n+1} sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10\,r_n$ par b.

1. Soit N un entier tel que $N \geq 1$.
   1.1. Écrire un algorithme permettant d'afficher les entiers d_n et r_n de $n = 0$ jusqu'au rang N.
   On suppose disposer d'une instruction calculant la partie entière $E(y)$ d'un réel y.
   1.2. Donner pour le rationnel $x = \dfrac{5}{13}$ les valeurs de d_n et r_n jusqu'au rang $N = 7$.
2. 2.1. Démontrer par récurrence que pour tout entier n : $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n\,b}$.
   2.2. En déduire que, pour tout entier n, r_n est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b.
   2.3. Démontrer que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$ et que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale propre.
3. Dans cette question, on va établir que les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont périodiques à partir d'un certain rang.
   3.1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $r_n \neq 0$.
   3.2. Démontrer que les nombres $r_0, r_1, ..., r_{b-1}$ ne peuvent pas être deux à deux distincts.
   3.3. Soit q le plus petit indice d'un reste figurant au moins deux fois dans la liste de la question précédente et q' l'indice du premier autre reste qui lui est égal.
   On pose $p = q' - q$, de sorte que $0 \leq q < q + p \leq b - 1$ et $r_q = r_{q+p}$.
   Démontrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir du rang q et que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir du rang $q + 1$.

   Dans la suite, on dit que q est la pré-période du rationnel x et p sa période.
   On note alors $x = d_0, d_1, ...d_q\,[d_{q+1}...d_{q+p}]$ si $q \geq 1$ et $x = d_0, [d_1...d_p]$ si $q = 0$.
4. On conserve dans cette question les notations précédentes.
   4.1. i. Démontrer que parmi les nombres $10^0, 10^1, ..., 10^{b-1}$, au moins deux d'entre eux sont congrus modulo b.
   ii. Démontrer que :
   - q est le plus petit exposant d'un nombre de la liste précédente qui est congru modulo b à un autre nombre de cette liste ;
   - $q + p$ est l'exposant du premier nombre de cette liste congru à 10^q modulo b et distinct de 10^q.

   4.2. Démontrer que le rationnel $x = \dfrac{a}{b}$ a la même période et la même pré-période que $\dfrac{1}{b}$.

   Dans la suite, lorsque la fraction $\dfrac{1}{b}$ est non décimale, q et p seront nommés « la pré-période et la période de l'entier b ».
5. Déterminer la pré-période et la période des entiers suivants : $7; 12; 112$.

Partie C : détermination de la pré-période

On considère un entier b supérieur ou égal à 2 tel que la fraction $\dfrac{1}{b}$ soit non décimale et on note $\omega(b)$ sa pré-période et $\pi(b)$ sa période.

1. Dans cette question, on suppose que b est premier avec 10.
   1.1. Démontrer l'équivalence : $10^q \equiv 10^{q+p}$ modulo $b \Leftrightarrow 10^p \equiv 1$ modulo b.
   1.2. En déduire que $\omega(b) = 0$.
2. Dans cette question, on pose $b = 2^j \times 5^k \times c$, où c est un entier premier avec 10.
   Démontrer que $\pi(b) = \pi(c)$ et que $\omega(b) = \max(j, k)$.
   On pourra montrer que :
   $10^q\left(10^p - 1\right)$ *multiple de* $b \Leftrightarrow 10^q$ *multiple de* $2^j \times 5^k$ *et* $10^p - 1$ *multiple de* c.
3. Application : déterminer la période et la pré-période des nombres 150 et 1120.

Partie D : détermination de la période

Dans cette partie, on se propose de déterminer la période des entiers supérieurs ou égaux à 2, qui sont premiers avec 10, en fonction de leur décomposition en facteurs premiers. Si b est un tel entier, d'après la partie C, sa période $\pi(b)$ est le plus petit entier n non nul tel que $10^n \equiv 1$ modulo b.

1. Dans cette question, b est un nombre premier distinct de 2 et 5.
   1.1. On note $\overline{a}$ la classe d'un entier a dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ l'ensemble $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ privé de $\overline{0}$.
   Démontrer que l'application $f : \begin{cases} (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \to & (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \\ \overline{a} \mapsto & \overline{10} \times \overline{a} \end{cases}$ est bien définie et injective.
   1.2. En utilisant la question précédente, démontrer que : $10^{b-1} \equiv 1$ modulo b.
   1.3. Démontrer que si r est le reste de la division euclidienne d'un entier n par un entier m, alors $10^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $10^n - 1$ par $10^m - 1$.
   On pourra utiliser une forme factorisée de $x^n - 1$, où x désigne un réel quelconque.
   1.4. Déduire des résultats précédents que :
   – si un entier k vérifie $10^k \equiv 1$ modulo b, alors $\pi(b)$ divise k ;
   – $\pi(b)$ divise $b - 1$.
2. Dans cette question, b et c sont deux entiers premiers avec 10 et premiers entre eux.
   2.1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que $10^n \equiv 1$ modulo bc si et seulement si n est un multiple de $\pi(b)$ et de $\pi(c)$.
   2.2. En déduire que $\pi(bc) = \operatorname{ppcm}(\pi(b), \pi(c))$.
3. Dans cette question, b est un entier de la forme p^n, où p est un nombre premier distinct de 2 et 5, et n un entier naturel non nul. On pose $\pi(p) = \ell$.
   3.1. Justifier l'existence de deux entiers q et r tels que $r \geq 1$ et $10^\ell - 1 = p^r \times q$.
   3.2. *Premier cas* : $n \leq r$. Démontrer que $\pi\left(p^n\right) = \ell$.
   3.3. *Deuxième cas* : $n > r$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, il existe un entier naturel Q premier avec p tel que $10^{\ell \times p^k} - 1 = p^{r+k} \times Q$ et que $\pi\left(p^{r+k}\right) = \ell \times p^k$.
   En déduire que $\pi(p^n) = \ell \times p^{n-r}$.
4. *Applications*
   4.1. Déterminer la période des entiers $3, 3^2, 3^3, 3^4, 7, 7^2$ et 7^3.
   4.2. En déduire la période de l'entier 27783.

4.2 Sujets de l'épreuve de leçon

L'ensemble de l'épreuve s'inscrit dans le cadre des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de technicien supérieur. La capacité du candidat à illustrer le sujet par des exemples est valorisée.

1. Résolution de problèmes à l'aide de graphes.
2. Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle.
3. Variables aléatoires discrètes.
4. Loi binomiale.
5. Loi de Poisson, loi normale.
6. Variables aléatoires réelles à densité.
7. Lois uniformes, lois exponentielles.
8. Lois normales.
9. Marches aléatoires.
10. Séries statistiques à une variable.
11. Séries statistiques à deux variables numériques.
12. Intervalles de fluctuation.
13. Estimation.
14. Multiples, diviseurs, division euclidienne.
15. PGCD, égalité de Bézout.
16. Nombres premiers, décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
17. Congruences dans Z.
18. Équations du second degré à coefficients réels ou complexes.
19. Module et argument d'un nombre complexe.
20. Exemples d'utilisation des nombres complexes.
21. Calcul vectoriel.
22. Exemples d'utilisation d'un repère.
23. Résolution de problèmes à l'aide de matrices.
24. Proportionnalité et linéarité.
25. Pourcentages.
26. Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations.
27. Droites du plan.
28. Droites et plans de l'espace.
29. Droites remarquables du triangle.
30. Le cercle.
31. Solides de l'espace.
32. Produit scalaire.
33. Théorème de Thalès.
34. Trigonométrie.
35. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle.
36. Problèmes de constructions géométriques.
37. Problèmes de lieux géométriques.
38. Orthogonalité.
39. Suites monotones.
40. Limites de suites réelles.
41. Suites arithmétiques, suites géométriques.
42. Suites de terme général a^n, n^p et $\ln n$ ($a \in \mathrm{R}^{+*}$; $p \in \mathrm{N}$; $n \in \mathrm{N}^*$).
43. Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence.
44. Problèmes conduisant à l'étude de suites.
45. Limite d'une fonction réelle d'une variable réelle.
46. Théorème des valeurs intermédiaires.
47. Dérivation.

48. Fonctions polynômes du second degré.
49. Fonctions exponentielles.
50. Fonctions logarithmes.
51. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^a$, $x \mapsto \ln x$.
52. Courbes planes définies par des équations paramétriques.
53. Intégrales, primitives.
54. Techniques de calcul d'intégrales.
55. Équations différentielles.
56. Problèmes conduisant à la résolution d'équations différentielles.
57. Problèmes conduisant à l'étude de fonctions.
58. Développements limités.
59. Séries numériques.
60. Séries de Fourier.
61. Transformation de Laplace.
62. Courbes de Bézier.
63. Exemples d'études de courbes.
64. Aires.
65. Exemples d'algorithmes.
66. Exemples d'utilisation d'un tableur.
67. Exemples d'utilisation d'un logiciel de calcul formel.
68. Différents types de raisonnement en mathématiques.
69. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.

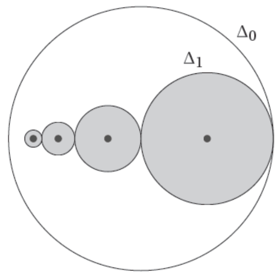
4.3 Énoncés de l'épreuve sur dossier

4.3.1 Exercice

Thème : problèmes conduisant à l'étude de suites

L'exercice

On construit une suite de disques tangents $(\Delta_n)_{n \geq 0}$ comme sur la figure ci-contre. Deux disques consécutifs sont tangents et les centres de tous les disques sont alignés.
Le rayon de Δ_0 est R, celui de Δ_{n+1} est la moitié de celui de Δ_n. Montrer que tous les disques Δ_n sont situés à l'intérieur du disque Δ_0.



Les réponses de deux élèves

Élève 1

Sur le tableur, j'ai calculé les rayons des disques et la somme pour $R = 1$ et $R = 2$.

Disque	*Rayon*	*Total*		*Disque*	*Rayon*	*Total*
1	1	1		1	2	2
2	0,5	1,5		2	1	3
3	0,25	1,75		3	0,5	3,5
4	0,125	1,875		4	0,25	3,75
5	0,0625	1,9375		5	0,125	3,875
6	0,03125	1,96875		6	0,0625	3,9375
7	0,015625	1,984375		7	0,03125	3,96875
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
20	$1,91E-06$	1,999998		20	$3,81E-06$	3,999996
21	$9,54E-07$	1,999999		21	$1,91E-06$	3,999998
22	$4,77E-07$	2		22	$9,54E-07$	3,999999
23	$2,38E-07$	2		23	$4,77E-07$	4
24	$1,19E-07$	2		24	$2,38E-07$	4
25	$5,96E-08$	2		25	$1,19E-07$	4
26	$2,98E-08$	2		26	$5,96E-08$	4

On voit donc que la somme ne dépasse pas deux fois le rayon, donc les disques sont intérieurs à Δ_0.

Élève 2

Le rayon du 2^e disque est $\frac{R}{2}$, celui du 3^e disque est $\frac{R}{4}$..., celui du n^e disque est $\frac{R}{2^n}$.
Mais je ne sais pas calculer $R + \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \ldots + \frac{R}{2^n}$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences qu'il a acquises.

2- Proposez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème des *suites* dont l'un au moins fera appel à une modélisation.

Thème : probabilités

L'exercice

Dans une fête foraine, un jeu de hasard est proposé aux visiteurs.
Pour chaque partie, la participation est de 5 euros.
Une partie consiste à lancer un dé à six faces, numérotées de 1 à 6. Pour un résultat supérieur ou égal à 5, le joueur reçoit 15 euros, sinon il ne reçoit rien.

1. L'organisateur espère qu'il y aura au moins 1000 parties de jouées. Peut-on penser qu'il gagnera de l'argent ?
2. À la fin de la journée, l'organisateur fait ses comptes : il constate que 2000 parties ont été jouées et il a amassé 2650 euros de gain.
   a) Combien de parties ont-elles été gagnées par les joueurs ?
   b) Peut-on considérer que le dé est équilibré ?

Les réponses proposées par trois élèves de Première S à la question 1

Élève 1

Je suppose qu'il y a exactement 1000 parties jouées, et je nomme X le nombre de parties gagnées par les joueurs.
X suit la loi binomiale $B\left(1000, \frac{1}{3}\right)$. D'après la calculatrice, $P(X \leqslant 500) \approx 1$
On est à peu près sûr que plus de la moitié des parties seront perdues par les joueurs. L'organisateur devrait donc gagner de l'argent.

Élève 2

Avec un tableur, j'ai réalisé une simulation de 1000 *parties. J'ai obtenu* 345 *parties gagnées.*
$\dfrac{345 \times 10 - 655 \times 5}{1000} = 0,175.$
En moyenne, je trouve un gain de 0,17 *euro par partie pour le joueur.*
L'organisateur ne va donc pas gagner d'argent.

Élève 3

Je suppose qu'il y a exactement 1000 *parties jouées. La probabilité de gagner est de* $\frac{1}{3}$.
On a donc environ $\frac{1}{3} \times 1000$ *parties de gagnées.*
L'organisateur devrait gagner : $1000 \times 5 - \frac{1}{3} \times 1000 \times 15 = 0.$

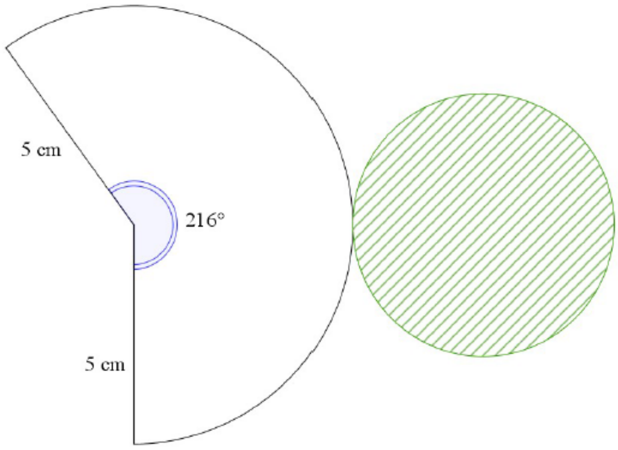
Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs compétences dans le domaine des probabilités.
2- Proposez une correction de la deuxième question telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.
3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *probabilités*, dont l'un au moins s'appuiera sur une simulation.

Thème : volumes

L'exercice

Un cône de révolution a pour patron la figure ci-contre.



Déterminer le volume de ce cône.

Les réponses de deux élèves de seconde

Élève 1

La base a comme aire $15\pi\ cm^2$. *Je le trouve par proportionnalité :*

angle	*360*	*216*
aire	25π	15π

J'utilise un triangle rectangle et Pythagore pour trouver la hauteur du cône.
$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 5^2 - \left(\sqrt{15}\right)^2 = 10$, *donc* $AB = \sqrt{10}$ *cm.*
Le volume du cône est $\dfrac{b \times h}{3} = \dfrac{15\pi \times \sqrt{10}}{3} = 5\pi\sqrt{10} \approx 49,7\ cm^3$.

Élève 2

angle	*360*	*216*
longueur	*5*	*3*

Le rayon du cercle de base est 3 *cm.*

Le volume du cône est $\dfrac{b \times h}{3}$.
Ici $B = 2 \times 3 \times \pi = 6\pi\ cm^2$ *et* $h = 5$, *donc le volume est* $\dfrac{b \times h}{3} = \dfrac{6\pi \times 5}{3} = 10\pi\ cm^3$.

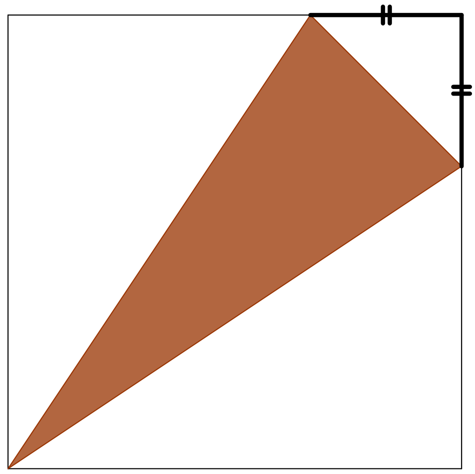
Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions des élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs.
2- Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
3- Proposez au moins deux exercices sur le thème *aires et volumes* concernant des niveaux de classe différents.

Thème : fonctions

L'exercice du professeur

On dispose d'un terrain carré de 20 mètres par 20 mètres. On veut installer un parterre de fleurs, représenté sur le schéma ci-dessous par la zone grisée.



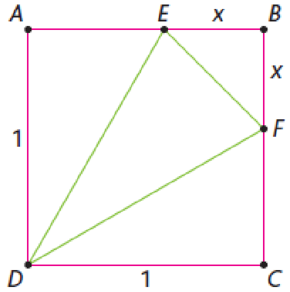
Peut-on construire un parterre de fleurs qui occupe une surface de 150 m^2 ? De 128 m^2 ? De 100 m^2 ?

Un extrait du manuel Hachette Déclic seconde

54 Variations de l'aire d'un triangle

ABCD est un carré de côté 1.
On place les points *E* et *F* respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ tels que $EB = BF = x$.

On étudie les variations de l'aire du triangle *EFD* en fonction de *x*.



1. À quel intervalle x appartient-il ?

2. Exprimer en fonction de x les aires des triangles *EBF*, *FCD* et *AED*.

3. Montrer que l'aire du triangle *EFD* en fonction de x est : $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x$.

4. a. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b. En déduire l'écriture de $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-\alpha)^2 + \beta.$$

5. Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Comparez les deux versions de l'exercice en indiquant quelles aptitudes elles permettent de développer chez les élèves.

2- Proposez une correction de l'exercice du professeur telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *fonctions*.

Thème : arithmétique

L'exercice

Pour coder un message à l'aide d'un chiffrement affine, on commence par remplacer chaque lettre de l'alphabet par un nombre entier de 0 à 25, selon le tableau ci-dessous. Les autres signes du texte sont ignorés.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	...	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	23	24	25

Puis on utilise une fonction affine de chiffrement $f(x) = ax + b$, avec (a, b) un couple d'entiers compris entre 0 et 25.
Enfin, on prend le reste de la division par 26 de $f(x)$ pour obtenir le codage voulu. Pour que $f(x)$ soit une fonction de chiffrement, il faut que les transformations de deux lettres distinctes donnent deux lettres distinctes.

1. Les fonctions affines suivantes peuvent-elles être utilisées comme fonctions de chiffrement ?
   $f : x \longmapsto 13x + 3$ $\qquad$ $g : x \longmapsto 3x + 7$
2. On souhaite choisir comme fonction affine de chiffrement une fonction qui permet de coder C en M et K en A. Montrer que la fonction $h : x \longmapsto 5x + 2$ convient et coder « ALLO » à l'aide de cette fonction.
3. On appelle fonction de décodage de la fonction h, la fonction de chiffrement $k : x \longmapsto ax + b$ telle que $k[h(x)] \equiv x\,[26]$, pour tout nombre entier x.
   a) Montrer que $5a \equiv 1\,[26]$ si et seulement si $a \equiv 21\,[26]$
   b) En déduire une fonction de décodage de la fonction h.

La réponse d'un élève

1. *J'ai prolongé le tableau fourni dans une feuille de calcul tableur pour représenter les fonctions f et g et j'ai constaté que g était un code mais pas f.*
2. *C a pour valeur* 2, $f(2) = 12$ *qui est bien la valeur de M. K a pour valeur* 10, $f(10) = 52$ *qui est un multiple de* 26, *donc donne bien A. « ALLO » est codé « CFFU »*
3. *a)* $5 \times 21 = 105 = 4 \times 26 + 1$
   b) je cherche la fonction l de la forme $l(x) = 21x + b$ *qui permet de transformer M en C et A en K, puisqu'il me reste une inconnue, je prends A car sa valeur vaut* 0, *et* $l(0) = b = 10$. *Je vérifie que ça marche aussi sur M :* $l(12) = 262$ *qui est congru à* 2 *modulo* 26.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de l'élève en mettant en évidence ses réussites et les progrès qu'il doit réaliser.

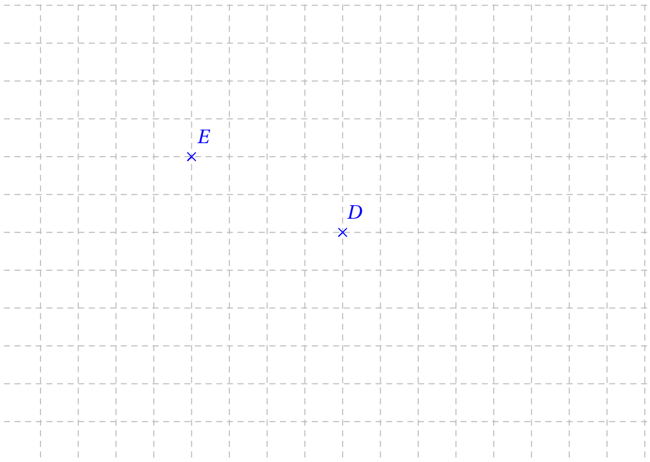
2- Proposez une correction de la question 3 telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale S spécialité mathématiques.

3- Présentez deux ou trois exercices d'arithmétique au lycée, dont l'un au moins fait appel à des congruences.

Thème : géométrie plane

L'exercice du professeur

Un explorateur en plein désert veut atteindre une oasis.
Il dispose d'une carte où les lieux remarquables ont été repérés par des lettres. L'oasis se trouve au point H.
Malheureusement, les points A, B, C, F, G et H ont été effacés, et seuls les points D et E sont encore visibles.



Heureusement, l'explorateur se souvient que le point G est situé au milieu des segments $[EF]$ et $[DA]$, que E est le milieu de $[AC]$, B celui de $[CF]$, et D celui de $[BH]$.
Peut-il retrouver l'oasis ?

D'après une épreuve du rallye de mathématiques Champagne Ardennes Niger (2009)

Les réponses de deux élèves

Élève 1

Puisque G milieu de $[EF]$ et de $[DA]$, E, F, D et A sont sur un même cercle de centre G. J'ai placé la pointe du compas pour avoir un cercle qui passe par E et D, j'ai donc trouvé G. J'ai placé les autres points et j'ai trouvé H.

Élève 2

Puisque G est le milieu de $[EF]$ et de $[DA]$ alors $EDFA$ est un parallélogramme car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. J'ai placé F au hasard, puis j'ai placé G milieu de $[EF]$.
Comme G est le milieu de $[DA]$, j'ai tracé le symétrique de D par rapport à G pour en déduire le point A. J'ai ensuite placé C de la même façon.
J'ai remarqué que $ECDF$ est un parallélogramme car tous ses côtés opposés sont parallèles.
J'ai donc placé B au milieu de $[ED]$ et j'ai trouvé H.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les réponses des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs.

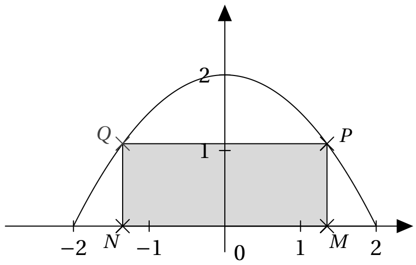
2- Proposez une correction de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de collège.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*, dont un problème de construction.

Thème : problème d'optimisation

L'exercice

La parabole d'équation $y = -0,5x^2 + 2$ a été représentée ci-contre.
Pour tout $x \in [0,2]$, on construit à partir du point $M(x,0)$, les points P, Q et N, avec P et Q sur la parabole et $MNQP$ rectangle.
Existe-t-il un rectangle d'aire maximale ?
Si oui, est-il unique ?

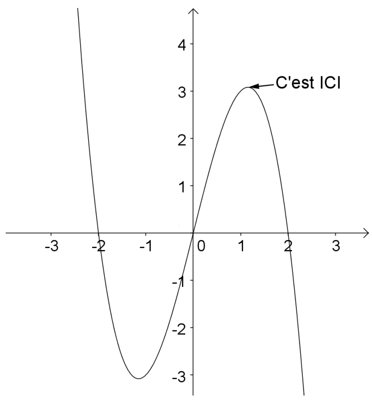


Source : d'après MATHS Analyse 1ère S, collection TERRACHER

Les solutions de deux élèves de première S

Élève 1

$y = MN = -0,5x^2 + 2$
$A = 2x \times y$
$A = 2x(-0,5x^2 + 2)$
$A = -x^3 + 4x$



Élève 2

Je pense que le rectangle est un carré car on a fait un exercice disant que le rectangle qui a la plus grande aire est un carré.

$x = -0,5x^2 + 2$
$-0,5x^2 + 2 - x = 0,$
$\triangle = 5$, *il y a deux solutions dans* $\mathbb{R}$: $x_1 = 1,236$ *et* $x_2 = -3,236$.

Mais $x \in [0;2]$ *donc* $x = 1,236$, $f(x) = 1,236$.
On vérifie avec la calculatrice : $f(1,2) = 1,28$ *et* $f(1,3) = 1,155$. *On dirait que c'est faux.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les démarches des élèves en mettant en avant les compétences mathématiques acquises.
2- Exposez une correction de cet exercice, prenant en compte les productions des élèves, devant une classe de première.
3- Présentez deux ou trois *problèmes d'optimisation* dont l'un au moins se situe au niveau de la classe de seconde.

Thème : suites

L'exercice

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n

1. Écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang n .
2. Quelles conjectures peut-on émettre concernant le sens de variation et la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, v_n est bien défini et $0 < v_n < 3$.
4. Étudier le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que peut-on en conclure ?
5. Après avoir justifié que la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$ est arithmétique, déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les réponses proposées par deux élèves de terminale S à la question 1

Élève 1

```
début
|  Entrées : n
|  1 → v ;
|  1 → i ;
|  tant que i ⩽ n faire
|  |  9 ÷ (6 − v) → v ;
|  fin
|  Sorties : Afficher v.
fin
```

Élève 2

```
début
|  Entrées : n
|  1 → i ;
|  pour i = 1 à n faire
|  |  1 → v ;
|  |  9 ÷ (6 − v) → v ;
|  fin
|  Sorties : Afficher v.
fin
```

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la réponse des deux élèves. Vous mettrez en évidence leurs compétences dans le domaine de l'algorithmique et proposerez le cas échéant les modifications nécessaires.

2- Proposez une correction des questions 3 et 5 telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème des *suites*, dont l'un au moins comprendra la mise en œuvre d'un algorithme.

Thème : probabilités

L'exercice

Amédée propose à Célestin de jouer aux dés. Il sort trois dés d'une boîte : un rouge, un vert et un bleu.
Célestin s'étonne : « Tes dés sont étranges ! Le rouge a deux 3, deux 4 et deux 8 ! ».
Amédée répond : « Oui, ils sont tous spéciaux : le vert a deux 1, deux 5 et deux 12, et quant au bleu, il a deux 2, deux 6 et deux 7. Je te propose de jouer avec : on choisit chacun un dé, on le lance et celui qui fait le plus grand résultat a gagné. Pour te prouver que ce n'est pas truqué, je te laisse choisir ton dé en premier. »
Que pensez-vous de la proposition d'Amédée ?

Les réponses proposées par deux élèves de seconde

Élève 1

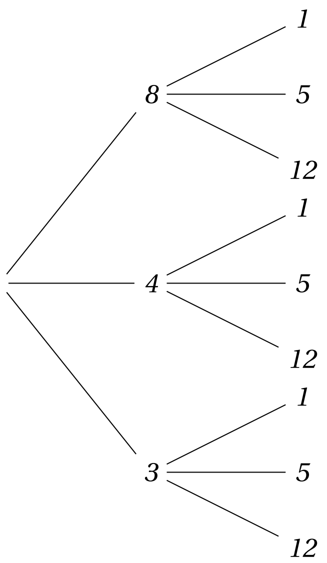
Pour savoir quel est le meilleur dé, je calcule le résultat moyen :

Dé rouge : $\dfrac{2\times3+2\times4+2\times8}{6}=5$ *Dé vert :* $\dfrac{2\times1+2\times5+2\times12}{6}=6$ *Dé bleu :* $\dfrac{2\times2+2\times6+2\times7}{6}=5$

On peut jouer en choisissant le dé vert.

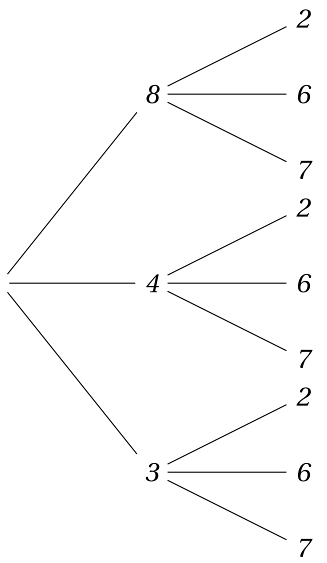
Élève 2

Dé rouge contre dé vert



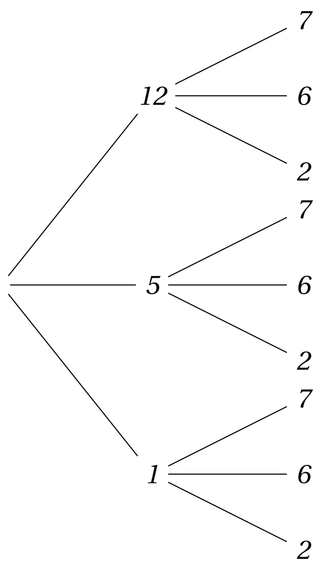
Le dé rouge gagne 4 fois sur 9

Dé rouge contre dé bleu



Le dé rouge gagne 4 fois sur 9.

Dé vert contre dé bleu



Le dé vert gagne 4 fois sur 9

Conclusion : c'est le dé bleu qui est le meilleur, puisqu'il gagne 5 fois sur 9 contre le dé rouge et le dé vert.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs compétences dans le domaine des probabilités.

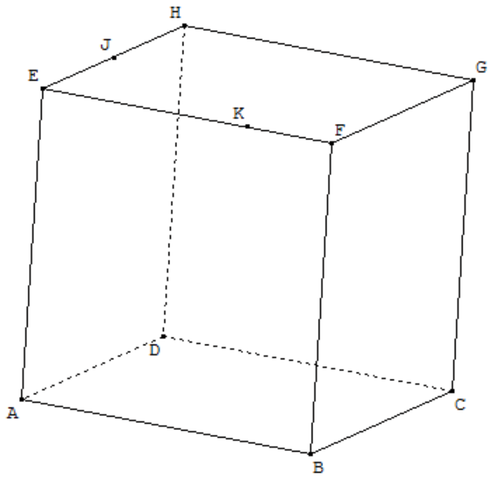
2- Proposez une correction de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de seconde.

3- Présentez trois exercices sur le thème *probabilités* à des niveaux de classe différents.

Thème : calcul de longueurs

L'exercice du professeur

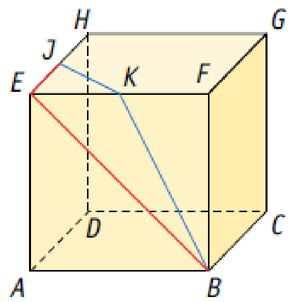
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a obtenu la représentation d'un cube d'arête 5 cm.
Le point J est le milieu de l'arête $[EH]$ et le point K est un point quelconque de l'arête $[EF]$.
On cherche le trajet le plus court entre J et B qui passe par l'arête $[EF]$.



1. a) Reproduire la figure grâce au logiciel.
   b) Construire les segments $[JK]$ et $[KB]$. Afficher la longueur $JK + KB$.
   c) En faisant bouger le point K, trouver la position de K qui rende le trajet total JKB le plus court possible.
2. a) Créer un patron du cube.
   b) Où faut-il placer K pour que le trajet soit le plus court possible ?
   c) Calculer la longueur exacte de ce trajet.

Un extrait du manuel Hachette phare quatrième

52 Géométrie dans l'espace
Le cube ci-contre a pour arête 6 cm.
Le point J est le milieu de l'arête $[EH]$. Le point K est le milieu de l'arête $[EF]$.
1) a) Calculer la longueur $BE + EJ$, arrondie au millimètre près.
b) Calculer la longueur $BK + KJ$, arrondie au millimètre près.
c) Comparer la longueur du trajet rouge et la longueur du trajet bleu.
2) a) Dessiner un patron de ce cube tel que la face $ABFE$ et la face $EFGH$ aient une arête commune.
Sur ce patron, tracer en vert le trajet le plus court entre les points B et J.
b) Calculer la longueur du trajet vert, arrondie au millimètre près.



N.B. dans l'exercice du manuel, le trajet rouge est le trajet JEB et le trajet bleu est le trajet JKB

Le travail à exposer devant le jury

1- Comparez les deux versions de l'exercice en précisant les compétences qu'elles permettent de développer chez les élèves.

2- Proposez une correction des questions 2.b) et 2.c) de l'exercice du professeur, telle que vous l'exposeriez devant une classe de quatrième.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *calcul de longueur* dont l'un au moins pourra conduire à utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

Thème : optimisation

L'exercice

On veut construire un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = AC = 10$.
Quelle est l'aire maximale d'un tel triangle ?

Les démarches de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

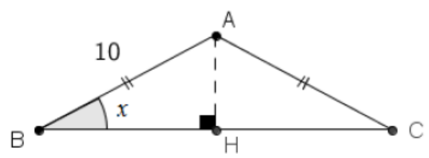
Avec un logiciel de géométrie, je crée un segment $[AB]$ *de longueur* 10.
Je place C *sur le cercle de centre* A *passant par* B.
En déplaçant C *sur ce cercle, je vois que l'aire maximale du triangle* ABC *est* 50.

Élève 2

Je nomme x *la mesure de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ *avec* $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Je calcule AH *et* BH *et l'aire vaut* $100\sin(x)\cos(x)$. *En dérivant, je trouve* $100\cos^2(x) - 100\sin^2(x)$.

Avec le tableur de ma calculatrice, je lis que la dérivée s'annule pour $x = 0,8$ *environ. Ce qui donne une aire maximale de* $49,98$ *environ.*



Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses compétences et celles qu'il conviendrait de développer.

2- Exposez une correction de cet exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation* dont l'un au moins peut amener à utiliser un logiciel.

Thème : problèmes conduisant à une résolution d'équation

L'exercice

Dans un récipient cylindrique de rayon 10 cm et de hauteur 30 cm, on place une bille de rayon 4 cm.
On verse de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille (la surface de l'eau est alors tangente à la bille qui se trouve au fond du récipient). On retire ensuite la bille, et on la remplace par une autre bille de rayon R différent de 4 cm.
La question que l'on se pose est la suivante :
Est-il possible que l'eau recouvre exactement la nouvelle bille ?

On pourra montrer que le problème se ramène à la résolution de l'équation (E) : $x^3 - 150x + 536 = 0$

D'après Déclic TS collection HACHETTE

Les réponses de deux élèves de terminale S pour la résolution de l'équation

Élève 1

(E) est définie et continue sur $[7{,}07\,;\,10]$.
(E) est strictement croissante sur $[7{,}07\,;\,10]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, (E) admet une unique solution sur $[7{,}07\,;\,10]$.
À la calculatrice, j'obtiens : $9{,}7 \leq R \leq 9{,}8$.
Conclusion : il y a bien une autre bille dont le rayon est environ 9,8 *cm.*

Élève 2

J'ai essayé de factoriser et avec ma calculatrice, j'ai obtenu

$$x^3 - 150x + 536 = (x-4)(x^2 + 4x - 134)$$

Maintenant je calcule $\Delta = 552$. *Il y a donc deux autres solutions qui sont environ* 9,8 *cm et une autre négative qui ne compte pas car une longueur est toujours positive.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises par chacun d'eux.

2- Proposez une correction de la modélisation permettant d'obtenir l'équation proposée telle que vous l'exposeriez devant une classe.

3- Présentez deux ou trois *problèmes conduisant à une résolution d'équation.*

Thème : fluctuation d'échantillonnage

L'exercice

Le pôle recherche d'une entreprise a recruté ces trois dernières années soixante-quinze personnes. Vingt d'entre elles sont des femmes. Sachant que dans le secteur concerné 37 % des diplômés sont des femmes, un responsable syndical souligne la sous-représentation des femmes au sein du pôle recherche.
Quels arguments mathématiques peuvent appuyer ou bien remettre en cause son affirmation ?

Les réponses proposées par deux élèves de seconde

Élève 1

La proportion de femmes recrutées dans le pôle est de $20/75 \approx 0{,}27$*, soit* 27 %*, ce qui est nettement insuffisant par rapport aux* 37 % *de diplômés. Le syndicaliste a raison, c'est le problème dont ils ont parlé hier aux infos.*

Élève 2

Je peux appliquer les résultats sur la fluctuation avec $n = 75$ *et* $p = 0{,}37$*. D'après ma calculatrice, l'intervalle de fluctuation au seuil de* 95 % *est* $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}25\,;\,0{,}49]$.
On est dans l'intervalle, il n'y a pas de discrimination.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Commentez le travail de chacun des deux élèves, en mettant en évidence leurs acquis et leurs erreurs éventuelles.

2 – Proposez une correction de cet exercice comme vous le feriez devant une classe de première S.

3 – Présentez deux ou trois exercices sur le thème *fluctuation d'échantillonnage* dont l'un au moins fait appel à l'utilisation d'un logiciel.

Thème : matrices et suites

L'exercice

On considère une population d'êtres vivants qui ne peuvent se trouver que dans deux états désignés par A et B. À l'instant initial, 34 % des êtres vivants de cette population sont dans l'état A.
On propose le modèle d'évolution suivant : à chaque heure,

- 3 % des êtres vivants qui étaient dans l'état A passent dans l'état B,
- 3,5 % des êtres vivants qui étaient dans l'état B passent dans l'état A.

1. Avec ce modèle, y aura-t-il plus d'êtres vivants dans l'état A que dans l'état B au bout d'un jour ?
2. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un certain nombre d'heures la proportion d'êtres vivants se trouvant dans l'état A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.

Les réponses de trois élèves de terminale à la question 1

Élève 1

$u_{24} = 1{,}005^{24} \times 34 \approx 38{,}3$
Au bout de 24 *heures, cela reste inférieur à* 50 %.

Élève 2

Dans le tableur : $A1 = 34$; $B1 = 66$
$A2 = A1 - 3\,\% * A1 + 3{,}5\,\% * B1$; $B2 = 100 - A2$

En tirant, j'obtiens A25 = 49,891. *Cela ne dépassera pas* 50 % *au bout d'un jour.*

Élève 3

Posons $T = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}035 & 0{,}965 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \end{pmatrix}$
On a $A \times T^{24} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$
Il y a autant d'êtres vivants dans l'état A que dans l'état B.

Le travail à exposer devant le jury

1- Explicitez les démarches des élèves en mettant en évidence les compétences mathématiques acquises.

2- Proposez une correction la question 2 de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S, spécialité mathématiques.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *matrices et suites*.

Thème : équations différentielles

L'exercice

Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on propose plusieurs modèles. On appelle N la fonction représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en année). On sait que $N(0) = 2000$.

1. On suppose dans cette question que la fonction N est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y' = ry$$

   où r est une constante strictement positive.
   a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).
   b) Donner l'expression de la fonction N.
   c) Représenter à l'aide d'un logiciel de géométrie les fonctions N lorsque r varie dans l'intervalle $[0, 4]$.

2. On suppose dans cette question que la fonction N est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = 2y\left(1 - \frac{y}{4000}\right).$$

   On admet que N est définie et strictement positive sur $[0; +\infty[$.
   On pose, pour $t \in [0; +\infty[$, $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.
   a) Démontrer que g est solution sur I de l'équation différentielle (E') : $y' = -2y + \dfrac{1}{2000}$.
   b) Résoudre, en utilisant éventuellement un logiciel de calcul formel, l'équation différentielle (E').
   c) En déduire que sur $]0; +\infty[$:

$$N(t) = \frac{4000}{\mathrm{e}^{-2t} + 1}.$$

Un extrait des programmes de STS sur les équations différentielles (BO du 4 juillet 2013)

On s'attache à relier les exemples étudiés avec les enseignements scientifiques et technologiques, en montrant l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale.
L'utilisation des outils logiciels est sollicitée ; elle a pour finalités :
- *de mettre en évidence, expérimentalement, la signification ou l'importance de certains paramètres ou phénomènes ;*
- *de dépasser la seule détermination des solutions d'une équation différentielle en donnant la possibilité de visualiser des familles de courbes représentatives de ces solutions ;*
- *de permettre, avec l'aide du calcul formel, de donner une expression des solutions dans certains cas complexes. Si, dans ce module, on développe plus particulièrement deux types d'équations différentielles, on est également attentif à donner une vision plus large de ces notions en présentant des équations différentielles dont on ne peut donner qu'une solution approchée tout en faisant saisir des principes généraux comme la notion de famille de solutions.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez dans quelle mesure cet exercice correspond aux attentes du programme de STS.
2- Proposez une correction de la question 2 telle que vous la présenteriez devant une classe de STS.
3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *équations différentielles.*

4.3.2 Agir en fonctionnaire de l'État

Thème : accompagnement personnalisé

Exposé du cas

La principale du collège dans lequel vous enseignez réunit l'équipe pédagogique afin d'élaborer le projet d'accompagnement personnalisé pour les classes de sixième à la prochaine rentrée. Elle souhaiterait que celui-ci comporte un volet mathématique renforcé.

Question

Quelles actions l'équipe des professeurs de mathématiques peut-elle envisager pour répondre à cette demande ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : circulaire sur l'accompagnement personnalisé en classe de sixième, bulletin officiel n°31 du 1 septembre 2011 (extraits)

À leur entrée au collège, certains élèves ont encore des acquis fragiles, d'autres sont désireux d'approfondir leurs savoirs et savoir-faire. Tous ont encore besoin de dispositifs d'aide adaptés à leur profil, étroitement articulés au travail conduit à l'école, qui doivent pouvoir commencer dès leur entrée en sixième. L'accompagnement personnalisé est le cadre de mise en ?uvre de ces aides. [...]
L'accompagnement personnalisé s'adresse à tous les élèves. Il concerne en priorité les élèves qui en ont le plus besoin pour répondre à des difficultés, souvent installées de longue date et qui demandent temps et rigueur pour être combattues efficacement. Des actions d'aide méthodologique et d'approfondissement sont proposées en parallèle.
1 - Principes généraux L'accompagnement personnalisé est un temps d'enseignement intégré à l'horaire des élèves, dans lequel tous les professeurs sont invités à s'impliquer.

Document 2 : présentation des fiches pédagogiques pour l'accompagnement personnalisé en 6^e, site Eduscol.

Ces fiches pédagogiques, à destination de l'ensemble des élèves, sont structurées en trois étapes.
Les fiches débutent par une phase de "Diagnostic", qui, effectuée en classe entière, peut compléter le bilan établi au palier 2, pour déterminer avec précision les causes des difficultés des élèves.
Les activités et exercices de la phase de "Prise en charge" s'adressent à différents profils d'élèves, y compris à ceux qui n'ont pas de problème particulier mais qui doivent simplement gagner en confiance et en efficacité.
La partie finale intitulée "Prolongements" permet de favoriser l'aisance des élèves en réinvestissant les acquis de la prise en charge. Ces prolongements peuvent aussi rapidement être proposés aux élèves les plus talentueux.

Thème : évaluation

Exposé du cas

Des parents d'élèves de votre collège ont fait part au chef d'établissement de leur inquiétude devant l'angoisse exprimée par de nombreux élèves à l'occasion des évaluations en mathématiques. À la suite de ces remarques, le chef d'établissement demande à l'équipe des professeurs de mathématiques de rechercher des solutions afin de remédier à ce sentiment d'anxiété.

Question

Quelles propositions pourriez-vous faire pour répondre à cette attente ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : extrait de l'article 331-7 du code de l'éducation

La France, un système où se mêlent plaisir d'apprendre et anxiété d'être évalué.[...]
Même si prendre du plaisir à l'école n'est pas systématiquement un gage de réussite,[...] ce facteur est un élément important pour permettre aux élèves de s'épanouir, mais aussi d'avoir envie d'apprendre, et parfois compenser certaines lacunes de départ. Les différentes études PISA ont d'ailleurs montré que les élèves français prennent en général plus de plaisir que la moyenne des pays de l'OCDE dans l'apprentissage des matières.[...]
En France, les élèves restent, comme en 2003, parmi les élèves les plus anxieux des pays de l'OCDE avec ceux d'Italie, de Corée, du Japon et du Mexique. D'après les déclarations des élèves, la France présente, parmi les pays de l'OCDE, la plus large proportion d'élèves indiquant se sentir perdus quand ils essaient de résoudre un problème de mathématiques.[...] En outre, parmi les pays de l'OCDE, ils sont aussi les plus anxieux par rapport aux devoirs de mathématiques à faire à la maison. Plus d'un élève français sur deux est d'accord avec l'affirmation « Je suis très tendu quand j'ai un devoir de mathématiques à faire », contre un élève sur trois, en moyenne, dans les pays de l'OCDE.

Document 2 : introduction du programme de mathématiques du collège (BO spécial n° 6 du 28 août 2008)

L'évaluation (qui ne se réduit pas au contrôle noté) n'est pas un à côté des apprentissages. Elle doit y être intégrée et en être l'instrument de régulation, pour l'enseignant et pour l'élève. Elle permet d'établir un constat relatif aux acquis de l'élève, à ses difficultés. Dans cette optique, le travail sur les erreurs constitue souvent un moyen efficace de l'action pédagogique. L'évaluation ne doit pas se limiter à indiquer où en est l'élève ; elle doit aussi rendre compte de l'évolution de ses connaissances, en particulier de ses progrès. L'évaluation de la maîtrise d'une capacité par les élèves ne peut pas se limiter à la seule vérification de son fonctionnement dans des exercices techniques. Il faut aussi s'assurer que les élèves sont capables de la mobiliser d'eux-mêmes, en même temps que d'autres capacités, dans des situations où leur usage n'est pas explicitement sollicité dans la question posée. L'évaluation sommative, en mathématiques, est réalisée sous trois formes complémentaires :

- des interrogations écrites courtes dont le but est de vérifier qu'une notion ou une méthode sont correctement assimilées ;
- des devoirs de contrôle courts et peu nombreux qui permettent de vérifier, de façon plus synthétique, la capacité des élèves à utiliser leurs acquis, à la suite d'une phase d'apprentissage ;
- certains devoirs de contrôle peuvent être remplacés par un bilan trimestriel qui est l'occasion de faire le point sur les acquis des élèves relatifs à une longue période d'étude.

Thème : harcèlement

Exposé du cas

Vous êtes nommé(e) en collège. Lors de travaux de groupes, vous constatez que trois élèves turbulents, bien connus de l'équipe de vie scolaire, font subir des vexations à un autre élève : fouille du sac et de la trousse, traces de stylo sur le cahier, coups de coudes quand il écrit, etc. Ce n'est pas la première fois que ces faits se produisent en classe et vous avez également remarqué des agissements comparables dans les couloirs lors des interclasses.

Question

Après avoir analysé cette situation, quelle attitude pouvez-vous adopter à court et moyen terme ?

Documentation fournie avec le sujet

Document : « À l'école des enfants heureux... ou presque », Observatoire international de la violence à l'école pour l'UNICEF, mars 2011 (extraits)

[...] Nous insistons particulièrement sur la prise en compte des « microviolences » (Debarbieux, 2001 et 2006 pour le débat sur la définition de la violence) qui ne sont que très rarement pénalisées mais dont la masse peut générer des difficultés importantes pour ceux qui les subissent. Entendons-nous bien, ces faits mineurs ne sont pas, si on les examine isolément, dramatiques. On pensera bien sûr que ces petits faits n'ont guère d'importance, et que les prendre en compte comme violence est une surqualification de ces faits, qu'il s'agit là d'un « éternel enfantin » sans gravité. C'est le cas le plus souvent sans aucun doute. Ce n'est pas parce que deux enfants se battent dans une cour de récréation que ce sont des prédélinquants... et ce n'est pas pour cela qu'il faut les laisser faire. Ce n'est pas parce qu'un élève explose de colère parce qu'il est fatigué qu'il faut l'inclure dans un fichier des délinquants présents et à venir ! Mais tout change lorsqu'il y a répétition de ces petits « faits », lorsque ce sont toujours les mêmes personnes qui en sont victimes ou qui les perpétuent. Nous insistons donc sur le fait que la répétition de violences mineures est particulièrement importante. Cette répétition a des effets sociaux connus : le repli sur soi, par angoisse, par déception vis-à-vis des pouvoirs publics. [...]

Cette répétition a aussi des effets en termes de santé mentale très étudiés. Le stress causé par la victimation et le harcèlement peut être un stress cumulatif, et par là bien difficile à prendre en charge tant il s'installe profondément dans la structuration psychologique des sujets. Les tendances dépressives, voire suicidaires, se combinent avec de forts effets sur l'insuccès scolaire et le décrochage pour les élèves et cause un véritable décrochage professionnel chez les adultes (Royer, 2005). La violence se construit dans la répétition oppressive de « la loi du plus fort » (Debarbieux et alii, 2003 ; Rubi, 2005). La loi du plus fort n'a pas besoin pour s'imposer de la fiesta sanglante qui marque l'opinion. Une pression continue, une répétition tyrannique sont au moins autant efficaces pour qu'elle s'impose.[...]

Thème : liaison lycée-enseignement supérieur

Exposé du cas

Le proviseur de votre lycée dresse un bilan du parcours des anciens élèves de terminale de l'établissement qui se sont engagés l'an dernier dans une première année d'études supérieures. Il s'aperçoit que : 25% vont redoubler, 20% sont réorientés vers des filières courtes et 10% abandonnent leurs études.
En vue d'améliorer les résultats des élèves en première année d'études post-baccalauréat, le proviseur demande au conseil pédagogique, dont vous êtes membre, de réfléchir à des propositions pour renforcer la liaison entre le lycée et l'université.

Question

En tant que professeur de mathématiques, quels peuvent être vos moyens d'action et vos propositions pour répondre à cette demande ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : circulaire n°2013-0012 du 18-6-2013 sur le renforcement du continuum de formation de l'enseignement scolaire à l'enseignement supérieur (extraits)

[...] 2 - Dispositions pédagogiques permettant de renforcer le continuum de formation
2.1 Une orientation mieux construite...
2.3 Des dispositifs d'aide à la réussite
2.3.1 Les dispositifs de personnalisation de l'enseignement scolaire
Qu'il s'agisse du tutorat, de l'accompagnement personnalisé ou des passerelles, les dispositifs de personnalisation mis en œuvre dans les lycées ont pour objectif de favoriser la réussite des futurs étudiants.
L'accompagnement personnalisé poursuit plusieurs objectifs, dont la construction du projet personnel des élèves. Dans cette perspective, il permet le contact avec les établissements d'enseignement supérieur.
[...]
2.3.2 Les dispositifs d'aide dans l'enseignement supérieur.[...]
Le Plan réussite en licence s'est par ailleurs traduit par de nombreuses initiatives innovantes en matière pédagogique telles que le contrôle continu, le tutorat pédagogique ou la désignation d'enseignants-référents.

Document 2 : rapport des inspections générales : évaluation des expériences de rapprochement et d'articulation des formations de premier cycle du supérieur entre lycées et universités, juin 2013 (extrait).

[...] Ainsi, le rapport sur les assises de l'enseignement supérieur et de la recherche, remis au Président de la République le 17 décembre 2012, dont le rapporteur général était Vincent Berger, insiste sur la nécessité de rapprocher les enseignements scolaire et supérieur. Pour ce faire, celui-ci propose :

- d'assurer une continuité entre le lycée et l'enseignement supérieur, en préparant les futurs étudiants aux méthodologies de travail universitaire ;
- d'encourager au sein des équipes pédagogiques les rencontres entre professeurs du secondaire et enseignants du supérieur pour échanger sur les pratiques, la coordination des programmes, etc. ;
- d'encourager les mobilités croisées d'enseignants entre le supérieur et les lycées ;
- d'encourager les étudiants à intervenir dans les lycées pour faire part de leur expérience ;
- d'encourager les initiatives permettant aux élèves des lycées de suivre un cours ou un cycle de conférences à l'université ; [...]

Thème : relation avec les parents

Exposé du cas

À l'issue d'un conseil de classe, les parents d'un élève vous demandent un rendez-vous pour comprendre la nature des difficultés de leur enfant et la faiblesse de ses résultats.
Lors du rendez-vous, ils expliquent que celui-ci est toujours angoissé lorsqu'il y a un devoir et qu'il perd ses moyens. Ils précisent que les résultats ne reflètent pas le travail fourni par leur enfant.

Question

Comment proposez-vous d'agir face à une telle situation ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : Loi n° 2013-595 du 8 juillet 2013 d'orientation et de programmation pour la refondation de l'école de la République (extraits)

Pour garantir la réussite de tous, l'école se construit avec la participation des parents, quelle que soit leur origine sociale. Elle s'enrichit et se conforte par le dialogue et la coopération entre tous les acteurs de la communauté éducative.[...]
Les enseignants tiennent informés les parents d'élèves et les aident à suivre la scolarité de leurs enfants.[...]
La promotion de la « coéducation » est un des principaux leviers de la refondation de l'école. Elle doit trouver une expression claire dans le système éducatif et se concrétiser par une participation accrue des parents à l'action éducative dans l'intérêt de la réussite de tous les enfants.

Document 2 : Référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation, bulletin officiel n° 30 du 25 juillet 2013. (extrait)

Coopérer avec les parents d'élèves :

- œuvrer à la construction d'une relation de confiance avec les parents.
- analyser avec les parents les progrès et le parcours de leur enfant en vue d'identifier ses capacités, de repérer ses difficultés et coopérer avec eux pour aider celui-ci dans l'élaboration et la conduite de son projet personnel, voire de son projet professionnel.
- entretenir un dialogue constructif avec les représentants des parents d'élèves.

Thème : conduites à risque

Exposé du cas

En classe de seconde, quatre élèves entrent assez bruyamment en cours. Leur attitude devient rapidement inappropriée, ils n'écoutent pas, parlent fort, rient, alors que ce sont habituellement des élèves discrets. Vos remarques pour qu'ils changent de comportement sont sans effet. Leur état excessivement euphorique persiste, et vous soupçonnez la prise de stupéfiants.

Question

Quelles actions envisagez-vous à court et à moyen terme ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : extrait de la circulaire n° 2006-197 du 30-11-2006, Ministère de l'Éducation Nationale

Dans chaque établissement scolaire, le comité d'éducation à la santé et à la citoyenneté (CESC) définit un programme d'éducation à la santé, à la sexualité et de prévention des conduites à risques, notamment des conduites addictives. [...]

Le CESC, présidé par le chef d'établissement, s'inscrit dans le pilotage de l'établissement. Il comprend :

- les personnels d'éducation, sociaux et de santé de l'établissement ;
- des représentants des personnels enseignants, des parents et des élèves désignés par le chef d'établissement sur proposition des membres du conseil d'administration appartenant à leurs catégories respectives ;
- les représentants de la commune et de la collectivité de rattachement au sein de ce conseil. [...]

Par ailleurs, compte tenu de la nature des problématiques traitées, le CESC peut associer à ses travaux les partenaires susceptibles de contribuer utilement à la politique éducative et de prévention de l'établissement, en particulier le correspondant police ou gendarmerie-sécurité de l'école, dans le respect des compétences et des rôles de chacun.

Document 2 : Article L312-18 de la Loi n°2004-806 du 9 août 2004 (Code de l'éducation).

Une information est délivrée sur les conséquences de la consommation de drogues sur la santé, notamment concernant les effets neuropsychiques et comportementaux du cannabis, dans les collèges et les lycées, à raison d'au moins une séance annuelle, par groupes d'âge homogène. Ces séances pourront associer les personnels contribuant à la mission de santé scolaire ainsi que d'autres intervenants extérieurs.

Document 3 : Objectifs de la prévention des conduites addictives en milieu scolaire (site Éduscol)

La prévention des conduites addictives vise à développer chez l'élève des compétences psychosociales lui permettant de faire des choix éclairés et responsables, pour lui-même comme vis-à-vis d'autrui et de l'environnement. Elle permet de le préparer à exercer sa citoyenneté avec responsabilité. Elle vise à apporter aux élèves :

- des connaissances relatives à leur santé et leur bien-être, notamment dans le domaine des addictions ;
- des informations sur les produits (tabac, alcool, drogues illicites), leurs effets et sur la législation en vigueur ;
- une mise à distance critique des stéréotypes et des pressions sociales poussant à la consommation ;
- une information sur les ressources d'aide et de soutien dans et à l'extérieur de l'établissement.

Thème : orientation

Exposé du cas

En fin d'année, le principal du collège où vous êtes affecté fait un bilan sur l'orientation des élèves à l'issue de la classe de troisième. Il constate que, comme les années précédentes, les vœux des familles sont souvent conditionnés par leur environnement socioprofessionnel plutôt que par le potentiel ou les goûts de leur enfant.
Il demande à l'équipe éducative de préparer un projet d'action afin de lutter contre les déterminismes sociaux en matière d'orientation.

Question

Comment pouvez-vous contribuer à ce projet ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : Référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation, bulletin officiel n° 30 du 25 juillet 2013 (extraits)

Accompagner les élèves dans leur parcours de formation

- Participer à la construction des parcours des élèves sur les plans pédagogique et éducatif.
- Contribuer à la maîtrise par les élèves du socle commun de connaissances, de compétences et de culture.
- Participer aux travaux de différents conseils (conseil des maîtres, conseil de cycle, conseil de classe, conseil pédagogique, etc.), en contribuant notamment à la réflexion sur la coordination des enseignements et des actions éducatives.
- Participer à la conception et à l'animation, au sein d'une équipe pluri-professionnelle, des séquences pédagogiques et éducatives permettant aux élèves de construire leur projet de formation et leur orientation.

Coopérer avec les parents d'élèves

- Œuvrer à la construction d'une relation de confiance avec les parents.
- Analyser avec les parents les progrès et le parcours de leur enfant en vue d'identifier ses capacités, de repérer ses difficultés et coopérer avec eux pour aider celui-ci dans l'élaboration et la conduite de son projet personnel, voire de son projet professionnel.
- Entretenir un dialogue constructif avec les représentants des parents d'élèves.

Document 2 : Note d'information 13-24 de la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, novembre 2013 (extraits)

[...] Au cours de la dernière décennie, la part d'élèves qui bénéficient d'une décision d'orientation en seconde générale et technologique en fin de troisième a sensiblement progressé : à l'issue de cette classe, 65% des élèves obtiennent cette orientation contre seulement 59% il y a douze ans. Cette progression s'explique principalement par une plus grande acceptation par le conseil de classe des vœux d'orientation de l'élève et de sa famille. Pour autant, la manière dont les familles arbitrent entre voie générale et voie professionnelle en fin de troisième reste fortement liée au niveau scolaire et à l'origine sociale. Les élèves s'orientant vers la voie professionnelle ont très majoritairement les résultats les plus faibles. De plus, à notes comparables, les demandes d'orientation des familles varient fortement selon l'origine sociale, le niveau de ressources ou de diplômes des parents.
Ces disparités sont d'autant plus fortes que le conseil de classe n'intervient pas pour corriger à la hausse les vœux d'orientation des élèves originaires de milieux populaires dont le niveau scolaire permettrait d'accéder à un cursus scolaire plus ouvert. En effet, le conseil de classe tranche davantage sur l'adéquation entre le choix de la famille et les capacités de l'élève qu'il ne recherche l'orientation la plus adaptée aux performances scolaires du jeune. Ainsi, à résultats scolaires et autres caractéristiques sociales donnés, les enfants d'agriculteurs, d'employés et d'ouvriers choisissent moins souvent d'être orientés en seconde GT que les enfants de cadres et d'enseignants, sans que cette moindre ambition ne soit corrigée par les décisions du conseil de classe. On retrouve ce qui avait été observé dans le panel 1995 : un élève dont la famille exprimerait une orientation peu ambitieuse, qui se situe en deçà de ce que permettraient ses résultats scolaires, risque de voir cette forme d'auto-sélection entérinée par le conseil de classe.

Thème : égalité filles-garçons

Exposé du cas

Votre proviseur, lors du conseil d'enseignement, fait part à l'équipe de mathématiques de son mécontentement par rapport aux exercices du dernier devoir commun.
Il déplore que dans l'énoncé d'un des exercices les garçons soient survalorisés, dans la mesure où les données présentées donnent à penser qu'ils obtiendraient de meilleures notes que les filles. Il remarque par ailleurs que dans un autre exercice, c'est une fille qui rencontre un problème de surpoids. Enfin, il regrette que dans un troisième exercice ce soit un garçon qui fasse preuve d'astuce pour résoudre une énigme mathématique.

Question

En tant que professeur de mathématiques, quelles sont vos propositions pour prendre en compte ces critiques et travailler sur l'image des mathématiques auprès des filles ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : convention interministérielle pour l'égalité entre les filles et les garçons, les femmes et les hommes dans le système éducatif 2013-2018 (extraits)

Acquérir et transmettre une culture de l'égalité entre les sexes [...] Les stéréotypes constituent des barrières à la réalisation des choix individuels tant des femmes que des hommes. Ils contribuent à la persistance des inégalités en influant sur les choix des filières d'éducation, de formation et d'emploi, sur la participation aux tâches domestiques et familiales et sur la représentation aux postes décisionnels. Ils peuvent également affecter la valorisation du travail de chacun.

Document 2 : Les représentations sexuées dans les manuels de mathématiques de Terminale, étude du centre Hubertine Auclert, novembre 2012 (extraits).

La première observation que nous pouvons tirer de cette enquête concerne l'importante sous-représentation numérique des personnages féminins. Quel que soit le manuel étudié au sein du corpus, les personnages masculins restent toujours les plus nombreux : sur les 3345 personnages sexués comptabilisés, on trouve 2676 hommes pour 672 femmes, soit 1 femme pour 5 hommes. Ce déséquilibre est particulièrement remarquable dans le nombre de personnages masculins célèbres : 1057 noms de personnalités masculines sont cités contre 35 personnages historiques féminins, soit 3,2%. Mais la part de personnages féminins inventés par les auteur-e-s ne vient en aucun cas contrebalancer la faible présence des femmes célèbres : les femmes représentent 28% des 2256 personnages de fiction.[...]
D'une manière générale, les femmes représentées dans les illustrations se trouvent le plus souvent prises dans des interactions amoureuses, ou incarnent des rôles traditionnellement attendus. En revanche, les illustrations mettant en scène des garçons ou des hommes adultes montrent plutôt des liens de sociabilité masculine qu'ils soient intra ou extra scolaires.

Thème : orientation

Exposé du cas

Lors de la journée de pré-rentrée, le principal du collège dans lequel vous êtes affecté présente les résultats de l'établissement sur l'orientation des élèves de troisième de l'année précédente. Il appuie son propos par quelques éléments statistiques.

Demandes et décisions d'orientation juin 2013 (en % des élèves de troisième)						
	Seconde générale et technologique		Voie professionnelle		Redoublement	
	Vœu des familles	Décision	Vœu des familles	Décision	Vœu des familles	Décision
Académie	68,4	65	30,3	32,5	1,3	2,5
Établissement	67,5	62,8	30,8	34,7	1,7	2,5

Dans le cadre du projet d'établissement, le principal souhaite qu'un groupe de travail soit constitué pour analyser ces données et faire des propositions visant à améliorer la situation dans les deux directions suivantes :

- une plus grande ambition des élèves et de leur famille,
- une meilleure adéquation des vœux des familles et des réponses du collège.

Question

Comme membre de ce groupe de travail, quelle analyse faites-vous de la situation et quelles actions pouvez-vous proposer ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : circulaire d'orientation et de préparation de la rentrée 2013 (bulletin officiel n° 15 du 11 avril 2013, extrait)

Afin d'améliorer la transition entre le collège et le lycée, les processus d'orientation seront revisités pour faciliter la construction de parcours individuels d'information, d'orientation et de découverte du monde économique et professionnel. L'orientation, notamment en fin de troisième, devra être améliorée pour n'être plus vécue comme une orientation subie mais comme un choix réfléchi et assumé.

Document 2 : référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation (bulletin officiel n°30 du 25 juillet 2013, extrait)

Compétences communes à tous les professeurs et personnels d'éducation.
Accompagner les élèves dans leur parcours de formation : participer aux travaux de différents conseils (conseil des maîtres, conseil de cycle, conseil de classe, conseil pédagogique, etc.), en contribuant notamment à la réflexion sur la coordination des enseignements et des actions éducatives ; participer à la conception et à l'animation, au sein d'une équipe pluri-professionnelle, des séquences pédagogiques et éducatives permettant aux élèves de construire leur projet de formation et leur orientation. Coopérer au sein d'une équipe : participer à la conception et à la mise en œuvre de projets collectifs, notamment, en coopération avec les psychologues scolaires ou les conseillers d'orientation psychologues, le parcours d'information et d'orientation proposé à tous les élèves.
Coopérer avec les parents d'élèves : œuvrer à la construction d'une relation de confiance avec les parents ; analyser avec les parents les progrès et le parcours de leur enfant en vue d'identifier ses capacités, de repérer ses difficultés et coopérer avec eux pour aider celui-ci dans l'élaboration et la conduite de son projet personnel, voire de son projet professionnel.

Thème : maîtrise de la langue

Exposé du cas

Le principal du collège où vous enseignez souhaite encourager un travail relatif à la maîtrise de la langue française dans toutes les disciplines. Il demande aux membres du conseil pédagogique, dont vous faites partie, de lui faire des propositions précises.

Question

Quelles pourraient être vos propositions dans le cadre de l'enseignement des mathématiques en classe de sixième ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : socle commun de connaissances et de compétences (extrait)

Savoir lire, écrire et parler le français conditionne l'accès à tous les domaines du savoir et l'acquisition de toutes les compétences. La langue française est l'outil premier de l'égalité des chances, de la liberté du citoyen et de la civilité : elle permet de communiquer à l'oral comme à l'écrit, dans diverses situations ; elle permet de comprendre et d'exprimer ses droits et ses devoirs. Faire accéder tous les élèves à la maîtrise de la langue française, à une expression précise et claire à l'oral comme à l'écrit, relève de l'enseignement du français, mais aussi de toutes les disciplines. Chaque professeur et tous les membres de la communauté éducative sont comptables de cette mission prioritaire de l'institution scolaire.

Document 2 : programmes de collège (extrait)

Les mathématiques participent à l'enrichissement de l'emploi de la langue par les élèves, en particulier par la pratique de l'argumentation. Avec d'autres disciplines, les mathématiques ont également en charge l'apprentissage de différentes formes d'expression autres que la langue usuelle (nombres, symboles, figures, tableaux, schémas, graphiques) ; elles participent ainsi à la construction de nouveaux langages. L'usage largement répandu des moyens actuels de traitement de l'information et de communication exige une bonne maîtrise de ces formes variées d'expression.

Document 3 : maîtrise de la langue et mathématiques, François Pluvinage, REPERES IREM, n° 39, avril 2000 (extrait)

Tant pour le jeune enfant qui acquiert le nombre que pour le mathématicien professionnel, la réflexion mathématique a sans aucun doute un caractère très particulier. On pourrait alors méconnaître le rôle que les mathématiques en tant que discipline scolaire sont susceptibles de jouer dans la mise en place et le renforcement de compétences linguistiques générales. Et pourtant, à certaines étapes de l'éducation, notamment au collège, ce rôle peut être crucial.
D'un point de vue linguistique, il conviendrait peut-être de distinguer deux types de questions : celles qui concernent l'utilisation de la langue naturelle en mathématiques et celles qui touchent aux apports possibles des mathématiques pour l'étude de la langue naturelle. Dans la pratique des classes, ces deux aspects sont amenés à s'entremêler et les distinctions sont moins tranchées.[...]
Certains élèves s'estiment à tort capables de s'expliquer dans leur langage, celui que les professeurs souhaitent leur voir employer n'étant à leurs yeux que la marque des exigences de l'institution. Les acquisitions langagières dépendent de l'émergence d'un besoin de formulations suffisamment complètes et précises. Parmi les activités pour le collège, la transmission de figures géométriques par des « messages », que des élèves adressent à d'autres élèves, est l'une de celles qui sont bien appropriées à la prise de conscience souhaitée.

Thème : décrochage scolaire

Exposé du cas

Une demi-journée de réflexion, consacrée au problème du décrochage scolaire, est organisée dans votre collège.
Le principal informe les participants que l'on recense chaque année trois ou quatre élèves par classe de 4^e ou de 3^e qui se désengagent progressivement de leurs études. Il rappelle que les symptômes sont connus : dans un premier temps, ces élèves se désinvestissent du travail à la maison, puis ils oublient de venir à l'occasion de devoirs en classe, puis ils s'absentent de plus en plus souvent jusqu'à disparaître totalement du collège. D'autres élèves continuent à fréquenter l'établissement jusqu'à la fin de la troisième, mais ils ne s'intéressent plus à l'enseignement, et généralement ils ne se présentent pas aux épreuves du DNB.

Question

Quelles propositions pouvez-vous faire pour concourir à la réduction de ce phénomène dans le collège ?

Documentation fournie avec le sujet

Document : La lutte contre le décrochage scolaire
Site du ministère de l'éducation nationale

Le ministère de l'éducation nationale s'est fixé deux objectifs clairs : prévenir plus efficacement le décrochage afin de diviser par deux le nombre de jeunes sortant sans qualification du système éducatif d'ici 2017 et faciliter le retour vers l'École des jeunes ayant déjà décroché [...].

Qu'est-ce que le décrochage scolaire ?
Le décrochage est un processus qui conduit un jeune en formation initiale à se détacher du système de formation jusqu'à le quitter avant d'avoir obtenu un diplôme. Un décrocheur est un jeune qui quitte un système de formation initiale sans avoir obtenu de diplôme de niveau V (BEP ou CAP) ou de niveau supérieur (baccalauréat). [...]

Comprendre la situation d'un élève pour le faire renouer avec les apprentissages
Lorsqu'un élève décroche, l'objectif est de le faire renouer avec les apprentissages. La communauté éducative met alors en place un suivi spécifique : groupes de prévention, cellules de veille. Il est nécessaire de comprendre la situation d'un élève pour coordonner l'action éducative qui doit être menée. Les familles sont associées. [...]

Un nouveau plan de prévention et de lutte contre l'absentéisme
L'absentéisme est l'une des premières étapes d'un processus pouvant conduire au phénomène du décrochage scolaire. La lutte contre l'absentéisme contribue donc à prévenir le décrochage et demeure une priorité. [...]
Un nouveau plan de prévention et de lutte contre l'absentéisme destiné à compléter l'existant - avertissement des parents puis sanction - sera présenté pendant l'année scolaire 2013-2014. Il s'articulera autour de deux principes :

- la pluralité, à savoir la prise en compte de la multiplicité des causes de l'absentéisme et l'intervention de l'ensemble des acteurs du domaine de l'éducation [...]
- la réactivité dans la mise en œuvre des mesures de soutien aux parents car la lutte contre l'absentéisme n'est efficace que si elle est mise en œuvre immédiatement. [...]

De nombreux dispositifs sont au service des équipes éducatives : [...]

- L'accompagnement personnalisé [...]
- L'accompagnement éducatif [...]
- Un programme personnalisé de réussite éducative (PPRE) [...]
- Les dispositifs relais (classes et ateliers) [...]
- L'opération École ouverte [...]

Thème : accès des filles aux filières scientifiques

Exposé du cas

L'analyse de la composition des classes de première générale de votre lycée montre que 45% des élèves de série scientifique sont des filles, alors qu'elles représentent 80% des élèves de série littéraire et 60% des élèves de série économique et sociale. Pourtant, votre établissement accueille en voie générale autant de garçons que de filles.
Avec vos collègues, vous proposez des actions visant à corriger ce déséquilibre.

Question

Quelles formes peuvent prendre ces actions ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : convention interministérielle pour l'égalité entre les filles et les garçons, les femmes et les hommes dans le système éducatif 2013-2018 (extraits).

Depuis 1989, « les écoles, les collèges, les lycées [...] contribuent à favoriser la mixité et l'égalité entre les hommes et les femmes, notamment en matière d'orientation. [...]» (article L. 121-1 du code de l'éducation). C'est bien la mission du système éducatif de faire réussir chacun et chacune, fille ou garçon, de la maternelle à l'enseignement supérieur. Cette réussite implique que les valeurs humanistes d'égalité et de respect entre les femmes et les hommes, les filles et les garçons, soient transmises et comprises dès le plus jeune âge. Ces valeurs sont inscrites dans la Constitution et dans les textes internationaux ratifiés par la France comme la Convention des Nations Unies sur « l'élimination de toutes les formes de discriminations à l'égard des femmes. » Pourtant, les disparités entre les sexes demeurent bien réelles. La réussite et l'échec scolaire, la réussite et l'échec en matière d'insertion professionnelle restent des phénomènes relativement sexués. La manière d'interroger, de donner la parole, de noter, de sanctionner et évidemment d'orienter, révèlent des représentations profondément ancrées sur les compétences supposées des unes et des autres. Ces pratiques en classe, le plus souvent involontaires, ont des conséquences significatives sur les parcours scolaires, puis professionnels, des jeunes. Le paradoxe est connu : les filles ont de meilleurs résultats scolaires que les garçons mais leurs choix d'orientation demeurent très traditionnels et trop souvent restreints à quelques secteurs d'activité. D'une palette plus étendue, les parcours des garçons ne les détournent pas moins de certains domaines professionnels, considérés comme « féminins ». Alors que le taux d'accès au baccalauréat des filles est largement supérieur à celui des garçons (76,6 % pour les filles contre 66,8 % pour les garçons) elles ne représentent que 43,5 % des élèves inscrit(e)s en première année des classes préparatoires aux grandes écoles. Lutter contre cette situation, c'est aussi créer les conditions pour permettre à notre système éducatif d'assurer la réussite de chacun dans la vie sociale et professionnelle.

Document 2 : rapport de l'inspection générale « L'égalité entre filles et garçons dans les écoles et les établissements », mai 2013 (extrait).

La question de l'égalité entre filles et garçons a été trop souvent considérée comme secondaire par rapport à d'autres formes d'inégalités, alors que les inégalités liées au genre se cumulent avec d'autres formes d'inégalités liées aux appartenances sociales et culturelles ; trop souvent traitée à la périphérie du système éducatif et non au cœur de la classe ; traitée tardivement, au moment des choix d'orientation, alors que les préjugés déjà ancrés déterminent les parcours ; trop souvent confiée à des acteurs extérieurs ou laissée à des initiatives militantes, d'ailleurs le plus souvent de bon aloi, mais sans que la cohérence, la continuité et l'efficacité en soient garanties et sans qu'elles soient évaluées.

Thème : violence

Exposé du cas

Vous êtes nommé(e) en lycée et vous encadrez une sortie scolaire. Au cours de celle-ci, vous observez des élèves consultant un smartphone. Ils semblent se moquer d'un autre élève; vous constatez qu'ils commentent des images et messages malveillants à son encontre.

Question

Comment réagissez-vous sur le moment et quelle suite comptez-vous donner au retour de cette sortie scolaire ?

Documentation fournie avec le sujet

Document : guide de prévention de la cyber-violence entre élèves, site du ministère de l'éducation nationale (extrait)

La cyber-violence se définit comme un acte agressif, intentionnel, perpétré par un individu ou un groupe aux moyens de médias numériques à l'encontre d'une ou plusieurs victimes.
Elle recouvre des réalités et des phénomènes variés : photos publiées sans autorisation ou modifiées, « happy slapping »(acte de violence provoqué, filmé et diffusé), diffusion d'images à caractère pornographique, usurpation d'identité, violation de l'identité, menaces ou diffamation via l'usage de courriels, de SMS, de réseaux sociaux, de jeux en ligne... Elle amplifie et prolonge des phénomènes tels que moquerie, brimade, insulte, discrimination, violence physique, etc., voire exclusion du groupe de pairs, élément essentiel de la sociabilité juvénile, ou encore le harcèlement.

La cyber-violence a des spécificités propres :
- la capacité de dissémination en un seul clic d'un message vers un large public ;
- le caractère incessant de l'agression (24h sur 24 et 7 jours sur 7) ;
- la difficulté d'identifier l'agresseur et d'agir sur lui une fois les messages diffusés ;
- le sentiment d'impunité et la facilité offerts par l'anonymat.

Ce type de violence a des conséquences diverses sur le court, le moyen et le long termes : souffrance émotionnelle, isolement social de la victime, problèmes de santé psychosomatiques, décrochage scolaire, absentéisme, voire des actes suicidaires.[...]

Il convient donc, dans tous les établissements :
- d'entreprendre des démarches de prévention ;
- de mettre en œuvre rapidement les mesures relevant de leurs compétences destinées à faire cesser les actes de cyber-violences ;
- d'accompagner les élèves victimes de tels agissements ;
- d'intégrer la lutte contre la cyber-violence dans le projet d'établissement ainsi que dans les réglements intérieurs.

Thème : liaison école - collège

Exposé du cas

Dans le collège où vous avez été affecté, l'un des axes du programme d'actions du conseil école-collège concerne l'autonomie des élèves dans les apprentissages. Le principal vous demande de participer aux travaux d'une commission, composée de professeurs du collège, du CPE et de professeurs des écoles, chargée d'élaborer des pistes pour renforcer l'autonomie dans les apprentissages.

Question

Quelle peut être votre contribution à cette réflexion ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : circulaire n° 2011-126 du 26-8-2011 : scolarité du socle commun - continuité pédagogique (extraits)

2 - Favoriser le travail en commun des enseignants
2.1 Une meilleure connaissance des attendus, des contenus et des programmes respectifs
Il est indispensable que les professeurs qui enseignent en classe de sixième soient informés de la pédagogie de l'école primaire et des programmes du CM2. De même, les professeurs des écoles doivent connaître les méthodes de travail utilisées généralement dans les collèges, les programmes du cycle d'adaptation ainsi que les connaissances et compétences nécessaires à leur mise en œuvre. De tels échanges sont utiles pour que les représentations des uns et des autres fassent place à une connaissance de la réalité des objectifs et des exigences de chaque niveau.[...]

2.2 Mise en place de projets interdegrés pour partager les cultures pédagogiques
Les cultures pédagogiques se partagent en se rencontrant. Les équipes de direction des collèges, les IEN et les IA-IPR veilleront à piloter les échanges et la concertation auxquels ils apportent leur expertise.
Pour renforcer la cohérence nécessaire entre l'école et le collège, il convient d'inciter à travailler en commun [...], élaborer des objectifs ou des méthodes communes pour l'apprentissage et l'évaluation, effectuer un suivi des élèves en difficulté, participer à des stages conjoints premier et second degré, à des rencontres au moment de la prérentrée.
L'élaboration et la réalisation de projets communs (travail de liaison en expression écrite ou orale, défis, expositions, sorties) sont à encourager, ainsi que les activités qui, tout au long de l'année, prennent appui sur les ressources pédagogiques du collège (salles de sciences, CDI, gymnases, etc.).

Document 2 : assises de l'éducation prioritaire 2013, Institut français de l'éducation (extrait)

Thème : développer des pratiques pédagogiques renforçant l'autonomie des élèves

[...] Poser la question du renforcement de l'autonomie des élèves, notamment dans le travail scolaire, suppose donc (entre autres) d'accepter de mettre collectivement sur la table cette question des devoirs à la maison non pas pour rentrer dans la polémique pour ou contre les devoirs, mais pour problématiser la nécessaire articulation temps d'apprentissage collectif/temps d'apprentissage individuel, pour réfléchir aux modalités d'un apprentissage progressif du travail personnel en lien avec l'explicitation méthodologique propre à chaque discipline scolaire. Cela demande de repenser la boucle enseignement/apprentissage en termes d'étayage (j'apporte des aides à l'élève pour lui faciliter l'accès à une nouvelle notion) puis de désétayage progressif (je retire progressivement ces aides pour que l'élève réalise de manière de plus en plus autonome les tâches mettant en situation cette notion). Elle demande aux enseignants une forte expertise sur la nature des difficultés « ordinaires » rencontrées par les élèves dans leur appropriation progressive des savoirs scolaires.

Thème : TICE et internet

Exposé du cas

Lors d'un conseil de classe, un parent d'élève déplore que les enseignants n'utilisent que très peu les possibilités offertes par internet, alors que les élèves sont tout à fait capables de télécharger des vidéos et de logiciels qui peuvent les aider à progresser.
À l'issue de ce conseil, le proviseur demande à l'équipe pédagogique de proposer des actions concrètes pour développer un usage réfléchi d'internet et des nouvelles technologies.

Question

Quelles actions pouvez-vous proposer à court et moyen terme ?

Documentation fournie avec le sujet

Document 1 : article L312-9 du code de l'éducation

Tous les élèves sont initiés à la technologie et à l'usage de l'informatique.
Dans ce cadre, notamment à l'occasion de la préparation du brevet informatique et internet des collégiens, ils reçoivent de la part d'enseignants préalablement sensibilisés sur le sujet une information sur les risques liés aux usages des services de communication au public en ligne, sur les dangers du téléchargement et de la mise à disposition illicites d'œuvres ou d'objets protégés par un droit d'auteur ou un droit voisin pour la création artistique, ainsi que sur les sanctions encourues en cas de délit de contrefaçon. Cette information porte également sur l'existence d'une offre légale d'œuvres ou d'objets protégés par un droit d'auteur ou un droit voisin sur les services de communication au public en ligne.

Document 2 : Karsenti, T., Collin, S., Dupuis, A. Villeneuve, S., Dumouchel, G. et Robin, J.-P. (2012). Avantages et défis inhérents à l'usage des ordinateurs au primaire et au secondaire (extraits)

Les résultats montrent aussi l'impact non négligeable des TIC (technologies de l'information et de la communication) en matière de créativité (tout en tenant compte du plagiat, problème fréquemment rencontré pour environ 15 % des élèves et des enseignants), de communication, de travail collaboratif, de méthodes de travail efficaces et de jugement critique : enseignants et élèves affirment globalement que ces technologies les aident de manière certaine dans le développement de ces compétences. 40 % des élèves et des enseignants disent par exemple utiliser le courriel pour communiquer entre eux; une majorité d'élèves (70 %) estiment en outre travailler plus efficacement lorsqu'ils utilisent un ordinateur pour effectuer leur travail. L'enquête note un écart important de perception au niveau de la compétence des élèves à exercer leur jugement critique, notamment en matière d'évaluation de l'information en ligne : 62,7 % des élèves disent être avancés ou experts dans la recherche d'informations sur Internet alors que seuls 10 % des enseignants soutiennent ce constat; de même 46,7 % des apprenants estiment être avancés ou experts dans leur capacité à juger de la validité des informations collectées contre 3,3 % du côté des professeurs. Selon l'étude, les élèves surestiment leurs compétences informationnelles, ce que confirment plusieurs travaux de recherche.
Les enseignants relèvent 10 principaux bienfaits éducatifs relatifs à l'usage des TIC en cours. En premier est signalée la motivation des élèves (19,5 %), puis l'accès à l'information pour 18,4 % des professeurs. La variété des ressources est également présentée comme l'un des avantages majeurs des technologies (17,3 %). Viennent ensuite la possibilité de mettre en place un apprentissage individualisé (8,9 %), la préparation des élèves pour leur future insertion sociale et professionnelle (7,9 %), des méthodes de travail efficaces (7,6 %), l'augmentation du sentiment de compétence (7,3 %), la qualité des travaux (6,6 %), la communication accrue (3,6 %), la qualité de l'écriture (2,8 %). Les réponses des élèves diffèrent quelque peu : le premier avantage est selon eux l'accès à l'information (28,8 %). Ils sont ensuite 25,2 % à préciser que les TIC favorisent le développement de méthodes de travail efficaces, le fait de travailler «plus et plus vite» (23,8 %) et de «faire moins de fautes à l'écrit» (10,3 %). La motivation et le sentiment accru de compétence comptent respectivement pour 8,5 % et 3,4 % d'entre eux. Au final, 94,3 % des élèves aiment utiliser l'ordinateur en classe et 94,2 % apprécient chercher des informations sur Internet.

5. ANNEXES

5.1. Ressources numériques et logiciels à disposition des candidats

Textes officiels

- réglementation du concours ;
- programmes de Mathématiques des classes de collège, de lycée et des sections de technicien supérieur ;
- documents ressources pour le collège et le lycée ;
- référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation (arrêté MENE1315928A du 1er juillet 2013).

Logiciels

- Algobox ;
- ClassPad Manager ;
- Geogebra ;
- Geoplan – Geospace ;
- Maxima ;
- OpenOffice.org ;
- Python ;
- Scilab ;
- TI-NSpire CAS TE ;
- TI-SmartView 83 Plus.fr ;
- Xcas.

L'utilisation de tout support numérique personnel est exclue.
L'usage des téléphones mobiles et de toute forme d'accès à internet est interdit dans l'enceinte du concours.

Manuels numériques

- BORDAS : Indice 2de, 1re S, Terminale S spécifique ;
- DIDIER : Hélice 6^{e}, Horizon 4^{e}, Math'x : 2de, 1re S, Terminale S spécifique, Terminale S spécialité ;
- FOUCHER : Sigma : 1re STI2D et STL, Terminale STI2D et STL ;
- HACHETTE : Phare : 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}, Déclic : 2de, 1re ES-L, 1re S, Terminale ES spécifique et spécialité, Terminale S spécifique et spécialité ;
- HATIER : Triangle : 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}, Odyssée : 2de, 1re ES-L, 1re S, Terminale ES-L (spécifique et spécialité), Terminale S spécifique, Terminale S spécialité ;
- NATHAN : Transmath : 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}, Transmath : 2de, 1re S, 1re ES-L, Terminale S, Terminale ES-L, Hyperbole : 2de, 1re ES-L, 1re S, Terminale ES-L, Terminale S spécifique.

Le jury remercie les éditeurs de logiciels et de manuels ayant mis gracieusement leurs produits à la disposition du concours.

5.2 Bibliothèque du concours

Le candidat peut utiliser des ouvrages personnels. Seuls sont autorisés les livres en vente dans le commerce, à condition qu'ils ne soient pas annotés et à l'exclusion des manuels spécifiques de préparation aux épreuves orales du concours, qu'ils concernent les sujets de leçons ou la partie agir en fonctionnaire de l'État. Le jury se réserve la possibilité d'interdire l'usage de certains ouvrages dont le contenu serait contraire à l'esprit des épreuves.

La bibliothèque du concours propose quelques exemplaires de manuels du collège, du lycée et des sections de technicien supérieur.

Ouvrages disponibles pour les sessions 2014

Sixième	Bordas	Myriade	2009
	Didier	Hélice	2009
	Hachette Education	Phare	2009
	Hatier	Triangle	2009
Cinquième	Bordas	Myriade	2010
	Hachette Education	Phare	2010
	Hatier	Triangle	2010
Quatrième	Belin	Prisme	2011
	Bordas	Myriade	2011
	Didier	Horizon	2011
	Hachette Education	Phare	2011
	Hatier	Triangle	2011
Troisième	Hachette Education	Phare	2012
	Hatier	Triangle	2012

Seconde	Belin	Symbole	2009
	Bordas	Pixel	2010
	Didier	Math'x	2010
	Hachette Education	Déclic	2010
		Repères	2010
	Hatier	Odyssée	2010
	Nathan	Hyperbole	2010
		Transmath	2010
		Travailler en confiance	2010
Première S	Belin	Symbole	2011
	Bordas	Indice	2011
	Didier	Math'x	2011
	Hachette Education	Déclic	2011
		Repères	2011
	Hatier	Odyssée	2011
	Nathan	Hyperbole	2011
		Transmath	2011
Première ES-L	Bordas	Indice	2011
	Hachette éducation	Déclic	2011
	Hatier	Odyssée	2011
	Nathan	Hyperbole	2011
Première STI2D-STL	Foucher	Sigma	2011
Terminale ES-L	Bordas	Indice (enseignement ES spécifique et L de spécialité)	2012
	Bordas	Indice (enseignement ES de spécialité)	2012
	Hachette Education	Déclic (enseignement ES spécifique et de spécialité et L de spécialité)	2012
	Hatier	Odyssée (enseignement ES spécifique et de spécialité et L de spécialité)	2012
	Nathan	Hyperbole (enseignement ES spécifique et de spécialité et L de spécialité)	2012
Terminale S	Bordas	Indice (enseignement spécifique)	2012
		Indice (enseignement de spécialité)	2012
	Hachette Education	Déclic (enseignement spécifique et de spécialité)	2012
		Repères (enseignement spécifique et de spécialité)	2012
		Repères (enseignement spécifique)	2012
	Hatier	Odyssée (enseignement spécifique)	2012
		Odyssée (enseignement de spécialité)	2012
	Nathan	Hyperbole (enseignement spécifique)	2012
		Hyperbole (enseignement de spécialité)	2012
Terminale STI2D-STL	Foucher	Sigma	2012

Sections de technicien supérieur	Foucher	Sigma (BTS industriels, groupement BCD, analyse et algèbre)	2009
		Sigma (BTS industriels, groupement BCD, statistique et probabilités)	2009
		Sigma (BTS industriels, groupement A, tome 1)	2010
		Sigma (BTS industriels, groupement A, tome 2)	2010